图 论

[美] W. MAYEDA 著

贵州人民出版社

图　　论

[美] W. Mayeda 著

葛　真　　钟宁晖
邓祖善　　杜世培　译

贵州人民出版社

内 容 简 介

本书是一本全面系统地阐述线图理论及其应用的重要著作。作者前田渡（W. Mayeda）教授长期从事图论研究和教学，本书即为作者近三十年来的研究成果总结。

全书分为两部分：前一部分对线图的基本理论（如路径、割集、平面图的理论、网络及流图理论等）作了完整严谨的叙述；后一部分对图论在电网络、开关网络、传输网络及系统故障诊断等方面的应用，作了较详细的介绍。

本书可供大专院校电气、电子工程、计算机科学、自动控制和应用数学等专业高年级学生及研究生作参考教材，也可供需要了解图论基本知识的科技工作者参考。

GRAPH THEORY
Wataru Mayeda
John Wiley & Sons, Inc., 1972

图 论
〔美〕W. Mayeda著
葛真 钟宁晖 邓祖善 杜世培 译

贵州人民出版社出版
（贵阳市延安中路5号）
贵州新华印刷厂印刷 贵州省新华书店发行
850×1168毫米 32开本 20.625印张 445千字
印数1—2,900
1985年3月第1版 1985年3月第1次印刷

书号：13115·55 定价：（平装）4.00元 （精装）5.00元

译者的话

前田渡（W. Mayeda）教授所著的《图论》一书，是图论理论及应用上比较重要的著作之一。本书是作者多年从事图论研究和教学的结晶。

本书在理论与应用上的阐述均比较严密，逻辑思维清楚，对于比较重要的定理与引理均举例说明，并把理论与应用有机地结合起来，加以融会贯通，从而自成体系，别具一格。在叙述上由简到繁，循序渐进，讲究教学法。书中例题丰富，适宜自学。稍嫌不足的是，由于该书完成较早，对图论新近的应用，特别是对图论的计算机算法介绍不够，不过，只要读者参阅有关的文献，这是不难弥补的。

前田渡教授对本书的翻译工作极为支持，通过伍明友同志给我们寄来了他亲自修改的原书的勘误，以供更正；美国圣他卡勒拉大学电机及计算机科学系主任陈树柏教授热情地为本书的中文版写序，使本书增添了光彩；中国科技大学研究生院的左垲先生及他在美国攻读博士学位的研究生伍明友、高晓春同志给了我们大力的支持和鼓励；贵州工学院的吴宏国、张方南、张民逸等同志对本书的翻译也作了不少工作，在此一并表示敬意与感谢。

本书的翻译是在葛真同志主持下进行的。钟宁晖同志负责全书的初译及第一章至第六章的复译；引论、第七章至第九章和第十四章的复译由邓祖善同志负责；杜世培同志负责第十章至第十三章的复译；最后由葛真同志对全书进行审校及文字润饰工作。

由于时间紧促，虽然我们尽了努力，译文中的错误仍然难免，希望读者批评指正。

1983年10月

序

图论应用的开始，可追源至1736年，即欧拉(L.Euler)解答那著名的“哥尼斯堡七桥难题”的时候。所谓图论的研究，是指对由“点”和“线”构成的各种图，研究其中点和线的关系和特性的一种科学。图论在物理科学上的应用，可溯自1847年，当克希霍夫(G.R.Kirchhoff)研究电网络时，由他创立那两个举世知名的网络定律时开始。但是“图论”(Theory of Graphs)这个名词却是在1936年由D.König首先启用。D.König可以说是以系统性的科学方法研究图论的第一人。

在1930至1936年间，C.Kuratowski,R.M.Foster和H.Whitney在图论研究及发展的过程中，作出了不少重要的贡献。但图论在电网络分析及综合上获得重要的应用，则始于1960年，由伊利诺大学的学者M.B.Reed,M.E.Van Valkenburg, S.Seshu, W.H.Kim及本书作者前田渡(W.Mayeda)教授大力推动所致。

前田渡教授在近二三十年间担任了一个“网络图论”理论及应用研究开垦者的重要角色，在该科学理论的成长上作了不少有意义的贡献。此外，他还在实际电机工程应用上发表了若干重要的文章，其中最具代表性的如有源电路的“双图法”(Two-graph approach)，开关网络的拓扑分析及综合，以及图论在电子计算机科学上的应用等。在这些领域中他均作出了有意义的贡献。

本书介绍了前田渡教授近三十余年来在图论研究方面的成果，在1972年由美国著名的John Wiley & Sons出版社出版。当我于1960年在伊利诺大学攻读电机工程学博士学位时，在图论应用的研究上，有机会研读本书一部分初稿，受益良多。

我在1980年接受了中国科学院的邀请，在北京中国科技大学

研究生院第一次讲授“网络图论及其应用”的专题讲座。承当时听讲的几位热心同仁鼎力协助，在1982年把我在这次讲座中用的英文资料，编撰成《网络图论》一书，由科学出版社出版。该书对前田渡教授在网络图论研究上的辉煌成果，作了颇为详细的介绍。

在此电子计算机科学神速发展，图论在科学应用上日益广泛和进步之时，欣闻贵州工学院葛真教授及钟宁晖、邓祖普、杜世培诸同仁把前田渡教授的《图论》原著翻译成中文出版，可谓适逢其时了。本书对国内在图论理论及应用上之研究，必将有一定的贡献。近日承前田渡教授来信之托，谨将上述数言为序，并谨代表前田渡教授向主持该翻译工作之葛真教授及在他领导下工作的全体同仁深致谢忱，更预祝一切工作顺利，及此译本问世后获丰硕的成果！

陈树柏谨识

一九八三年夏于美国加里福尼亚州圣他卡勒拉大学

原　　序

近年来，许多已发表的科技论文常在标题中使用一些与线图理论有关的字眼，如"拓扑"、"图论"、"割集"、"树"等等。这不是偶然的。线图理论本身作为数学理论目前正处于发展过程之中，它不断应用于各个从表面看来互不相关的领域中，例如，工程系统科学，人类关系与社会学，商业经营与科学管理，政治学，化学，心理学等。

本书的意图是，不仅要提供使线图理论学起来极有兴趣的入门内容，而且还将引导读者能深入钻研他自己探索的问题，不论这种问题是涉及线图理论本身，还是它的多种多样应用中的一项。

在一本书里，不可能对线图理论的所有应用都进行讨论，而我们着重研究的是在电网络理论、开关理论、通讯网和交通网理论、系统诊断等方面的应用。

我很乐于感谢N．沃克斯博士对本书提出的许多非常宝贵的建议，感谢他阅读了手稿的定稿并改正了其中的错误。我还感谢M．E．冯·瓦尔肯伯格博士和伊利诺大学协调科学实验室系统组的过去与现在的全部成员，感谢他们对完成本书所作的直接的与间接的支持。

前田渡(Wataru Mayeda)

于伊利诺州奥巴拉

1971年10月

目　录

引论……………………………………………………………………（1）

第一章　无向线图……………………………………………………（5）
　1-1　引言……………………………………………………（5）
　1-2　路径和回路………………………………………………（10）
　1-3　欧拉图……………………………………………………（18）
　1-4　M图……………………………………………………（26）
　1-5　不可分图…………………………………………………（33）
　1-6　路径的集体………………………………………………（39）
　1-7　τ图……………………………………………………（49）
　习题……………………………………………………………（60）

第二章　关联集和割集………………………………………………（63）
　2-1　关联集……………………………………………………（63）
　2-2　割集……………………………………………………（65）
　2-3　割集的环和………………………………………………（73）
　2-4　线性无关割集……………………………………………（85）
　习题……………………………………………………………（90）

第三章　线图的矩阵表示和树………………………………………（92）
　3-1　关联矩阵…………………………………………………（92）
　3-2　树……………………………………………………（100）

3-3 回路矩阵……………………………………………… (105)
3-4 割集矩阵……………………………………………… (118)
3-5 割集矩阵的可实现性（Ⅰ）………………………… (126)
3-6 从割集矩阵到关联矩阵的变换……………………… (150)
习题 ……………………………………………………… (154)

第四章 平面图 ………………………………………… (156)
4-1 2-同构图……………………………………………… (156)
4-2 平面图………………………………………………… (164)
4-3 对偶性………………………………………………… (173)
4-4 割集矩阵的可实现性（Ⅱ）………………………… (191)
习题 ……………………………………………………… (206)

第五章 特殊割集和伪割 ……………………………… (208)
5-1 分离两个确定顶点的割集…………………………… (208)
5-2 伪割…………………………………………………… (218)
5-3 阿贝尔群……………………………………………… (230)
习题 ……………………………………………………… (233)

第六章 有向线图 ……………………………………… (235)
6-1 有向线图的关联矩阵和回路矩阵…………………… (235)
6-2 初等树变换…………………………………………… (248)
6-3 回路矩阵的非零大子式的值………………………… (252)
6-4 割集矩阵……………………………………………… (257)
6-5 基本割集矩阵的可实现性…………………………… (264)
6-6 有向子图……………………………………………… (268)
习题 ……………………………………………………… (277)

第七章　无源网络的拓扑分析 …………………………… (279)
7-1　克希霍夫定律…………………………………………… (279)
7-2　网孔变换………………………………………………… (281)
7-3　节点变换………………………………………………… (285)
7-4　导纳矩阵的行列式……………………………………… (288)
7-5　开路网络函数…………………………………………… (301)
7-6　短路网络函数的拓扑公式……………………………… (314)
习题 ……………………………………………………… (322)

第八章　有源网络的拓扑公式，单向网络及等效变换 … (324)
8-1　电流图和电压图………………………………………… (324)
8-2　符号置换………………………………………………… (334)
8-3　主树……………………………………………………… (337)
8-4　开路策动点函数………………………………………… (345)
8-5　开路转移函数…………………………………………… (350)
8-6　短路网络函数…………………………………………… (353)
8-7　单向网络………………………………………………… (356)
8-8　电网络的等效变换……………………………………… (365)
习题 ……………………………………………………… (375)

第九章　树的生成 ………………………………………… (380)
9-1　生成树的必要性………………………………………… (380)
9-2　用初等树变换来生成树………………………………… (382)
9-3　完全树的生成…………………………………………… (393)
习题 ……………………………………………………… (405)

第十章　流图和信号流图 ………………………………… (409)

10-1 流图 ………………………………………………（409）
10-2 信号流图 ………………………………………………（415）
10-3 信号流图的等效变换 ………………………………（426）
习题 ………………………………………………………（438）

第十一章 开关理论 ………………………………………（441）
11-1 连接矩阵 ……………………………………………（441）
11-2 开关网络的分析 ……………………………………（448）
11-3 完全确定开关函数的综合 …………………………（451）
11-4 以SC网络综合不全定开关函数 ……………………（459）
11-5 多触点开关网络 ……………………………………（462）
习题 ………………………………………………………（466）

第十二章 传输网理论——边权例 ………………………（469）
12-1 无向边权（EWC）网中的单流 ……………………（469）
12-2 无向EWC网的端限容量矩阵 ………………………（480）
12-3 端限容量之间的关系 ………………………………（492）
12-4 割集的W类 ………………………………………（496）
12-5 有向EWC网 …………………………………………（501）
12-6 损耗EWC网 …………………………………………（521）
12-7 EWC网的流可靠度 …………………………………（528）
习题 ………………………………………………………（546）

第十三章 传输网理论——点权例 ………………………（553）
13-1 无向情况下的端限容量 ……………………………（553）
13-2 无向VWC网的端限容量矩阵 ………………………（564）
13-3 有向VWC网 …………………………………………（571）
13-4 点割和点半割的生成 ………………………………（575）

习题 …………………………………………………… (585)

第十四章 系统诊断 …………………………………… (588)
14-1 分辨率 ……………………………………………… (588)
14-2 测试点 ……………………………………………… (592)
14-3 测试门 ……………………………………………… (614)
习题 …………………………………………………… (625)

主要参考文献 ………………………………………… (628)

英中名词索引 ………………………………………… (633)

符号索引 ……………………………………………… (644)

引　论

有不少物理系统其性能不仅与元件的特性有关，而且也与元件的相互位置有关。电网络就是一个明显的例子。如果我们把一个电阻器换成一个电容器，一般来讲某些特性（比如说网络的输入阻抗）就会发生变化，这表明这个系统的性质与元件特性密切相关。另一方面，如果我们改变一个电阻器的位置，输入阻抗也会变化，这说明系统的拓扑结构影响着系统的性质。仅由同一种类型的元件组成的系统，其系统特性仅仅取决于本身的拓扑结构，单触点开关电路就是这种系统的例子。在非物理系统中，也能见到类似的情况，比如在管理系统之中就是如此。因此，要显示一个系统，使其拓扑结构能够清晰可见是非常重要的。

表示一个系统的一种简单方法，是画一个由称之为"顶点"的点和连结这些顶点的称之为"边"的线段组成的图，在这个图中，这些顶点和边代表元件和这些元件的联接方式，这样的图就是线图。一个线图根据我们研究的物理系统的类型常常也称为网络、网、图、电路、图解、结构等等。

我们通常用线图来表示一个系统的数学模型或抽象模型，而不指出其物理结构。在这样的情况下，线图指的是流图、信号流图、框图、状态图、简化图、社会图及组织图等。

在线图理论中，已知最早的论文是欧拉（Euler）在1736年发表的，他给出了哥尼斯堡(Königsberg)七桥问题的解答，提出了线图的概念。在1847年，克希霍夫（Kirchhoff）利用线图理论分析电网络，得到了今天称为策动点阻抗和转移导纳的拓扑公式，

这或许是在工程技术问题中应用线图理论的第一篇论文吧。然而，并不是克希霍夫的论文而是麦比乌斯（Möbius）关于四色问题的猜想（大约在1840年），吸引了许多学者献身于线图理论的研究。

四色问题是要证明或者否定，对于任意一个平面地图，如果两个相邻的国家用不同的颜色，只要四种颜色就足够了。在平面地图的每一个国家中间设置一个顶点，当且仅当两个国家相邻时用一条边把这两个顶点连起来，这样做的结果就得到了平面图。换而言之，对于一个给定的平面地图，必定有一个平面线图与其对应，在地图上的一个国家对应于线图的一个顶点，两个国家的界线对应于代表两国的两个顶点之间的一条边。现在，我们可以把四色问题重新陈述如下：证明或者否定对任意一个平面图的顶点染色，相邻的两个顶点用不同的颜色，只需四种颜色就足够了。

如果你想动手证明四色问题，你立即会碰上区别平面图与非平面图的困难。你要研究平面图的性质，尽管关于平面图的基本性质已由库拉托斯基(Kuratowski)和惠特尼（Whitney）发现，然而四色问题至今还未解决*，仍在吸引许多学者为探讨更多更深的线图理论而努力。当然，也有不少的性质因为其特殊的应用而被发现。

本书的第一部分为初学者提供线图的性质，然而，这并不意味着我们仅仅研究线图的基本与简单的性质。事实上，本书包括如下最高深的材料：

1.适合于生成所有可能的路径的路径集 $\{P_{ij}\}$ 的特性，以及路径集之中的性质。

2.怎样生成割集，特别是怎样生成把给定的两个顶点分离的所有割集，这些割集在通讯网和运输系统中是非常重要的。

* 四色问题已在1976年由美国的K. Appel, W. Hakan, J. Koch运用电子计算机工作了1200小时，成功地作出了证明.——译注

3.证明包括托特（Tutte）条件在内的割集矩阵的可实现条件。

4.对于非平面图的库拉托斯基条件的一个证明及对于平面图的惠特尼条件（对偶性）的证明。

5.伪割的引入．当一个线图是平面时，一个伪割就变成路径的对偶。

6.在有向线图中，判定有向圈存在的一个算法。

7.生成所有树的两种类型的发展。

当我们讨论线图应用时，我们时常用到带权线图，即边或者顶点具有称之为权这个量的线图．例如，我们能够把一个无源线性双向集中参数的电网络表示成为一个线图．这个线图的每条边具有三个权，即电压、电流及二者的比例系数，这将在第七章讨论．为了研究通讯网或运输系统的最大流问题，对应的线图中通常每条边仅需要一个权表示该边能处理的最大运输能力（见第十二章）．我们还能看到一个适当的带权线图能够表示其他系统，诸如开关电路，逻辑电路，航空运输网及计算机系统。

在许多情况下，一个带权线图只是用来表示一个系统．然而在本书中，我们将研究怎样利用带权线图进行系统分析，特别是一种称为拓扑分析法的方法．有两类互相区别的拓扑法，一个是利用称为拓扑公式的法则直接从带权线图研究所述系统的特性．而另一种方法是连续运用等效变换法把一个系统的带权线图简化为一条带权边，这条边的权就表示了系统的特性．拓扑公式法的例子包括：（1）根据一个给定的线性集中参数的电网络所对应的带权线图，找出所有具有某些特性的子图，从而得到电网络的函数（见第七，第八章）；（2）在通讯网与运输系统中，由定出所谓最小割的位置而得到最大流（见第十二章）；（3）在一个开关电路中，由找出指定端点之间所有可能的路径而获得开关函数（见第十一章）．等效变换的例子是：（1）利用节点消去

法获得简化了的信号流图（见第十章）；（2）一个线性电网络的等效变换（见第八章）。

第一类拓扑分析清楚地显示出一个系统的特性与边（或部件）的位置之间的关系。在某些情况下，这种关系足以设计或改善一个满足给定功能的系统，这称为系统的拓扑综合。开关函数和通讯网的综合就是一个良好的例证。在第十四章给出的系统的故障诊断再次表明线图理论的确是应用于系统理论领域中的一个基本工具。

第一章　无向线图

1-1　引　言

在这一章里，我们要讨论无向线图的路径和回路的一些性质。路径和回路是线图中相当重要的子图。例如，我们以后将会看到，路径确定开关网络的特性，而回路则与电网络理论中的克希霍夫电压定律有关。

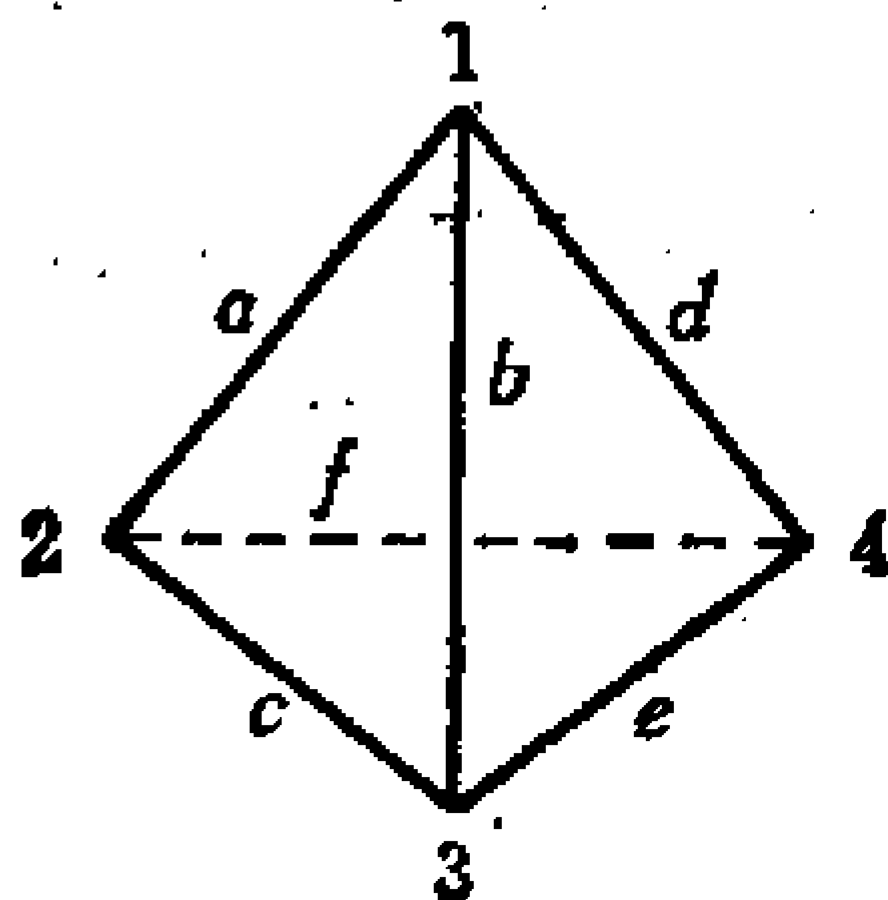


图1-1-1　一个四面体

为了定义线图，考虑图1-1-1所示我们熟悉的四面体，可能要容易些。在这个四面体中，有四个顶点1，2，3，4和六条边a，b，c，d，e，f。每一条边位于两个顶点之间：边a在顶点1，2之间，边b在顶点1，3之间，边c在顶点2，3之间等等。在组合拓扑学中，顶点集合和边集合的集体*称为一维（线性）单纯复形，在图论中则称之为线图。不过，顶点和边的定义要比在多面体中广泛些。

---

* 集体（collection）与集合（set）的概念稍有不同．在本书中，集体是指以集合为元素的集合．但有时二者也可混用．——译注

为了从几何上推广顶点和边的概念，我们考虑一个 n 维欧几里德空间。首先，一个顶点是空间中的一个点。对于给定的顶点集合 Ω，一条边 e 是位于 Ω 中两个顶点 v 和 v' 之间，而不经过 Ω 中其它顶点的一条曲线。顶点 v 和 v' 称为边 e 的端点。当 v 和 v' 相同时，边 e 称为"自环"，如图1-1-2(a)所示。如果我们给曲线规定一个方向，如图1-1-2(b)所示，则由此曲线表示的边称为有向边。否则称为无向边。

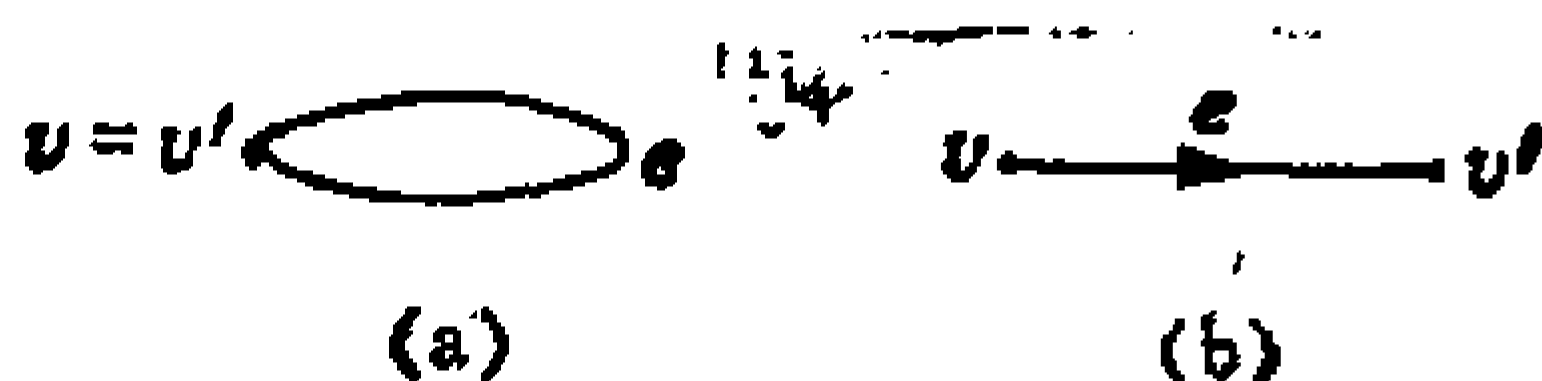


图1-1-2 边

(a)自环；(b)有向边

现在，我们可以用前面的几何概念来导出边、顶点和线图的抽象定义。我们用一个集合来代替（空间中的）那些被选作顶点的点，以集合中的元素作为给定的顶点。从几何意义来说，一条边是两个顶点之间的一条曲线。由于在这条曲线上没有其它顶点，我们可以把一条边看成与一对顶点相对应。另一方面，也允许几条边有相同的端点。因此，顶点、边和线图的定义可以抽象成下面的形式。

定义1-1-1 设 $\mathscr{E}$ 和 Ω 是两个集合。若任一 $e\in\mathscr{E}$* 恰好对应着一对 (v, v')，其中 v，$v'\in\Omega$，则 $\mathscr{E}$ 中每一个元素是一条边，Ω 中每一个元素是一个顶点，而 $\mathscr{E}\cup\Omega$** 是一个线图。

有了这个定义，端点、有向边和无向边都可以抽象定义如下。

定义1-1-2 设 e 是与一对顶点 (v, v') 对应的一条边，则称

---

* 符号 $\in$ 意思是"属于…"或"在…中"，$e\in\mathscr{E}$ 表示 e 在 $\mathscr{E}$ 中。

** $\mathscr{E}\cup\Omega$ 表示属于 $\mathscr{E}$ 或 Ω，或二者共有的所有元素的集合。

两个顶点v和v'为边e的端点。若顶点对(v,v')是有序的，则说e是有向的，或称e为有向边。否则，就说e是无向的，或称e为无向边。

进一步，我们定义有向和无向（线）图如下。

定义1-1-3 若一个线图的所有边都是有向的，则说此线图是有向的，或称之为有向(线)图。若一个线图的所有边都是无向的，则说此线图是无向的，或称之为无向（线）图。

例1-1-1 我们用符号$\alpha\rightarrow\beta$来表示α与β对应。考虑两个集合$\mathscr{E}=(a,b,c,d,e,f,g)$和$\Omega=(1,2,3,4,5)$，其中

$$a\rightarrow(1,2)$$
$$b\rightarrow(1,3)$$
$$c\rightarrow(2,3)$$
$$d\rightarrow(1,4)$$
$$e\rightarrow(1,4)$$
$$f\rightarrow(4,2)$$
$$g\rightarrow(2,4)$$

由于$\mathscr{E}$中的每一个元素恰好对应Ω中一对顶点，故据定义1-1-1，a,b,c,d,e,f,g是边，$1,2,3,4,5$是顶点，而$\mathscr{E}\cup\Omega$是一个线图。顶点1和2是边a的端点，顶点1和3是边b的端点，如此类推(定义1-1-2)。

代替上例中采用的符号$\alpha\rightarrow\beta$，我们用一个图形来表示边和对应的顶点对。为此，我们作如下约定。

1.一个顶点用一个小圆圈表示。当顶点的名称需要标明时，将它写在圆圈旁边或圆圈中，如图1-1-3(a)和(b)所示。

2.当一条边是无向时，用两个顶点间的一条线表示，这两个顶点就是这条边的端点。如有必要，边的名称可写在线旁。例如，无向边$e\rightarrow(v,v')$由图1-1-3(c)所示的一条线表示。

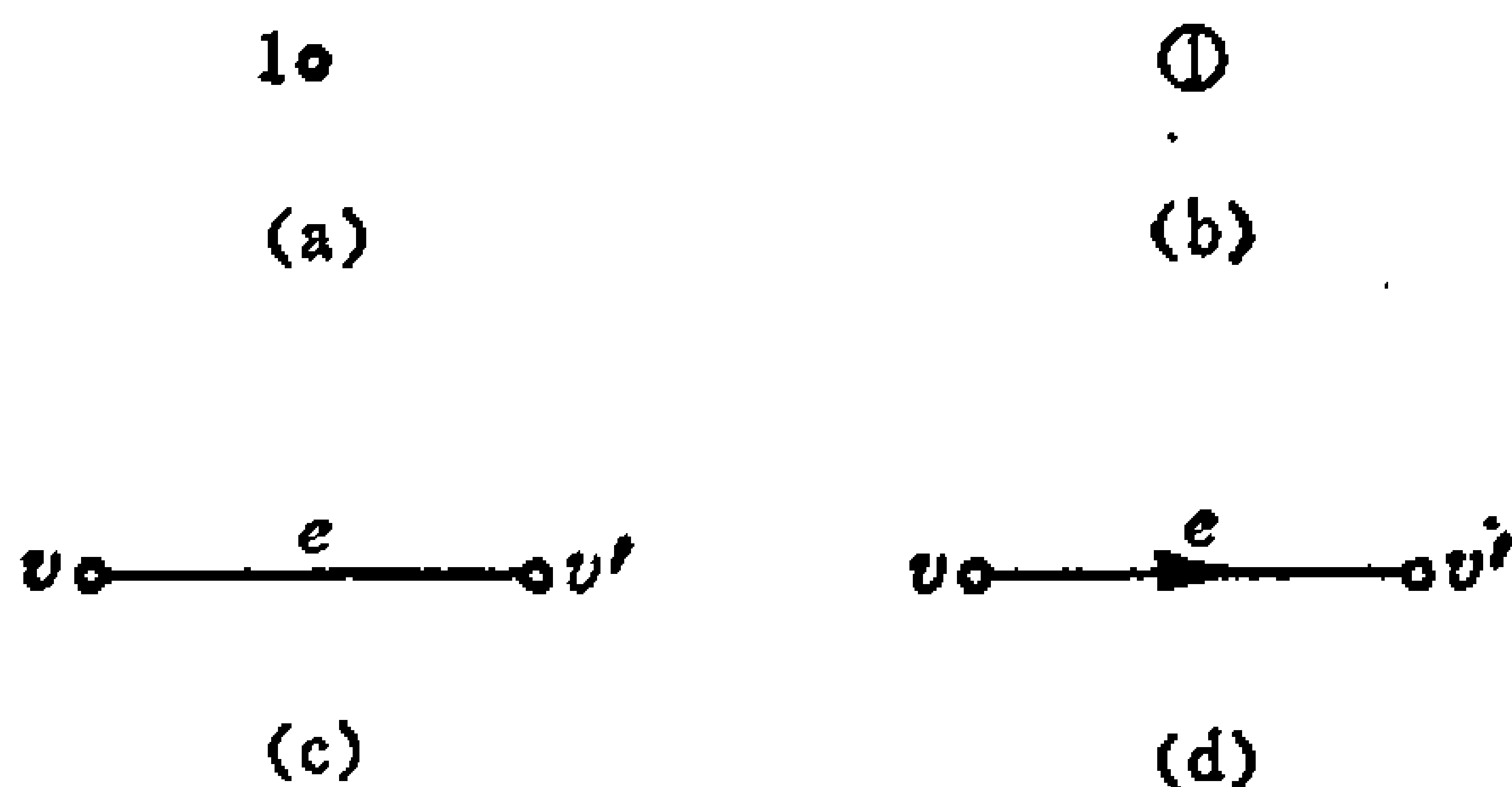


图1-1-3　顶点和边的表示

(a)顶点 1 的表示；　(b)顶点 1 的表示；

(c)无向边$e(v, v')$；　(d)有向边$e(v, v')$

3.当一条边是有向时，用一条带有箭头的线来表示，箭头指向边的方向。例如，有向边 $e \to (v, v')$如图1-1-3(d)所示。

这里指出，当 $e \to (v, v')$，而v和v'相同时，边e是一个自环，表示边e的线是一个始于顶点v（即代表顶点v的小圆圈）也终于同一顶点的环。

因为我们只需要知道每一条边对应哪一对顶点，所以，代表一条边的线是什么形状是无关紧要的。例如，图 1-1-3(c) 和图 1-1-4 (a)，(b)表示的是同一条边。

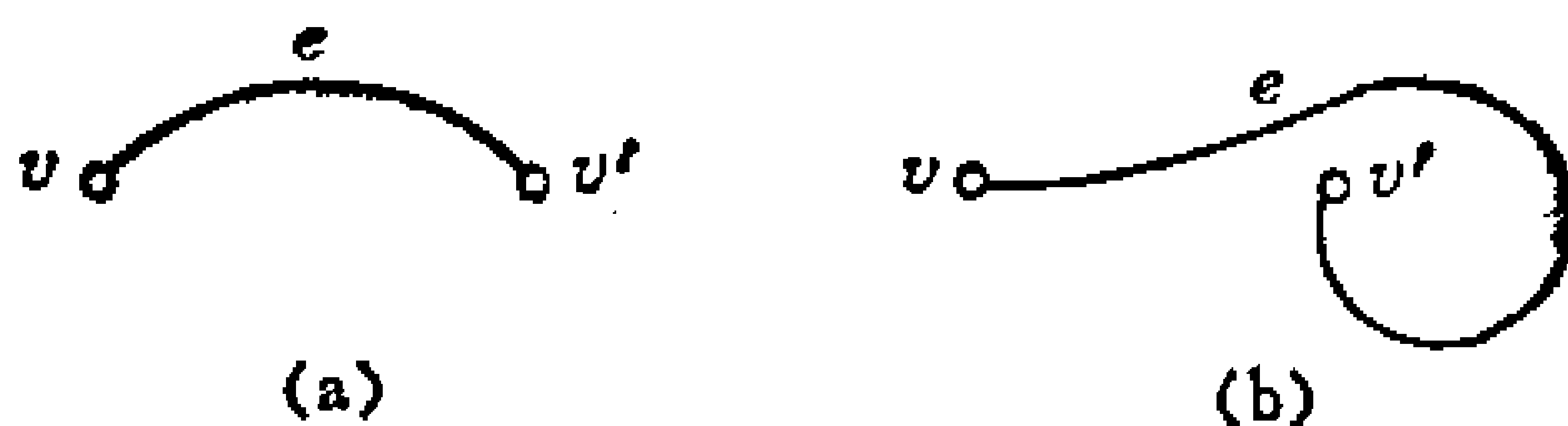


图1-1-4　边$e(v,v')$的表示

在一个图形中，不用小圆圈表示的那些边的交叉点，也是无关紧要的。例如，在图1-1-5(a)中，虽然边a，b互相交叉，但此图形仅表示无向边a对应于顶点对(1，4)，无向边b对应于顶

点对（2，3）．注意图1-1-5（a）和（b）之间的区别。

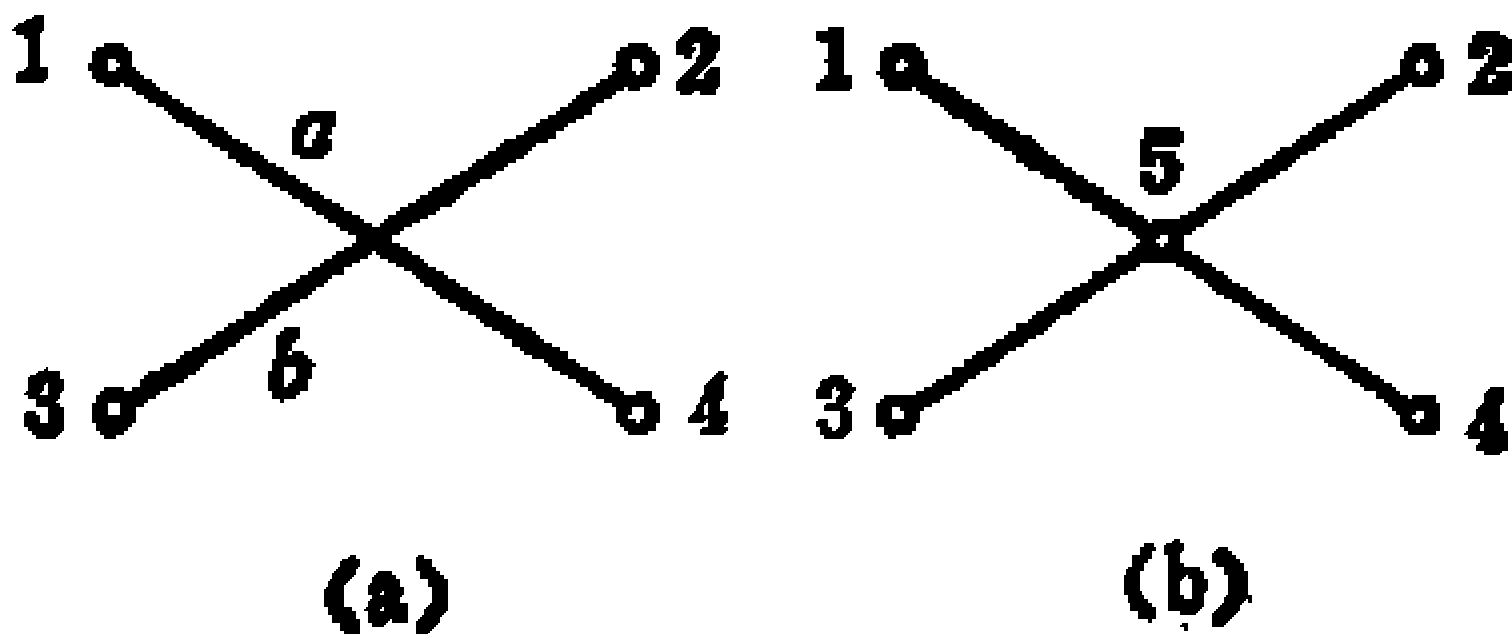


图1-1-5　边的交叉

(a)边a和边b，　(b)四条边

有了这些约定，我们就可以用图形来表示一个线图．例如，例1-1-1的线图$\mathscr{E}\cup\Omega$，其中$\mathscr{E}=(a,b,c,d,e,f,g)$，$\Omega=(1,2,3,4,5)$，把每一对顶点看作一个无序点对，即可由图1-1-6表示出来。注意，此例中顶点5不在任何一个点对里，所以没有线与顶点5连接。

由于图形给出了一个线图清晰而简单的表示，在本书中，我们就用这样的图形来表示给定的线图。

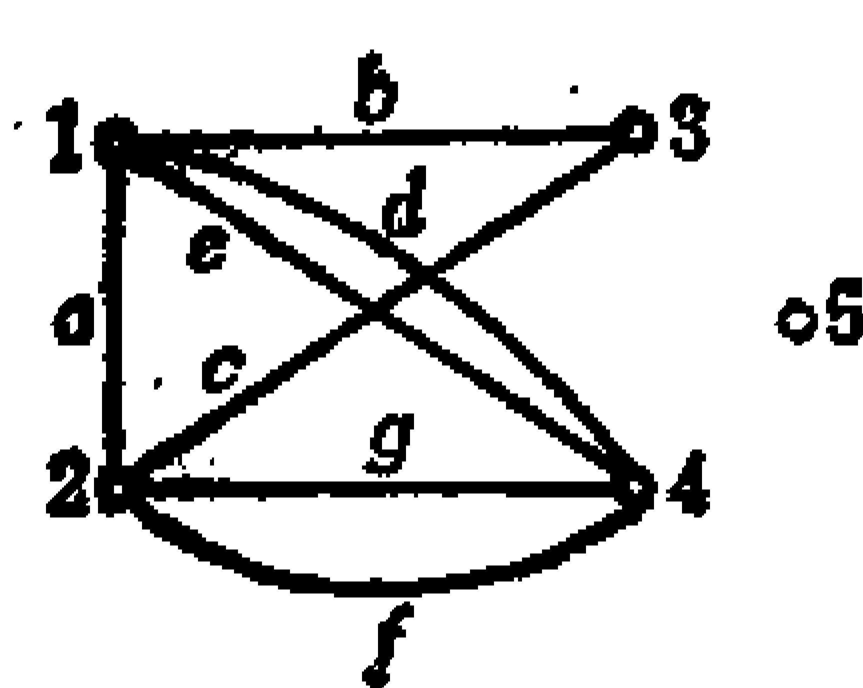


图1-1-6　无向图

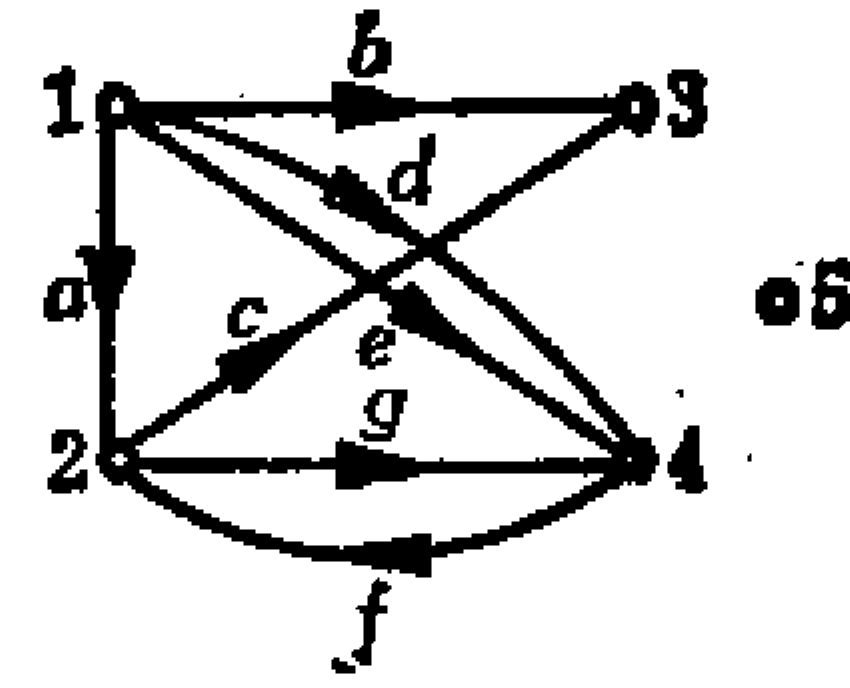


图1-1-7　有向图

由定义1-1-2和1-1-3可以看出，图1-1-6中的线图是无向的，而图1-1-7中的线图是有向的。应当注意的是，当例1-1-1中所有的顶点对都是有序点对时，便得到图1-1-7中的线图。

在本书的前面几章里，我们只讨论无向线图。换句话说，在以下几章中，所谓线图指的就是无向线图。

1-2 路径和回路

如果一个顶点是一条边的两个端点之一，则称这条边与这个顶点关联（或连接）。例如，在图 1-2-1 所示的线图中，边 a，b，c 与顶点 A 关联（或连接），边 a，d，e，f 与顶点 B 关联。

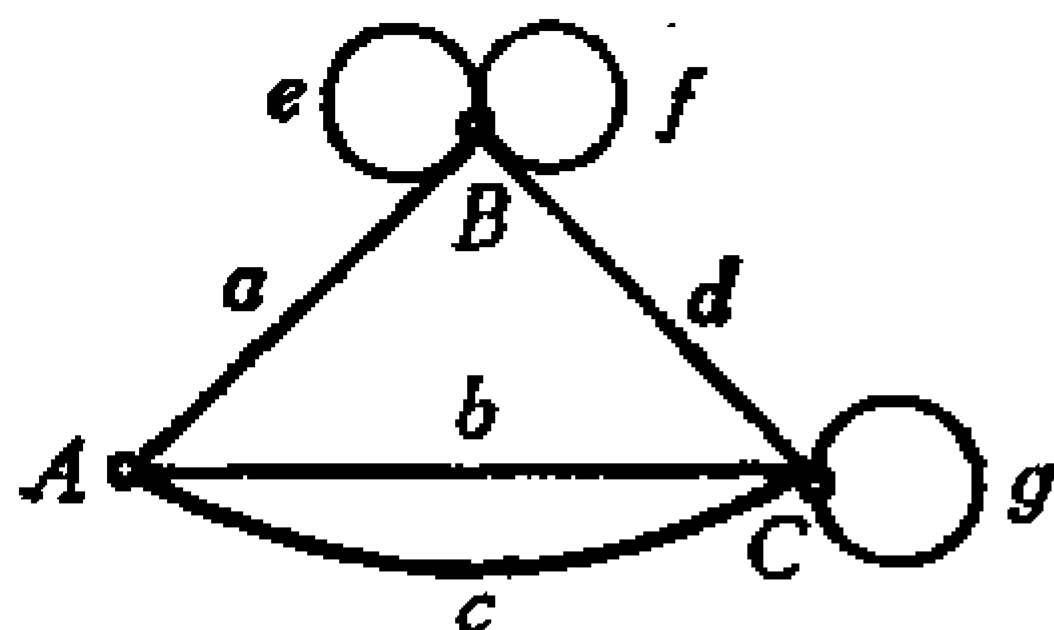


图1-2-1　一个带有自环的线图

为了表示象路径、回路和欧拉图这样一些线图的特征，与每一个顶点相关联的边的数目是非常重要的。因此，我们定义顶点的度如下。

定义1-2-1　一个顶点 v 的度记作 $d(v)$，定义为

$$d(v)=2n_l+n_n \tag{1-2-1}$$

其中 n_l 是与顶点 v 关联的自环数，n_n 是除自环外与顶点 v 关联的边数。

例如，在图1-2-1所示的线图中，顶点 A 的度 $d(A)=3$，因为对顶点 A 来说，$n_l=0$，$n_n=3$。顶点 B 的度 $d(B)=2\times2+2=6$，这里 $n_l=2$，$n_n=2$。顶点 C 的度 $d(C)=5$。

假定边 e 连接顶点 p 和 q（即边 e 的两个端点是 p 和 q），则当 $p\neq q$ 时，对 $d(p)$ 和 $d(q)$ 来说，边 e 都只计算一次。而当 $p=q$ 时，边 e（在这里是自环）对 $d(p)$ 就要计算两次。这对线图中的每一条边都适用。因此，一个线图中所有顶点的度的总和等于边数的两倍，即

$$\sum_{v\in G}d(v)=2n_e \tag{1-2-2}$$

其中 $\sum\limits_{v\in G}$ 表示对线图 G 的所有顶点求和，n_e 是 G 中边的数目。例

如，在图1-2-2中，$d(A)=3$，$d(B)=2$，$d(C)=3$，$d(D)=2$，$d(E)=4$，于是$\sum_{i\in G}d(i)=14$。在这个线图中边数为7。

把图1-2-2中的线图看作一幅地图，其中顶点代表城市，边代表公路。我们可以看出，从一个城市到另一个城市有好几条路可走。假定我们打算从A城到D城去旅行。如果我们把从A城到D城旅行所经过的道路按次序排出来，就得到一个边的序列，它表明了从A到D的一条特定路线。与出发点对应的顶点称为始点，与目的地对应的顶点称为终点。例如，在图1-2-2所示的线图中，以A为始点，D为终点的一些边序列是(c,e)，(a,d,c,f,g,e)以及(c,d,b)。必须注意，在所讨论的序列中，每一条边都有一个顶点和前一条边是公有的，而另一个顶点和后一条边公有。例如，在序列(c,d,b)中，边d的顶点E是前一条边c的一个端点，而边d的另一顶点C是后一条边b的一个端点。若在这样的序列中，每一条边只出现一次，则称此序列为边列。

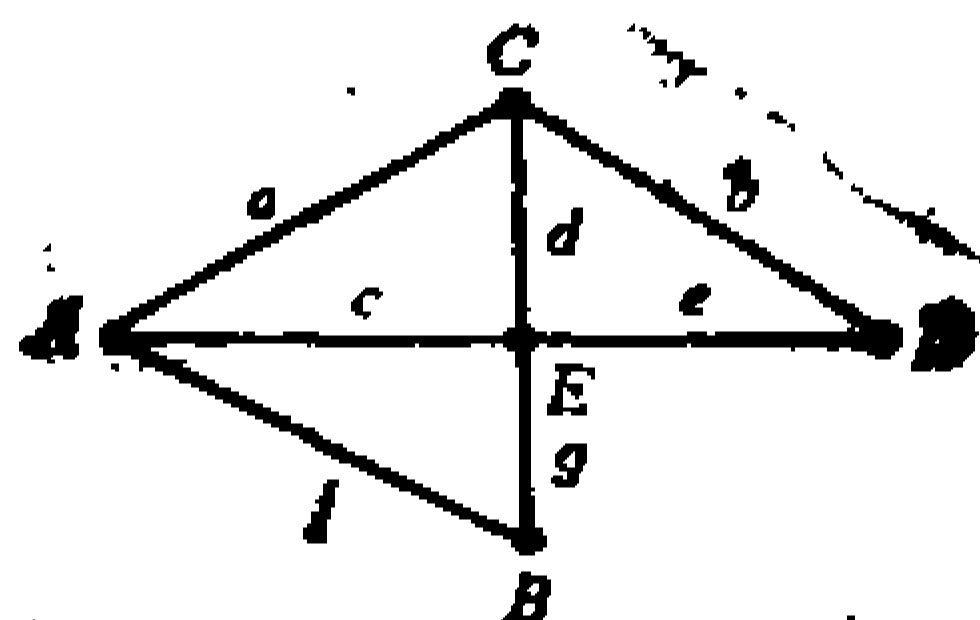


图1-2-2　一个线图

定义1-2-2　具有下列性质的边的序列称为边列：

1.除了序列的第一条边和最后一条边外，序列中任一条边e都有一个端点是前一条边的端点，另一个端点是后一条边的端点。

2.第一条边的一个端点是始点，另一个端点是后一条边的端点。

3.最后一条边的一个端点是前一条边的端点，另一个端点是终点。

4.每一条边恰好出现一次。

定义1-2-3 如果一个边列的始点和终点不同，则称此边列为开边列。否则称之为闭边列。

例如，在图1-2-2中，($c\ d\ b\ e\ g$) 是一个开边列，其始点和终点分别为A和B。序列($a\ d\ e\ b\ d\ g$)不是一个边列，因为边d出现了两次。($a\ d\ c$)是一个闭边列。注意，序列 ($c\ f\ g\ d\ b\ e$) 是一个闭边列，而($a\ c\ d\ b\ e\ d$)不是闭边列。

定义1-2-4 由一个边列的所有边组成的线图称为与此边列对应的线图。

例如，与边列($a\ d\ g\ f\ c\ e$)对应的线图如图 1-2-3 所示。

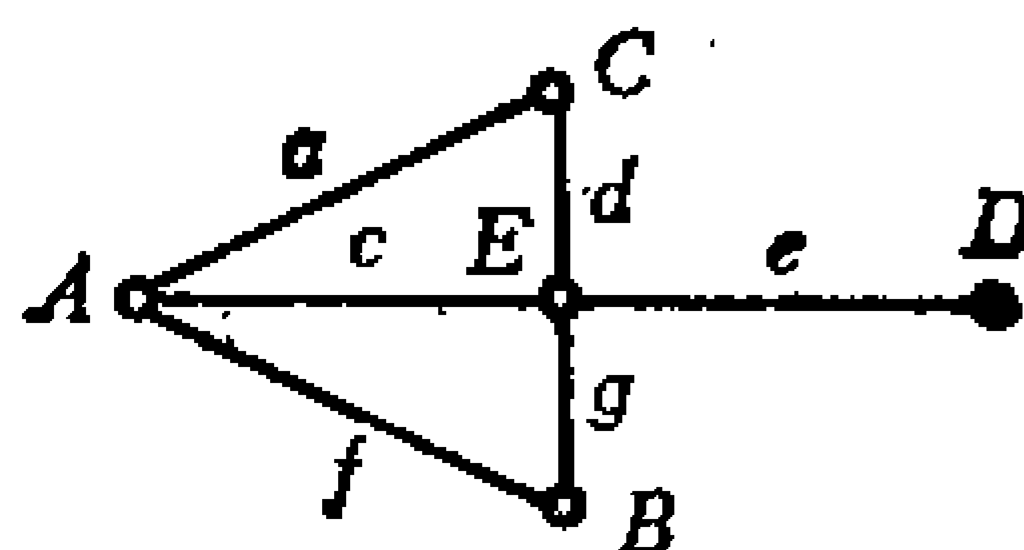


图1-2-3 与($a\ d\ g\ f\ c\ e$)对应的线图

定义1-2-5 边列中一个顶点的度，指的是在与此边列对应的线图中该顶点的度。

例如，在边列 ($a\ d\ g\ f\ c\ e$) 中，顶点C的度是 2，顶点E的度是 4。

如果一个开边列具有这样的性质：除了始点和终点外，每一个顶点的度均为 2，而始点和终点的度为 1，则称此边列中所有边的集合为始点和终点间的一条路径。

定义1-2-6 顶点p和q之间的一条路径，是一个满足以下条件的开边列中所有边的集合：(1) 其始点和终点分别为p和q；(2) 除p和q外，每一个顶点的度为 2，而p和q的度为 1。

例如，在图1-2-2中，边列($a\ d\ e$)的所有边的集合是顶点A和D之间的一条路径，而边列($a\ d\ g\ f\ c\ e$)中所有边的集合

不是一条路径。

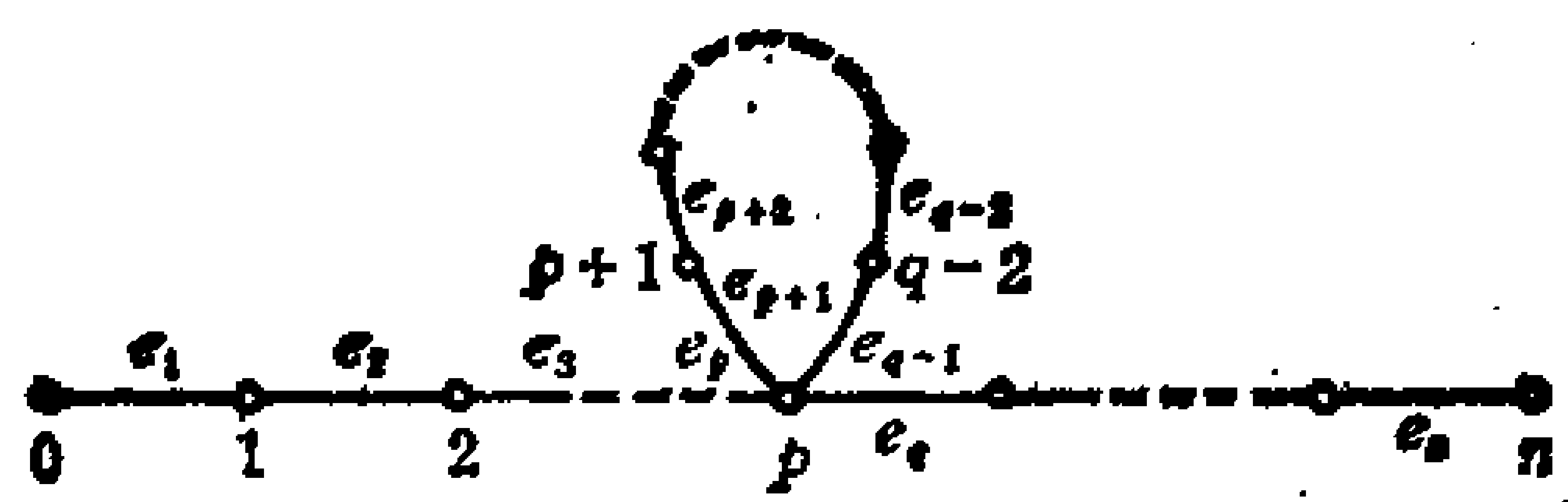


图1-2-4　与边列$(e_1e_2\cdots e_n)$对应的线图

设一个边列为$(e_1e_2\cdots e_n)$，如图1-2-4所示。假定这个边列中所有边的集合不是介于顶点0和n之间的一条路径，则由路径的定义可知，必至少有一个顶点的度大于2。设顶点p是一个度大于2的顶点。假定这个边列中以p为端点的第一条边是e_p，而以p为端点的最后一条边是e_q，如图1-2-4所示，则可看出，序列$(e_1e_2\cdots e_pe_q\cdots e_n)$是一个边列。在此边列中，顶点$p$的度是2。为了方便，如果边列$T$的每一条边都在边列$U$中，并且$T$和$U$是不同的，则称边列$T$是边列$U$的真子边列。用这样的术语来说，$(e_1e_2\cdots e_pe_qe_{q+1}\cdots e_n)$就是$(e_1e_2\cdots e_n)$的真子边列。并且，为得到这个子边列而删去的那些边，形成了一个闭边列$(e_{p+1}e_{p+2}\cdots e_{q-2}e_{q-1})$。因此，一个不构成路径的开边列可以分解为两部分，一部分是一个闭边列；另一部分是一个开边列，它与原来的开边列具有相同的起点和终点，并且原边列的每一条边都必然在且只能在这两个新边列之一中。

如果边列$(e_1e_2\cdots e_pe_q\cdots e_n)$中还有度超过2的顶点，我们可以采用同样的方法，得到一个真子列，使该顶点在此真子列中的度减少到2。如此类推，最后我们可以得到一个开边列，其始点和终点与原边列相同，而这一边列中所有边的集合是一条路径。这样，就得到定理1-2-1。

定理1-2-1　设一个开边列的始点为p，终点为q。如果这

个开边列中所有边的集合不是顶点 p 和 q 之间的一条路径，则可将此边列分解为一个开边列和一些闭边列，使得：（1）原来边列的每一条边恰在这些边列之一中；（2）所得开边列中所有边的集合是顶点 p 和 q 之间的一条路径。

例如，在图 1-2-2 中，开边列（$a\ d\ g\ f\ c\ e$）可以分解为一个开边列（$a\ d\ e$）和一个闭边列（$g\ f\ c$）。注意，开边列（$a\ d\ e$）中所有边的集合是A和D之间的一条路径。

定义1-2-7 如果线图G'仅由属于线图G的边和顶点组成，则称G'是G的子图。如果子图G'与G不相同，则称G'是G的真子图。

例如，我们看图1-2-2中的线圈G和图1-2-5(a)，(b)中的线图G'，G''。线图G'是G的真子图，但G''不是G的子图，因为G''的边 h 不在G中。

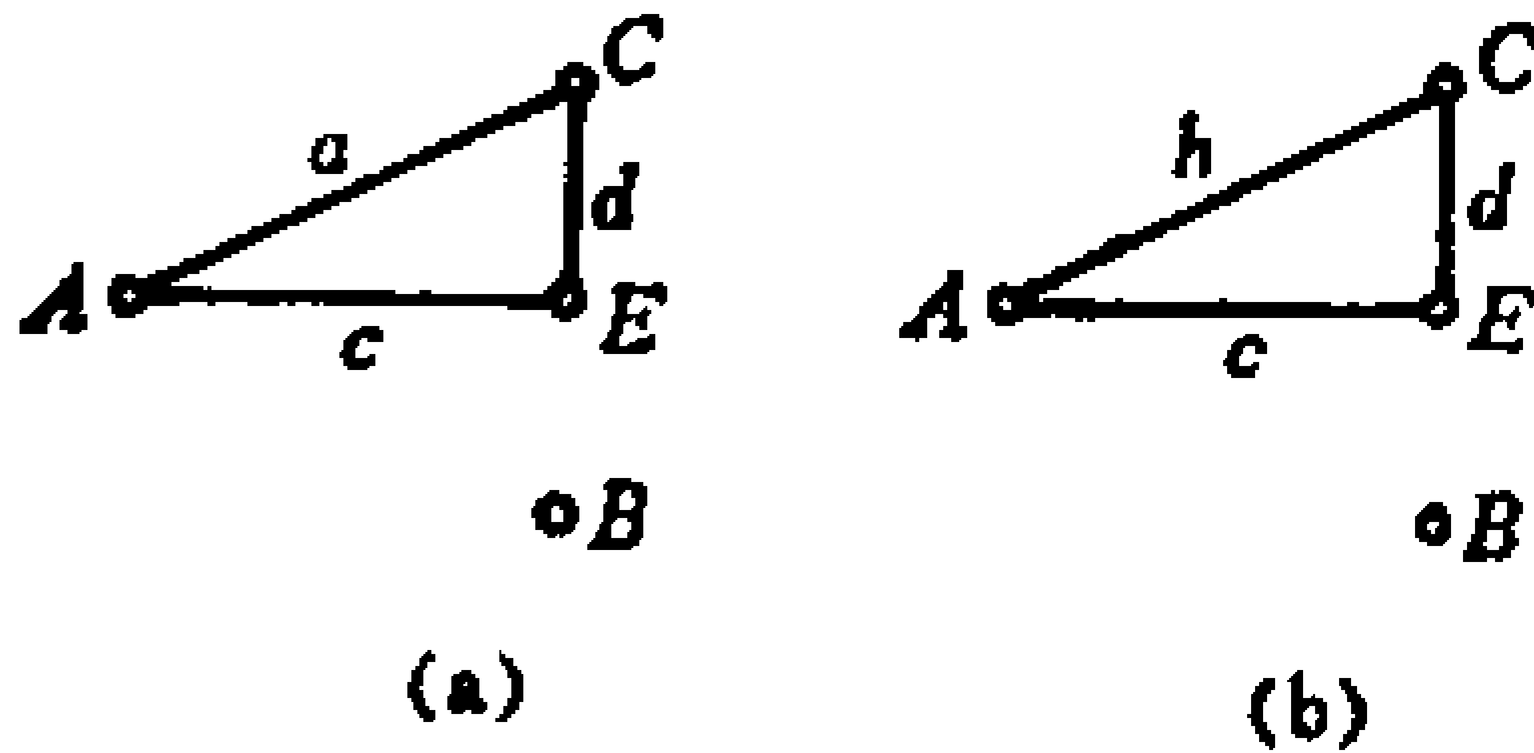


图1-2-5

(a)线图G'；　(b)线图G''

定义1-2-8 度为零的顶点称为孤立点。

在许多场合，把边的一个集合看作一个线图是方便的。相反，也有这样的情况，把一个线图当作一个边的集合，更方便些。因此，我们有如下定义。

定义1-2-9 由一个边集合的所有边，以及作为这些边的端点的所有顶点构成的线图，叫做与这个边集合对应的线图。一个线图的所有边的集合，叫做与这个线图对应的边集合。

当我们把一个边集合当作线图来对待时，也就是在考虑与这个边集合对应的线图。例如，根据定义，路径是边的一个集合。但是，我们常常把一条路径看作一个线图。相反，当我们把一个线图当作一个边集合时，也就是在考虑与这个线图对应的边集合。要注意的是，如果一个线图包含孤立点，与这个线图对应的边集合不能表明孤立点的存在。因此，通常只把那些不包含孤立点的图当作边集合对待。例如，若把图 1-2-2 中的线图看作边集合（a，b，c，d，e，f，g），就不能提供关于这个线图顶点的任何信息。

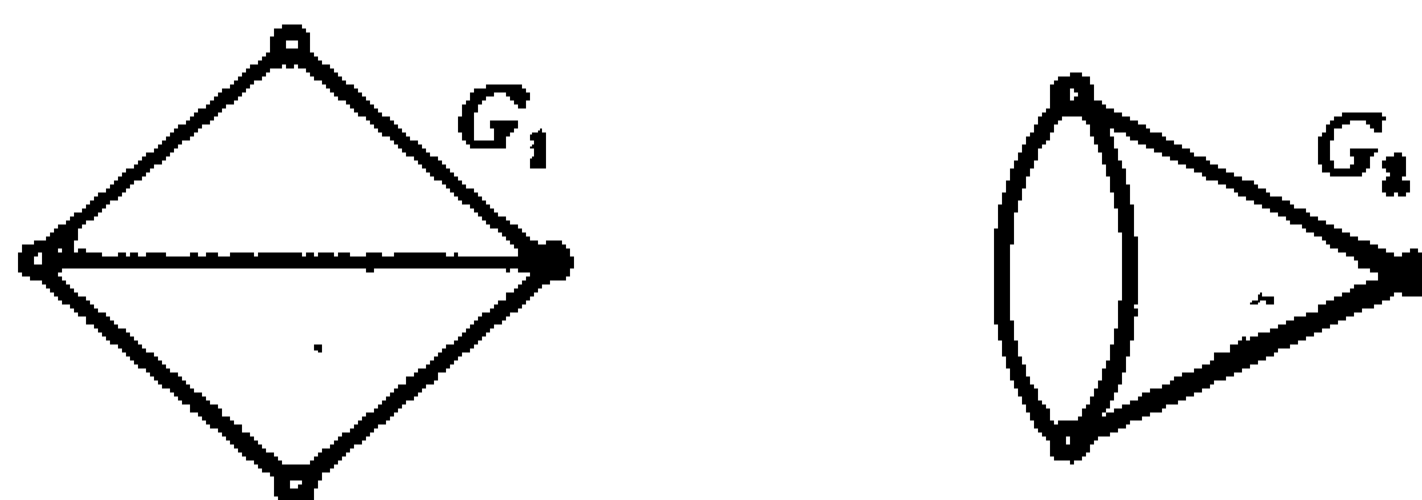


图1-2-6　包含两个子图G_1和G_2的线图

图1-2-6所示的线图由两个子图G_1和G_2组成。我们注意到，在G_1的一个顶点和G_2的一个顶点之间，没有连接的边。因此，G_1的一个顶点和G_2的一个顶点之间没有路径。这样的线图叫做分离线图。

定义1-2-10　如果一个线图中存在两个顶点，在它们之间没有路径，则说此线图是分离的，或称为分离图。如果一个线图不是分离的，则说它是连通的，或称为连通线图。

图 1-2-2 中的线图是连通的，因为其中任何两个顶点之间都有路径。有一种特殊的连通子图称为回路，是一种重要的子图。我们将在后面研究回路的性质。不过，现在给出回路的定义比较方便。

定义1-2-11　如果一个连通线图中每一个顶点的度都是 2，则称此线图为回路。

从这个定义可以看出，如果一个闭边列中每一个顶点的度都

是2，那么这个闭边列的所有边的集合是一个回路。例如，在图1-2-2中，闭边列（$a\ c\ d$）中所有边的集合是一个回路，而闭边列（$f\ g\ e\ b\ d\ c$）中所有边的集合不是回路（这里把回路看作边的集合，见定义1-2-9）.设T是一个闭边列，T中所有边的集合不是一个回路。用前面分解开边列所用的方法，容易证明，T可以分解为若干闭边列T_1，$T_2\cdots$，使得：（1）T中每一条边正好在$T_1,T_2,\cdots$之一中；（2）在$T_1,T_2,\cdots$中，每一个闭边列的所有边的集合是一个回路。下面，我们来定义回路的无重边并。

定义1-2-12 在一个回路的集体中，如果任何两个回路都没有公共边，则称此集体为回路的无重边并（集）（*edge disjoint union of circuits*）。

现在我们可以说，一个闭边列中所有边的集合，或者是一个回路，或者是一个回路的无重边并。例如，在图1-2-2中，边列（$f\ g\ e\ b\ d\ c$）中所有边的集合不是一个回路，而是回路（$f\ g\ c$）和（$b\ d\ e$）的无重边并。可能有这样的边集合，它分解成回路的方法不是唯一的。但是，如果至少有一种方法，可以把这个集合分解成若干回路，其中任何两个都没有公共边，则此边集合就是回路的无重边并.例如，图1-2-7中边集合（a,b,c,d）是回路的无重边并，而图1-2-8中边集合（a,b,c,d,e）不是回路的无重边并。

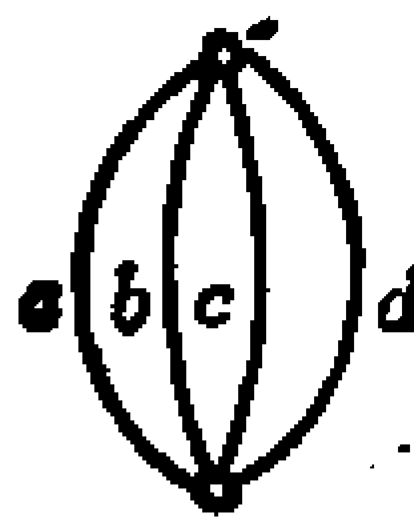


图1-2-7 回路的无重边并

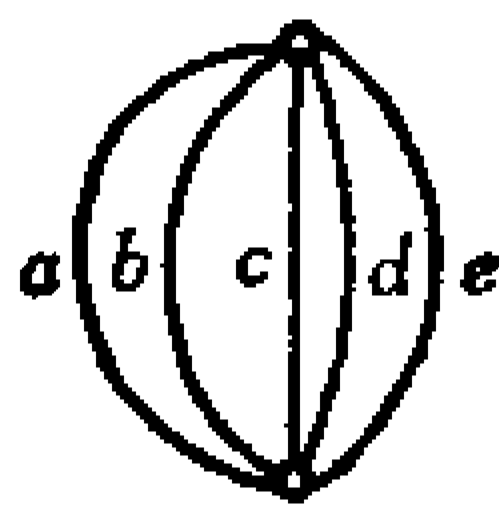


图1-2-8 线图

设G_1和G_2是一个线图的两个子图，并设它们没有孤立点。把G_1和G_2都看成集合，我们就可以采用运算，比如∪（并），∩

（交），⊕（环和），－（减）等。也就是：

$G_1\cup G_2$：G_1或G_2中所有的边组成的线图。

$G_1\cap G_2$：既在G_1中又在G_2中的边（通常叫做G_1和G_2的公共边）的全体组成的线图。

G_1-G_2：从G_1中删去那些也属于G_2的边得到的子图。

$$G_1\oplus G_2=(G_1\cup G_2)-(G_1\cap G_2)\equiv(G_1-G_2)\cup(G_2-G_1) \tag{1-2-3}$$

其中"≡"表示恒等。

例1-2-1 在图1-2-9中，两个线图G_1和G_2如（1）所示；

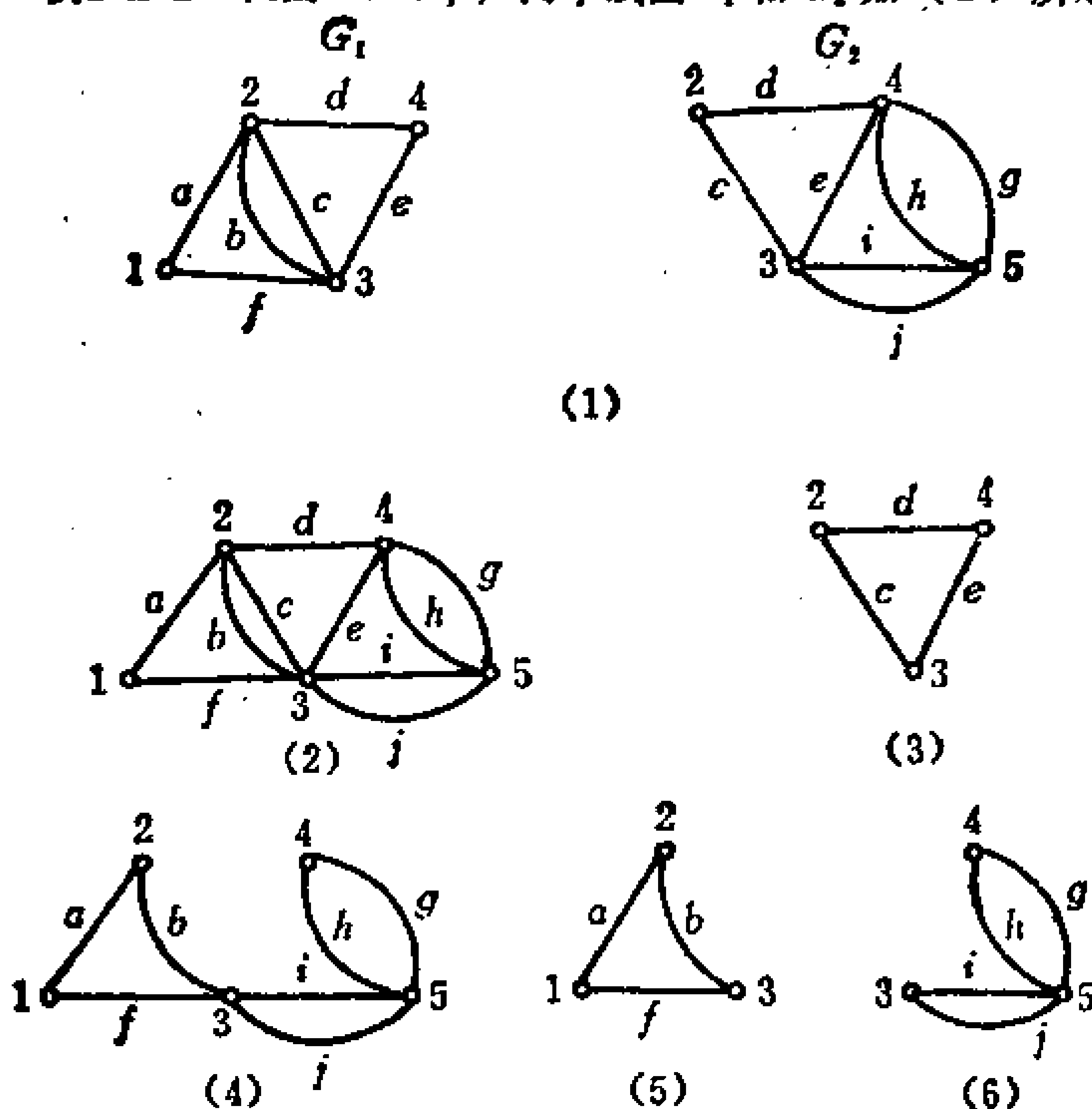


图1-2-9 线图和运算

（1）G_1和G_2；（2）$G_1\cup G_2$；（3）$G_1\cap G_2$；

（4）$G_1\oplus G_2$；（5）G_1-G_2；（6）G_2-G_1

G_1和G_2的并用$G_1\cup G_2$表示，如（2）所示，这里要注意，我们是把集合$G_1\cup G_2$看作一个线图，以便用图形将它表示出来；G_1和G_2的交记作$G_1\cap G_2$，如（3）所示；G_1和G_2的环和记作$G_1\oplus G_2$，如（4）所示；从G_1中减去G_2，记作G_1-G_2，如（5）所示；而G_2-G_1如（6）所示。

1-3 欧拉图

假定在一个线图G中，每一条边代表一条公路。如果有这样一个闭边列，它包含了G中每一条边，那么这个闭边列就表示一条连续的路线，它正好经过每条公路一次，最后回到出发点。哪一种线图中才有这样的闭边列呢？

在上一节里，我们已经发现，一个闭边列或者是一个回路，或者是回路的无重边并。因此，如果一个连通线图是一个回路，或者是回路的无重边并，就有一个包含此线图所有边的闭边列。那么，怎样才能检验一个连通线图是不是回路或回路的无重边并呢？例如，图 1-3-1 中的线图是一个回路或回路的无重边并吗？当然，要回答这个问题，一种方法是通过实际试验，在所给线图中找出一个包含其所有边的闭边列。这里，我们要研究另一种方法，它只需要检查顶点的度，就可以回答上面的问题。为此，我们定义欧拉图如下。

定义1-3-1 如果一个线图的每一个顶点的度都是偶数，则称此线图为欧拉图。

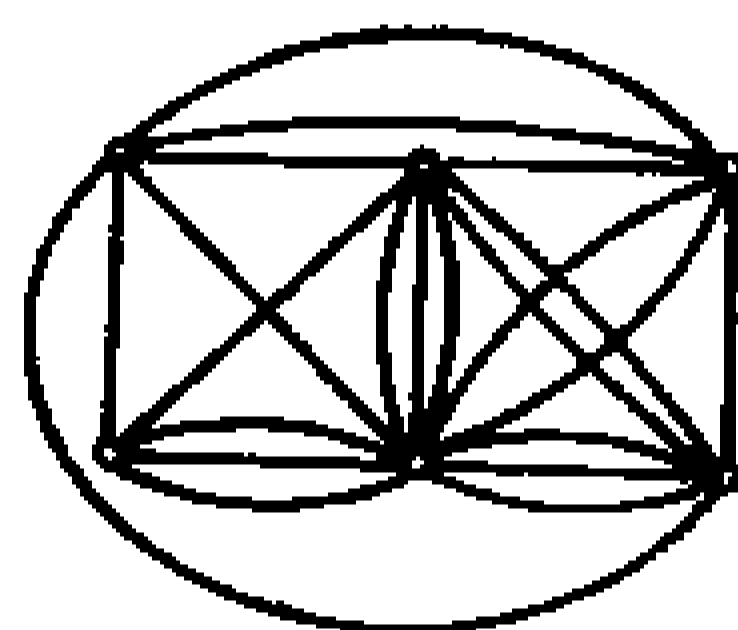


图1-3-1 一个线图

因为回路是由度为 2 的顶点构成的，所以回路是欧拉图。我们来考虑回路的无重边并。假定顶点v至少位于这些回路之一中，由于每一条边只能在一个回路中，故顶点v的度等于包含v

的回路数的两倍。因此顶点 v 的度是偶数。这个结论适用于回路的无重边并中任何一个顶点.所以回路的无重边并是一个欧拉图.

定理1-3-1 一个闭边列中所有边的集合是一个欧拉图.

我们来说明这个定理的逆命题。也就是说，我们希望了解，是否存在由欧拉图的所有边组成的一个闭边列.显然，如果一个欧拉图是分离的，就不存在这样的闭边列.因此，我们假设所给的欧拉图 E 是连通的。由于欧拉图 E 的每一个顶点的度都是偶数，故与任一顶点连接的边至少有两条。因此，从任一顶点出发，都可以找到一个闭边列。设这个闭边列中所有边的集合是 E_1.注意，E_1 是一个欧拉图。显然 $E-E_1$ 也是一个欧拉图。于是，只要 $E-E_1$ 不是空集，我们就可以在 $E-E_1$ 中找出另一个闭边列。设这个闭边列中所有边的集合是 E_2，则 $E-E_1-E_2$ 仍然是一个欧拉图。如此类推，可以得到欧拉图 E_1，E_2，$\cdots$，E_n 的一个集合，使得 E 的每一条边正好在 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 之一中（见例1-3-1）。

现在，我们把这些闭边列 $E_1,E_2\cdots,E_n$ 按如下方法结合在一起：从 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 中任取一个，比如说 E_1.由于 E 是连通的，在 $E_2,E_3,\cdots,E_n$ 中至少存在一个 E_p，使得 $E_1\cup E_p$ 是连通的。这就是说，至少存在一个顶点，它既在 E_1 中，又在 E_p 中。设 v 是既在 E_1 中，又在 E_p 中的一个顶点。我们注意到，如果 $T=(e_1e_2\cdots e_p\cdots e_r)$ 是一个闭边列，那么对任一条边 e_p 来说，$(e_pe_{p+1}\cdots e_re_1e_2\cdots e_{p-1})$ 也是一个闭边列。因此，T 中任一顶点都可以作为这个闭边列的始点。由于假设 v 既在 E_1 中，又在 E_p 中，我们可以把 v 作为闭边列 E_1 和 E_p 的公共始点。设闭边列 E_1 和 E_p 分别为 $(e_1e_2\cdots e_m)$ 和 $(f_1f_2\cdots f_n)$，它们都以 v 为始点，则 $(e_1e_2\cdots e_mf_1f_2\cdots f_n)$ 是一个由 $E_1\cup E_p$ 的所有边组成的闭边列. 此外，在 $E_2,E_3,\cdots,E_{p-1},E_{p+1},\cdots,E_n$ 中，必至少存在一个欧拉图 E_q，使得 $E_1\cup E_p\cup E_q$ 是连通的。如此类推，最后可以得到一个由所给欧拉图 E 的所有边组成的闭边列。这样就证明了，对于一个连通

的欧拉图来说，存在一个包含该欧拉图的所有边的闭边列。

定理1-3-2 一个线图是连通的欧拉图，当且仅当存在一个由该线图的所有边组成的闭边列。

例1-3-1 设图1-3-2(a)是一个给定的欧拉图E。假定我们从顶点1出发，得到一个闭边列（$a\ b\ g\ e$），则$E-E_1$如图1-3-2(b)所示，其中$E_1=(a,b,g,e)$。假定我们从$E-E_1$中，

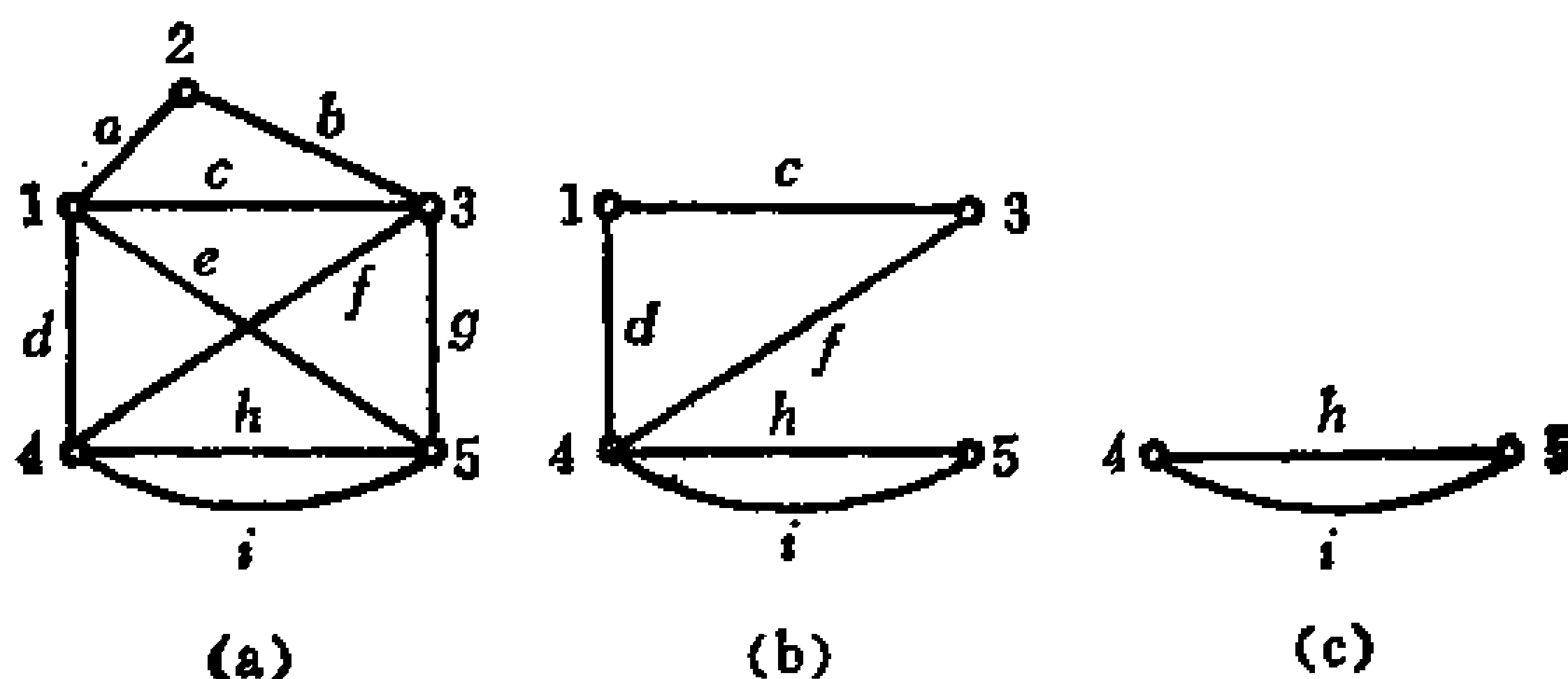


图1-3-2 欧拉图E及子图

(a)欧拉图E (b)$E-E_1$ (c)$E-E_1-E_2$

又组成一个闭边列（$c\ d\ f$），则$E-E_1-E_2$就如图1-3-2(c)所示，其中$E_2=(c,d,f)$。最后一个闭边列是（$h\ i$）。现在来找出我们所要求的，由E中所有边构成的闭边列。$E_1\cup E_2$是连通的，因此至少有一个顶点既在E_1中，又在E_2中。我们取这样一个顶点3。然后，可以将闭边列E_1转动成（$g\ e\ a\ b$），使顶点3变成它的始点。注意，（$c\ d\ f$）的始点也是顶点3。于是我们可以把它们结合成（$g\ e\ a\ b\ c\ d\ f$），从而得到一个由$E_1\cup E_2$中所有边组成的闭边列。类似地，取顶点5作为$E_1\cup E_2$和$E_3=(h\ i)$的公共顶点，将（$g\ e\ a\ b\ c\ d\ f$）转成（$e\ a\ b\ c\ d\ f\ g$），使这个闭边列的始点变成顶点5，即可把（$e\ a\ b\ c\ d\ f\ g$）与（$h\ i$）结合成（$h\ i\ e\ a\ b\ c\ d\ f\ g$），这就是所求的闭边列。

通常，一个线图可以以若干个欧拉图为其子图．例如，图1-3-2所示线图的子图，不仅有$E_1=(a,b,e,g)$，$E_2=(c,d,f)$，$E_3=(h,i)$，还有另外几个欧拉图，如$E_4=(a,b,c)$，$E_5=(c,e,g,h,i)$，$E_6=(c,e,g)$，也是它的子图。欧拉图有一个重要的性质，既它们构成一个阿贝尔群。因此，一个线图中所有的欧拉图，可以由几个称为生成元的欧拉图的组合算出。为了说明这一点，我们来考查两个欧拉图的环和。

设欧拉图E_1和E_2是同一线图的两个子图．考虑线图$E_1 \oplus E_2$，其中$E_1 \neq E_2$。为了确定$E_1 \oplus E_2$中每一个顶点的度，我们设e_{11}，$e_{12}, \cdots, e_{1r}$是E_1中与顶点p关联的边，又设e_{21}，e_{22}，$\cdots$，e_{2s}是E_2中与顶点p关联的边。不失一般性，设$e_{11}=e_{21}$，$e_{12}=e_{22}, \cdots$，$e_{1t}=e_{2t}$，而e_{1t+1}，e_{1t+2}，$\cdots$，e_{1r}和e_{2t+1}，e_{2t+2}，$\cdots$，e_{2s}都不相同．因此，在$E_1 \oplus E_2$中，只有边e_{1t+1}，e_{1t+2}，$\cdots$，e_{1r}，e_{2t+1}，e_{2t+2}，$\cdots$，e_{2s}与顶点p关联。这样，在$E_1 \oplus E_2$中，顶点p的度是$r+s-2t$．因为E_1和E_2是欧拉图，故r和s是偶数，所以$r+s-2t$是偶数。对于$E_1 \oplus E_2$中每一个顶点的度，这个结论都成立，因此$E_1 \oplus E_2$是一个欧拉图。例如，图1-2-9(1)中的G_1和G_2是欧拉图，图1-2-9(4)中的$G_1 \oplus G_2$也是一个欧拉图。

我们把空集（记作ϕ）定义为一个欧拉图。这样，要使$E_1 \oplus E_2$是欧拉图，就不必再规定$E_1 \neq E_2$了。注意，空集是一个不含边的线图。因此，我们得到定理1-3-3。

定理1-3-3　设E_1和E_2是一个线图中的两个欧拉图，则$E_1 \oplus E_2$是一个欧拉图。

把这个定理推广，就得到定理1-3-4。

定理1-3-4　设$E_p(p=1,2,\cdots,n)$是一个线图中的n个欧拉图，则$E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_n$是一个欧拉图。

为了方便，我们定义符号$\{E\}$如下。

定义1-3-2　符号$\{E\}$表示一个线图的子图中所有欧拉图的

集体.

由定理1-3-3和1-3-4可以看出，集体$\{E\}$满足以下条件：

1.若E_i和E_j在$\{E\}$中，则$E_i \oplus E_j = E_j \oplus E_i$在$\{E\}$中。

2.存在$E_0(=\phi)$，使得对于$\{E\}$中任何E_i，都有

$$E_0 \oplus E_i = E_i$$

3.对$\{E\}$中任一E_i，

$$E_i \oplus E_i = E_0$$

4.对$\{E\}$中任何E_i，E_j和E_k，

$$E_i \oplus (E_j \oplus E_k) = (E_i \oplus E_j) \oplus E_k$$

这样，就导出了定理1-3-5.

定理1-3-5 一个线图中的集体$\{E\}$，在环和运算下是一个阿贝尔群。

这个定理表明，在$\{E\}$中存在若干生成元，$\{E\}$中所有的欧拉图都可以由这些生成元的环和得到。

例1-3-2 考虑图1-3-3所示的线图。由E_1，E_2和E_3所组成的生成元集合如图1-3-4所示。

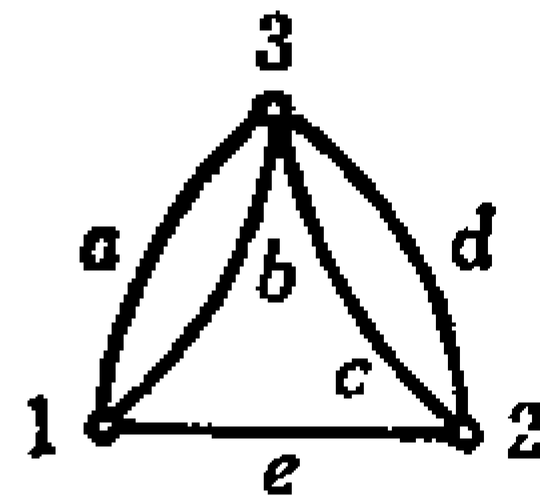


图1-3-3 一个线图

由这个生成元集合，可以得到其余所有的非空欧拉图：

$$E_1 \oplus E_2 = E_7$$

$$E_1 \oplus E_3 = E_4$$

$$E_2 \oplus E_3 = E_6$$

$$E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 = E_5$$

关于$\{E\}$的性质，以及如何得到$\{E\}$中生成元的集合，将在

以后研究。这里只需注意一点，就是存在一种生成线图中所有欧拉图的简单算法。

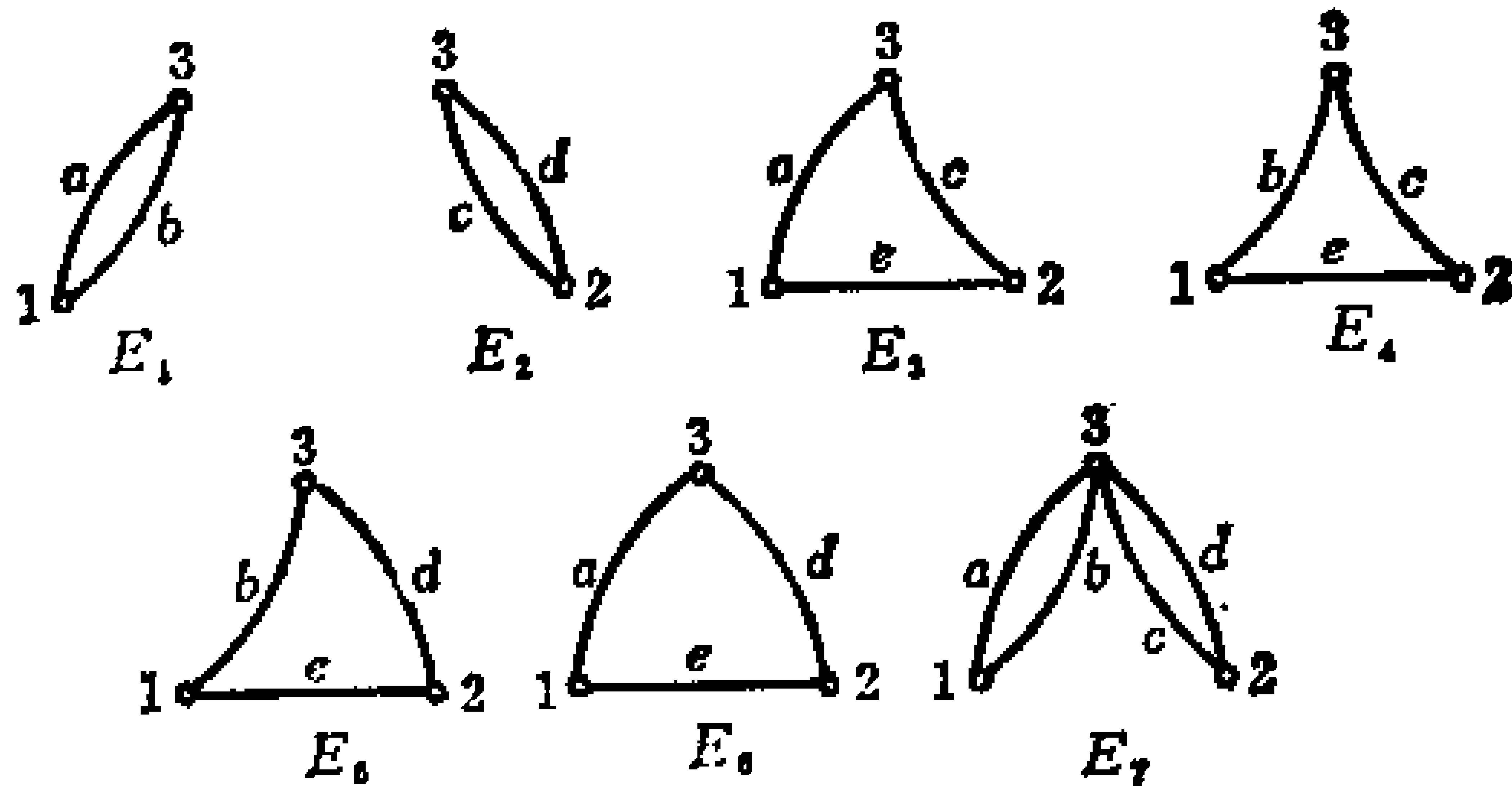


图1-3-4　图1-3-3中线图的$\{E\}$

为了讨论分离的欧拉图，我们定义"最大连通子图"如下。

定义1-3-3　设$g_1, g_2, \cdots, g_\rho$是线图G的ρ个连通子图（根据定义，一个孤立点也是一个连通子图），且G的每条边和每个顶点恰好含于这些子图之一中，则连通子图$g_1, g_2, \cdots, g_\rho$的集合就是G的最大连通子图集合（*set of maximal connected subgraphs*）.称数ρ为线图G的最大连通子图数。

应该注意的是，对于任何两个不同的最大连通子图g_r和g_s来说，$g_r \cup g_s$是分离的。例如，在图1-3-5(a)所示的线图中，有五个最大连通子图，如图1-3-5(b)所示，因此$\rho = 5$．不难看出，如果一个线图G是连通的，就只有一个最大连通子图。因此可以说，一个线图是连通的，当且仅当$\rho = 1$。

我们已经知道，一个闭边列中所有边的集合是一个回路或回路的无重边并。并且，我们还知道，对于任何一个连通的欧拉图，都存在一个包含其所有边的闭边列。此外，欧拉图的每一个最大连通子图显然仍是一个欧拉图。

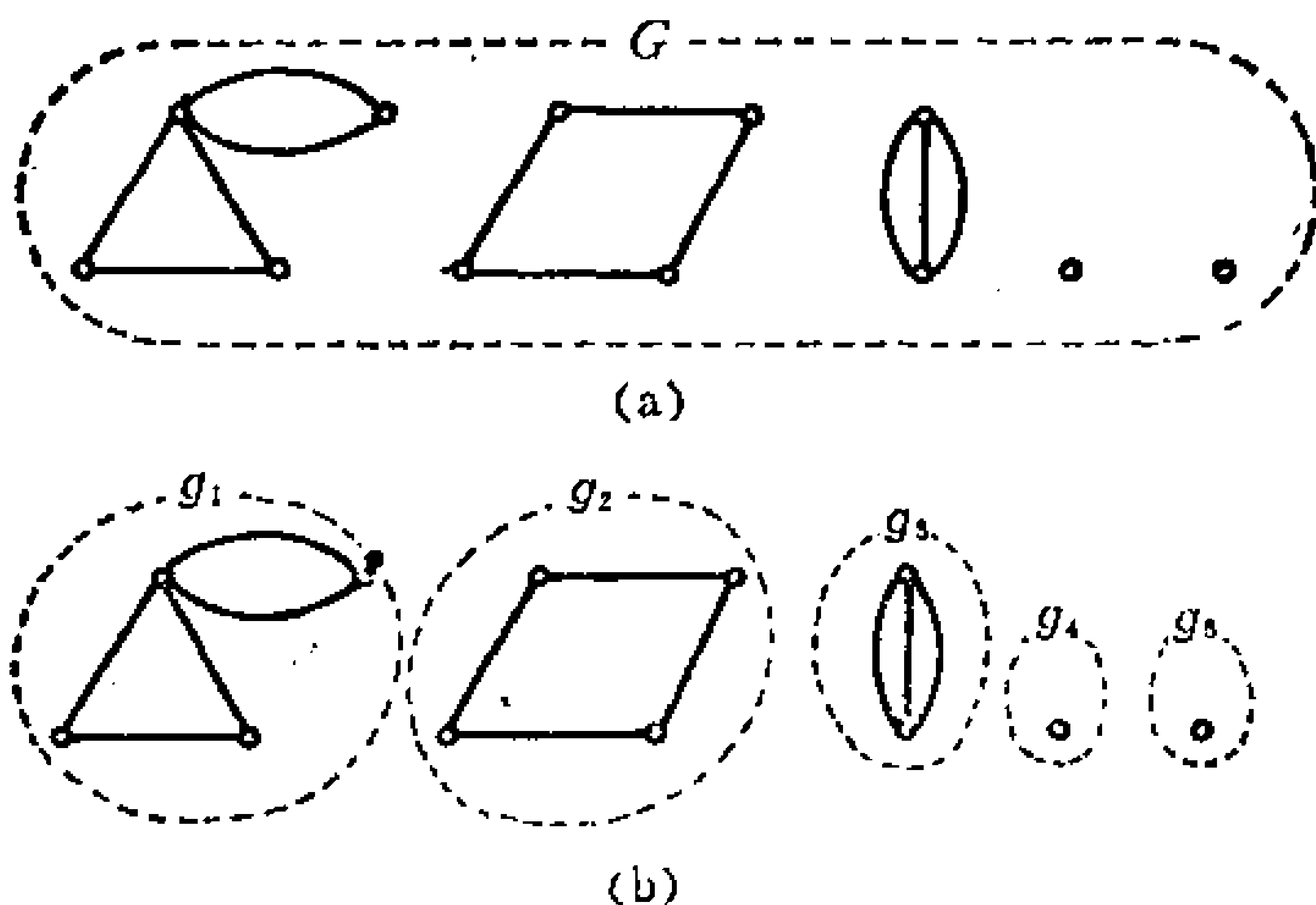


图1-3-5　最大连通子图

(a)线图G；　(b)G的最大连通子图

定理1-3-6　任一欧拉图或者是一个回路，或者是回路的无重边并，而集体$\{E\}$是一个线图中所有的回路，回路的无重边并以及空集的集体。

下面，我们来考查一对顶点之间的路径的某些性质。前面说过，在一条路径中，除始点和终点外，每一个顶点的度都是2，而始点和终点的度是1．下面的定理给出了路径的一个重要性质。

定理1-3-7　若P_1和P_2是同一对顶点之间的两条路径，则$P_1 \oplus P_2$是一个欧拉图。

证明：　设P_1和P_2是线图G中顶点i和j之间的两条路径。我们在线图G中，加进一条以顶点i和j为端点的边y，构成一个新的线图G'．注意，P_1和P_2也是G'中的路径。现在来考虑$P_1 \cup (y)$和$P_2 \cup (y)$．$P_1 \cup (y)$是P_1中所有的边和边y的集合，

$P_2 \cup (y)$是P_2中所有的边和边y的集合，显然它们都是欧拉图。由定理1-3-3知，这两个集合的环和

$$[P_1 \cup (y)] \oplus [P_2 \cup (y)] = P_1 \oplus P_2 \qquad (1\text{-}3\text{-}1)$$

是一个欧拉图。因为$P_1 \oplus P_2$的所有边都在G中，所以$P_1 \oplus P_2$是G中的一个欧拉图。 （证毕）

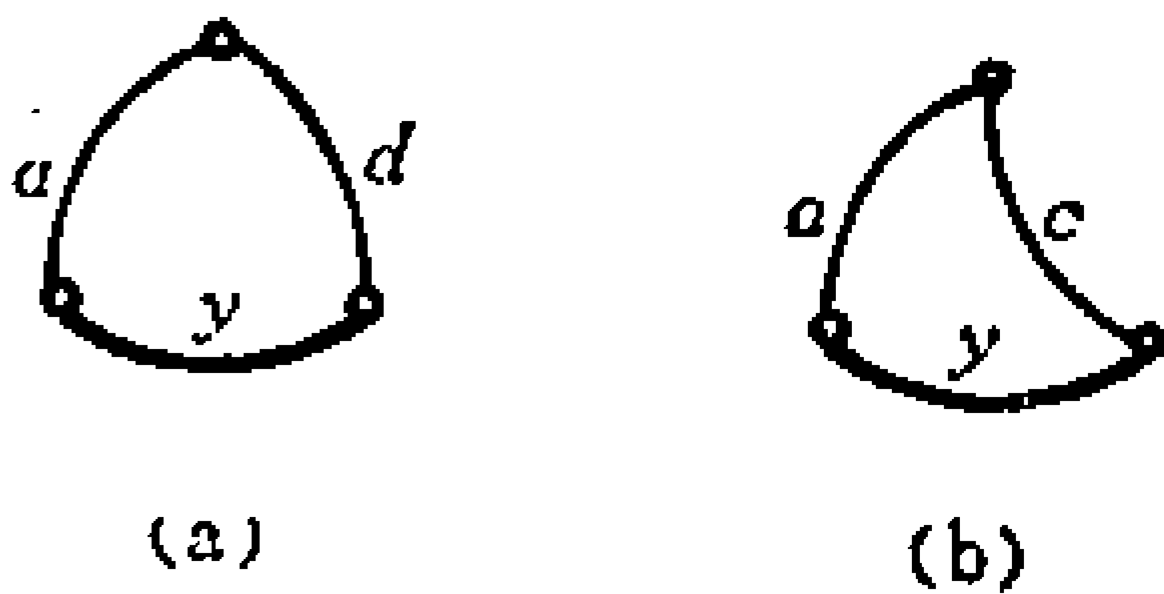


图1-3-6 线图

(a) $P_1 \cup (y)$, (b) $P_2 \cup (y)$

例如，在图1-3-3所示的线图G中，设$P_1 = (a, d)$，$P_2 = (a, c)$，则$P_1 \cup (y)$和$P_2 \cup (y)$如图1-3-6(a)和(b)所示。我们注意到，它们都是欧拉图，边y不在G中，而$P_1 \oplus P_2 = (c, d)$是G中的欧拉图。

把上面这个定理推广，就得到定理1-3-8。

定理1-3-8 若$P_r (r = 1, 2, \cdots, 2k)$是同一对顶点间的$2k$条路径，则$P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_{2k}$是一个欧拉图。

证明： 我们有

$$P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_{2k}$$
$$= (P_1 \oplus P_2) \oplus (P_3 \oplus P_4) \oplus \cdots \oplus (P_{2k-1} \oplus P_{2k})$$

由定理1-3-7知，$P_{i-1} \oplus P_i$是一个欧拉图，又据定理1-3-3，若干个欧拉图的环和是一个欧拉图，因此等式右边是一个欧拉图。 （证毕）

例1-3-3 在图1-3-3所示的线图中，顶点1和2之间所有可

能的路径如图1-3-7所示。我们得到

$$P_1 \oplus P_2 = E_8$$
$$P_2 \oplus P_3 = E_7$$
$$P_3 \oplus P_4 = E_1$$
$$P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 = E_5$$

其中E_8，E_7，E_1，E_5如图1-3-4所示。但 $P_1 \oplus P_2 \oplus P_3$ 与所给的线图相同，它不是一个欧拉图。

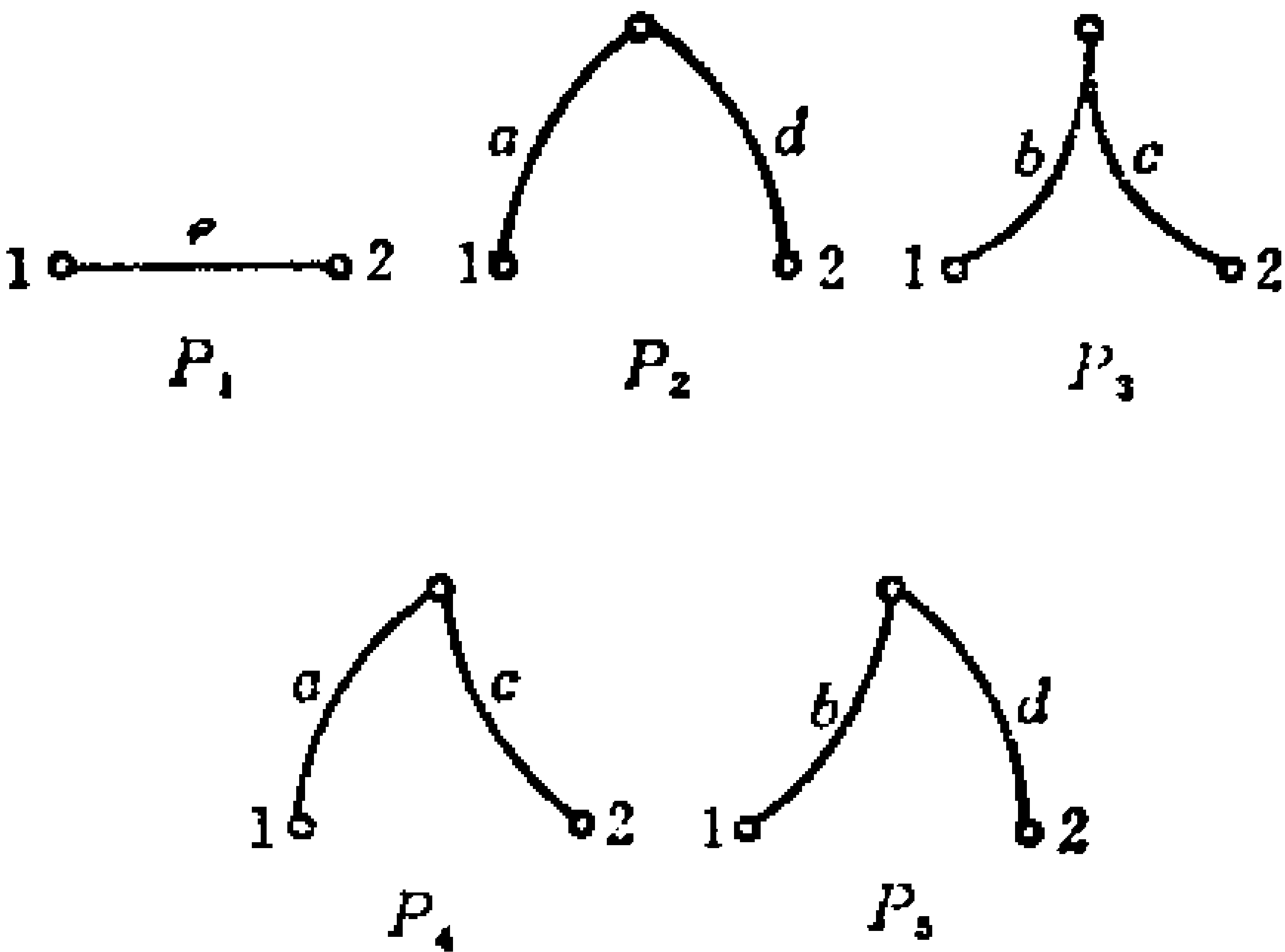


图1-3-7 顶点 1 和 2 之间的路径

1-4 *M* 图

我们已经知道，在两个指定顶点间的两条路径的环和是一个欧拉图。但是，一条路径和一个欧拉图的环和不一定是一条路径。因此，在环和运算下，所有的欧拉图以及两个指定顶点之间的所有路径组成的集体不一定构成一个群。这就说明，要得到两个指定顶点之间的所有路径，比上节所说的生成$\{E\}$中所有的欧

拉图要困难得多。这里，我们引进M图，以使所有的欧拉图与两指定顶点间的M图的集体在环和运算下构成一个阿贝尔群。此外，我们还将看到，两指定顶点间所有路径的集体，包含在同一对顶点间所有M图的集体之中。

设M，P和E都是一个线图的子图，其中P是顶点i和j之间的一条路径，E是一个欧拉图，而M等于$P\oplus E$. 现在我们来证明，在M中除顶点i和j外，每一个顶点的度都是偶数。而顶点i和j的度是奇数。

在所给的线图G中，加上一条以i和j为端点的边y，设所得的新线图是G'. 由于y是新加进的边，G中的欧拉图E不包含y，所以边y是在$[P\cup(y)]\oplus E$之中。容易看出，$P\cup(y)$是G'中的一个欧拉图。据定理1-3-3，$[P\cup(y)]\oplus E$是一个欧拉图。因此，$[P\cup(y)]\oplus E$中每一个顶点的度都是偶数。从$[P\cup(y)]\oplus E$中删去y，就得到$P\oplus E=M$. 由于y的删除，使得顶点i和j的度$d(i)$和$d(j)$各减少了1，而不影响其余顶点的度。因此，我们可以断定，M中除了两个顶点外，其余顶点的度都是偶数。我们称这样的线图为M图。

定义1-4-1 如果一个线图恰有两个顶点的度为奇数，则称此线图为M图。这两个度为奇数的顶点称为M图的端点。

设i和j是一个M图中两个度为奇数的顶点.在此M图中，加进一条以i和j为端点的新边。于是每一个顶点的度都变成了偶数，从而得到一个欧拉图。因此，一个M图可以看作是从一个欧拉图中删去一条边得到的。M图的性质之一如下。

定理1-4-1 *存在包含一个连通M图的所有边的开边列。*

证明： 设M是一个连通的M图，i和j是它的两个端点。设y是一条以i和j为端点而不在M中的边，则$M\cup(y)$是一个连通欧拉图。由于在一个连通欧拉图中，存在一个由它的所有边组成的闭边列，设在$M\cup(y)$中，$(e_1e_2\cdots e_n)$就是这样一个闭边

列，则 y 在此边列里。不失一般性，设 y 在边列中位于 e_p 和 e_{p+1} 之间，即设此边列为 $(e_1e_2\cdots e_pye_{p+1}\cdots e_n)$。转动此边列，使 y 变成它的第一条边，即成为 $(ye_{p+1}\cdots e_ne_1e_2\cdots e_p)$。然后删去 y，所得的序列 $(e_{p+1}\cdots e_ne_1e_2\cdots e_p)$ 就是一个包含 M 中所有边的开边列。（证毕）

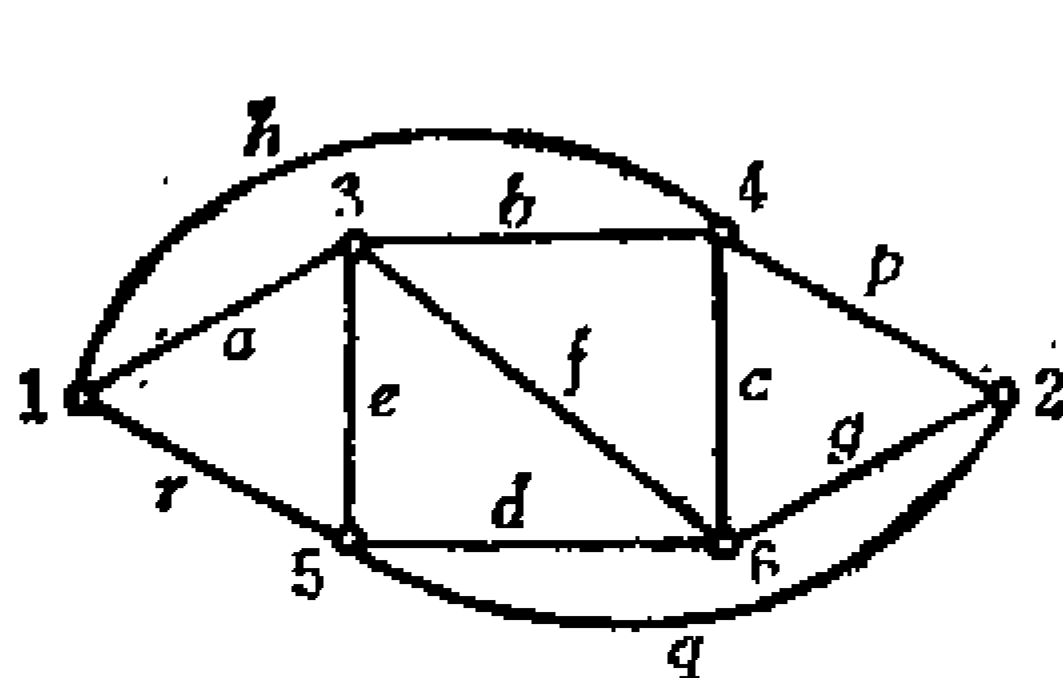


图1-4-1　M 图 M

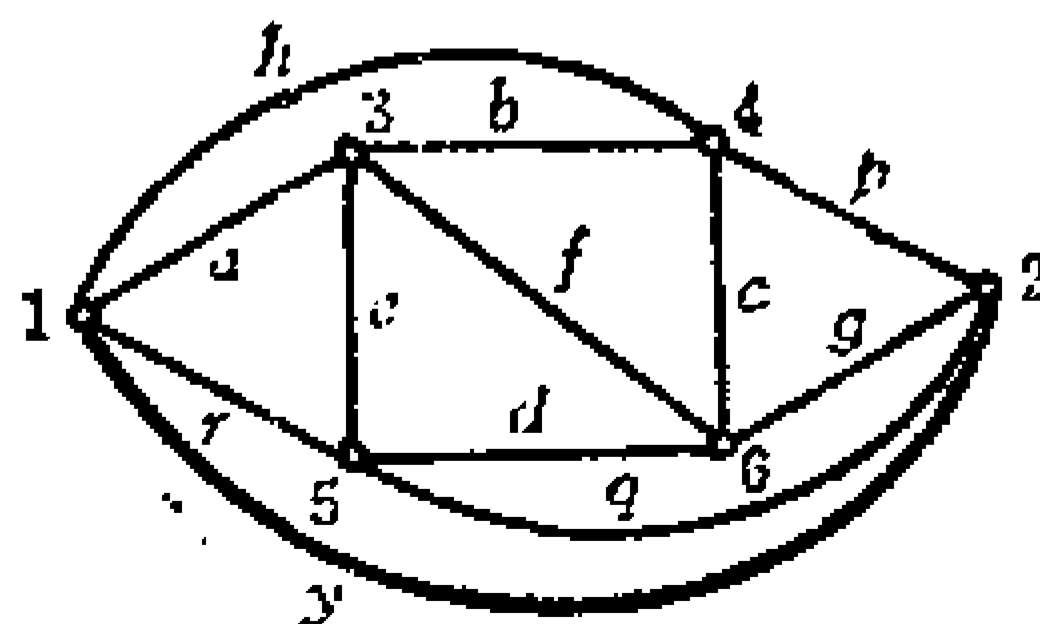


图1-4-2　欧拉图 $M\cup(y)$

例1-4-1　考虑图1-4-1中的M图。显然它的端点是顶点 1 和 2。加进一条以 1 和 2 为端点的边 y，所得的图如图1-4-2所示，它显然是一个欧拉图。于是可得到一个闭边列（$a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ y\ h\ p\ q\ r$），它是由 $M\cup(y)$ 中所有的边组成的。转动这个边列，得到（$y\ h\ p\ q\ r\ a\ b\ c\ d\ e\ f\ g$）。然后删去 y，所得的序列（$h\ p\ q\ r\ a\ b\ c\ d\ e\ f\ g$）就是由 M 中所有的边组成的一个开边列。

定义1-4-2　如果一个边集合可以分解为一条路径和一个回路的无重边并，使得这条路径和这个回路的无重边并没有公共边，则称这个边集合为一条路径和若干回路的无重边并（集）(edge disjoint union of a path and circuits)。

例如，在图1-4-1中，M 图 M 的所有边的集合（a,b,c,d,e,f,g,h,p,q,r），可以分解为路径（a,b,p）和回路的无重边并（c,d,e,f,g,h,q,r）。因此这个集合是一条路径和若干回路的无重边并。

定理1-4-2 一个M图或者是一条路径，或者是一条路径和若干回路的无重边并。

证明： 由定理1-4-1，我们知道，存在一个包含连通M图的所有边的开边列。我们还知道，若一个开边列的所有边的集合不是一条路径，则可将此边列分解为一个开边列和一些闭边列*，使得分解后得到的这个开边列中所有边的集合是一条路径，而这些闭边列中所有边的集合是一个欧拉图，它或者是一个回路，或者是回路的无重边并。因此，一个连通M图或者是一条路径，或者是一条路径与若干回路的无重边并。

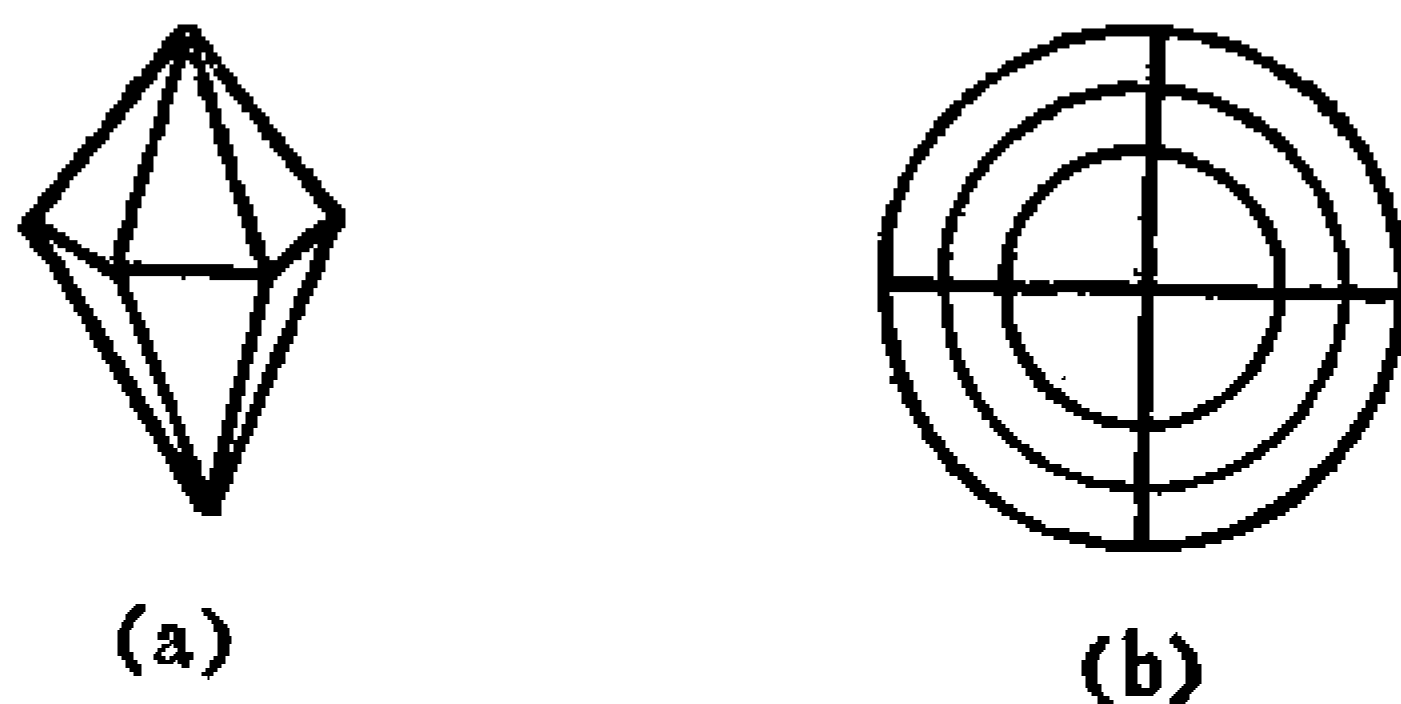
假定所给的M图M是分离的。设$g_1, g_2, \cdots, g_p$是M的最大连通子图集合。因为一个线图中所有顶点度之和的一半，等于这个线图的边数，所以，若一个度为奇数的顶点在$g_r(1 \leqslant r \leqslant p)$中，则另一个度为奇数的顶点也必在$g_r$中，因此在$g_1, g_2, \cdots, g_p$中，只有一个是$M$图，比如说是$g_1$，其余的都是欧拉图。于是我们可以断定，$g_1$或者是一条路径，或者是一条路径和若干回路的无重边并。而$g_2, \cdots, g_p$中的每一个或者是一个回路，或者是回路的无重边并。因此所给的M图M是一条路径和若干回路的无重边并。 （证毕）

我们来考虑一个众所周知的难题：把规定的图形不重复地一笔画出来。如果一个图形能一笔画出来，则当我们把所给的图形看作一个线图时，必有一个边列包含该图的所有边。于是，如果它是一个开边列，所给的图形一定是一个连通的M图。另一方面，如果它是一个闭边列，则所给的图形必是一个连通的欧拉图。假若你不能一笔画出所给的图形，就不可能得到这样一个边列，因此该图形既不是连通M图，又不是连通欧拉图。这就是说，一个图形能被一笔画出，当且仅当此图形是一个连通的M图

---

* 原文此处为"一个闭边列。"据定理1-2-1，这种分解所得的闭边列通常不止一个。
——译注

或连通的欧拉图。例如，图1-4-3(a)中的线图是一个连通M图，因此可以将它一笔画出。而图1-4-3(b)中的线图既不是M图，又不是欧拉图，所以不能将它一笔画出。



(a)　　　　(b)

图1-4-3　一笔画难题

我们已经知道，同一对顶点之间的两条路径的环和是一个欧拉图。因为一个M图是一条路径和若干回路的无重边并，所以两个具有相同端点的M图的环和也是一个欧拉图。

定理1-4-3　设一个线图的两个子图M_1和M_2是具有相同端点的两个M图，则$M_1 \oplus M_2$是一个欧拉图。

证明：　以M_1和M_2的两个公共端点为端点，另作一条边y，显然$M_1 \cup (y)$和$M_2 \cup (y)$都是欧拉图。于是

$$[M_1 \cup (y)] \oplus [M_2 \cup (y)] = M_1 \oplus M_2 \tag{1-4-1}$$

是一个欧拉图。　（证毕）

我们知道，一条路径和一个回路的环和不一定是一条路径。然而，以下定理表明，一个M图和一个欧拉图的环和一定是M图。

定理1-4-4　在一个线图中，设M是一个M图，E是一个欧拉图，则$M \oplus E$是一个M图。

证明：　据定理1-4-2，M可写作$M = P \oplus E'$，其中P是一条路径，E'是一个欧拉图。于是

$$M \oplus E = (P \oplus E') \oplus E = P \oplus E'' = M' \tag{1-4-2}$$

其中$E'' = E' \oplus E$。据定理1-3-3，E''是一个欧拉图。　（证毕）

由定理1-3-3，1-4-3和1-4-4，可以作出M图M和欧拉图E的环和表如下：

$\oplus$	E	M
E	E	M
M	M	E

注意这个表和下面给出的二进制数加法表之间的对称性：

+	0	1
0	0	1
1	1	0

为了方便，我们定义符号$\{P_{ij}\}$和$\{M_{ij}\}$如下。

定义1-4-3 设i和j是线图G中的两个顶点。用符号$\{P_{ij}\}$表示i和j之间所有路径的集体，用符号$\{M_{ij}\}$表示G中以i和j为端点的所有M图的集体。

前面我们已经定义过符号$\{E\}$，它表示一个线图中所有欧拉图的集体。由定理1-4-2，我们得到

$$\{M_{ij}\}=\{P\oplus E;\ P\in\{P_{ij}\},\ E\in\{E\}\} \qquad (1\text{-}4\text{-}3)$$

又由定理1-3-3，1-4-3和1-4-4，我们得到下面的定理。

定理1-4-5 $\{M_{ij}\}$和$\{E\}$中所有子图的集体$\{E,M_{ij}\}$在环和运算下是一个阿贝尔群。

例1-4-2 在例1-3-2和1-3-3中，我们已经知道，图1-3-3中线图的$\{E\}$和$\{P_{12}\}$分别如图1-3-4和1-3-7所示。它们是

$$\{E\}=\{\phi,(a,b),(c,d),(a,c,e),(b,c,e),$$
$$(b,d,e),(a,d,e),(a,b,c,d)\}$$

$$\{P_{12}\}=\{(e),(a,d),(b,c),(a,c),(b,d)\}$$

因此，所有以1和2为端点的M图是

$$\{M_{12}\}=\{P\oplus E;\ P\in\{P_{12}\},E\in\{E\}\}$$
$$=\{(e),(a,d),(b,c),(a,c),(b,d),(a,b,e),$$
$$(c,d,e),(a,b,c,d,e)\}$$

其中，前五个M图是路径，其余的则是一条路径和若干回路的无重边并，如图1-4-4所示。设P_1，P_2，P_3，P_4和P_5由图1-3-7表示，并设$M_6=(a,\ b,\ e)$，$M_7=(c,d,e)$，$M_8=(a,b,c,d,e)$，则由生成元E_1，E_2，E_3和P_1的集合可以产生集体$\{E,M_{ij}\}$中所有的元素：

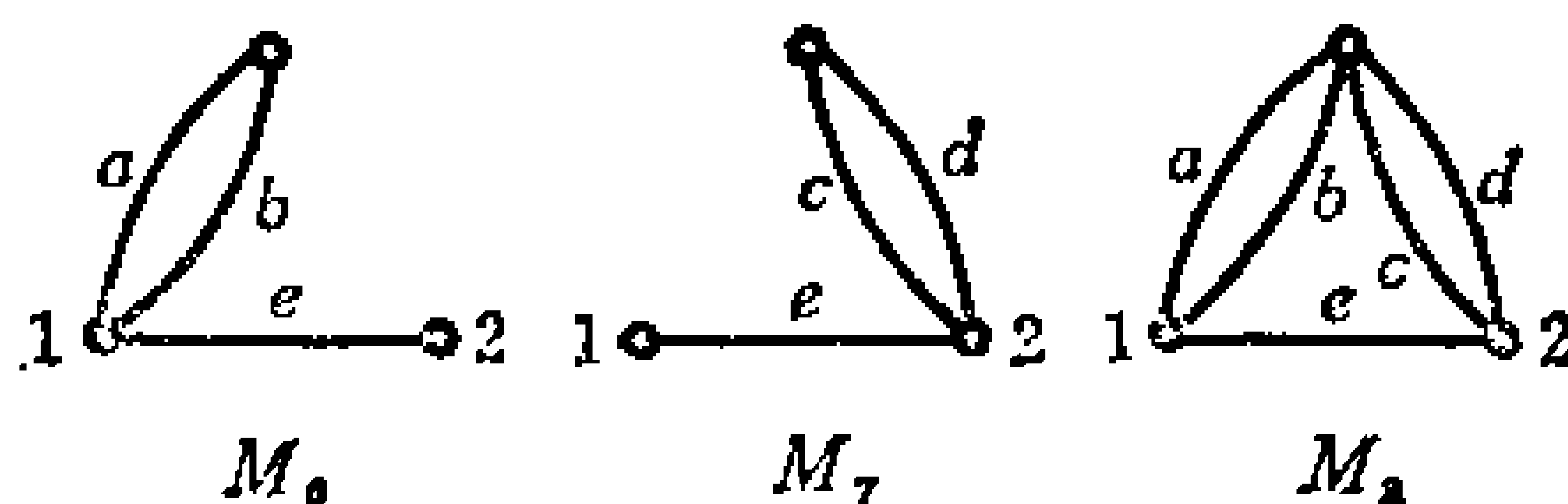


图1-4-4　M图

$$E_1\oplus E_2=E_7$$
$$E_1\oplus E_3=E_4$$
$$E_2\oplus E_3=E_6$$
$$E_1\oplus E_2\oplus E_3=E_5$$
$$E_1\oplus P_1=M_6$$
$$E_2\oplus P_1=M_7$$
$$E_3\oplus P_1=P_4$$
$$E_1\oplus E_2\oplus P_1=M_8$$
$$E_1\oplus E_3\oplus P_1=P_3$$
$$E_2\oplus E_3\oplus P_1=P_2$$
$$E_1\oplus E_2\oplus E_3\oplus P_1=P_5$$
$$E_1\oplus E_1=E_2\oplus E_2=\cdots=P_1\oplus P_1=\phi$$

1-5 不 可 分 图

在由生成元的环和来产生$\{E,M_{ij}\}$的所有元素时，可以选取不同的生成元集合。在一个线图中，找出两个指定顶点之间的若干条路径比较容易。不过，这些路径被找出来后，是否能构成$\{E,M_{ij}\}$的生成元集合，还必须加以确定。在例 1-4-2 中，我们可以选取路径P_1,P_2,P_3和P_4作为$\{E,M_{ij}\}$的生成元，这是因为

$$P_3 \oplus P_4 = E_1$$

$$P_2 \oplus P_4 = E_2$$

$$P_1 \oplus P_4 = E_3$$

但是，如果所给的线图是图1-4-4 中的M_6，那么，在顶点 1 和 2 之间只有一条路径（e）。而单有路径（e），显然是不可能成为

$$\{E,M_{12}\} = \{\phi,(a,b),(a,b,e),(e)\}$$

的生成元集合的。这两个例子表明，是否存在一个能作为$\{E,M_{ij}\}$的生成元集合的路径集合，取决于所给线图的结构。有这样一种仅由路径就能形成生成元集合的结构，叫做不可分图。为了定义不可分图，我们先说明“切割顶点”的概念如下。

定义1-5-1 切割顶点p为两个新顶点p_1和p_2，意思是指将所有以顶点p为端点的边分为两部分，使它们的端点分别由p变成p_1或p_2。

例如，在图1-5-1（a）所示的线图中，有几种切割顶点p的方法，分别如图1-5-1（b），（c），（d），（e）所示。

考虑图1-5-2（a）所示的连通线图。如果我们将顶点p切割为两个顶点p_1和p_2，如图1-5-2（b）所示，则此线图变成分离图。然而，假若一个连通线图象图1-5-3（a）所示的那样，则无

论我们怎样将顶点 p 切割成两个顶点，它都不会成为分离图。

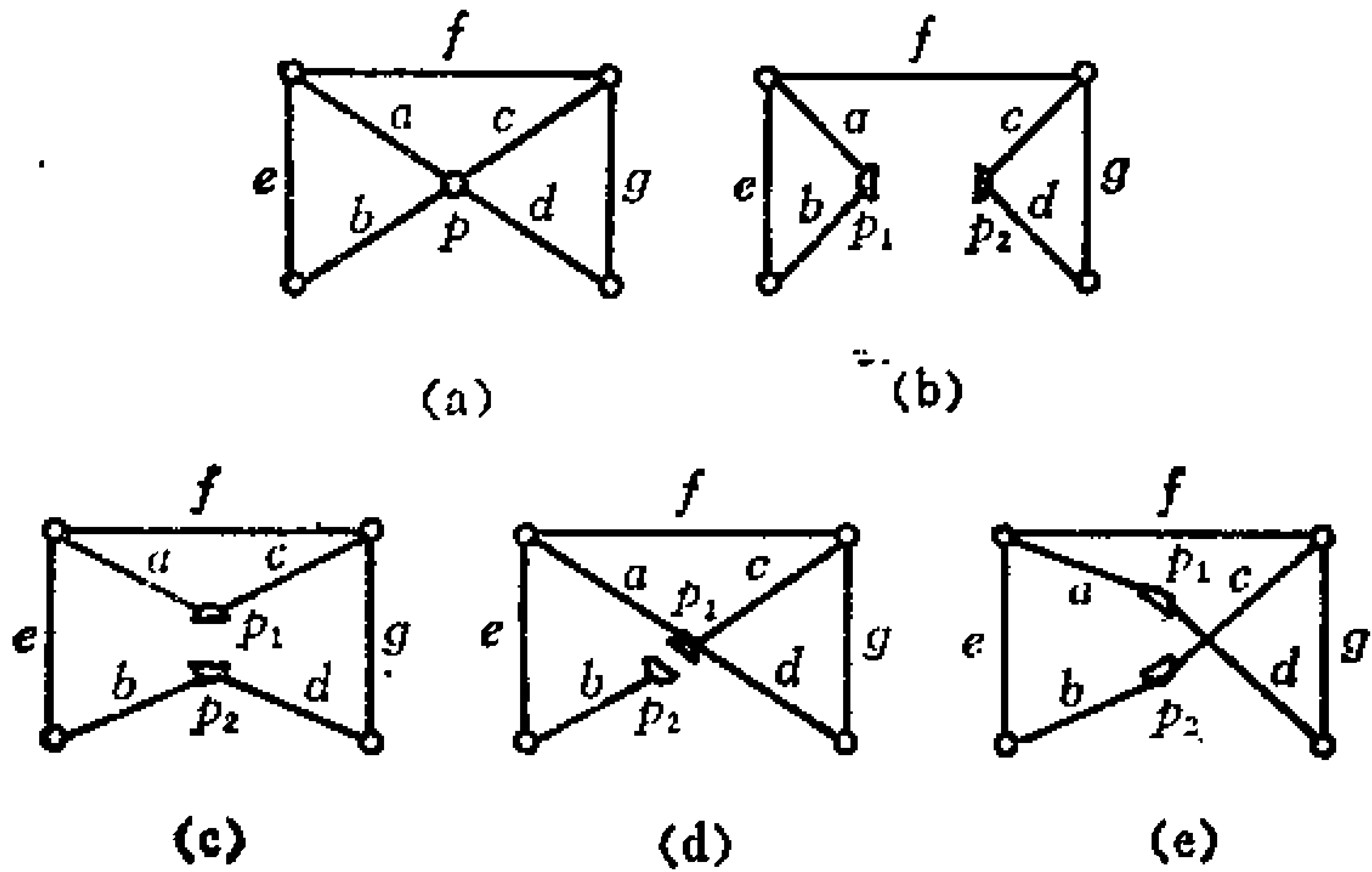


图1-5-1 切割顶点 p 的不同方法
(a)线图 G_1 (b) G_{11} (c) G_{21} (d) G_{31} (e) G_4

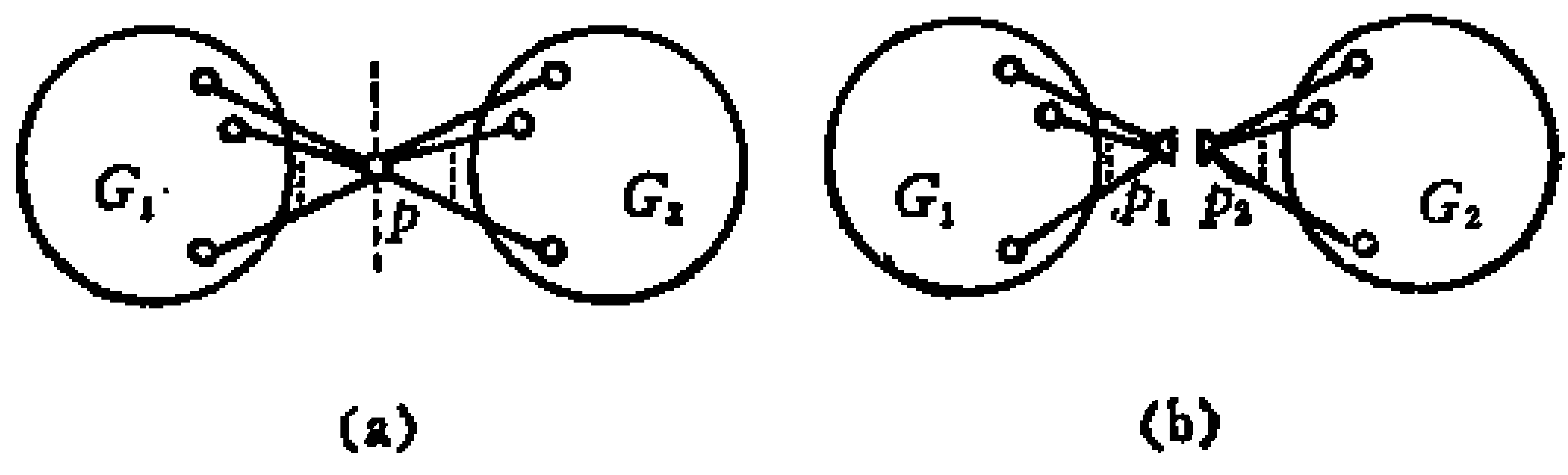


图1-5-2 可分图
(a)割点 p_1 (b)分离图

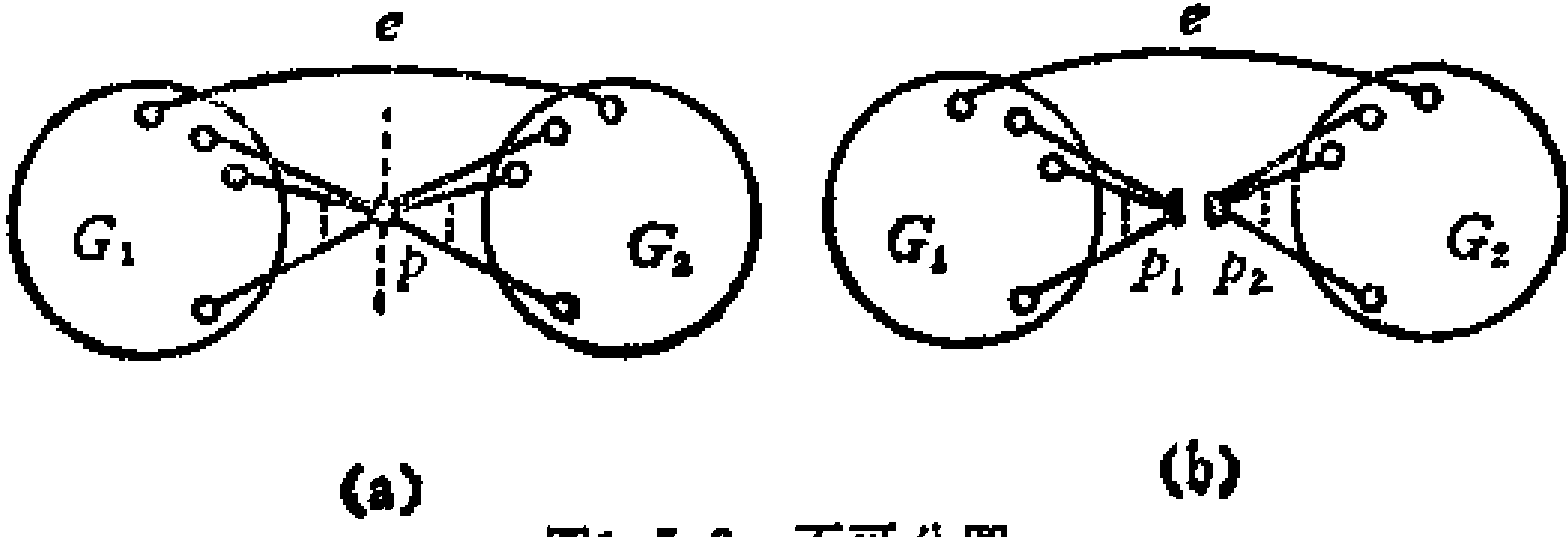


图1-5-3 不可分图
(a)线图; (b)切割顶点 p

定义1-5-2 在一个连通线图中，如果存在一个顶点 p 和一种切割该顶点为两个顶点的方法，使得按此方法切割顶点 p 时，这个线圈变成分离图，并且不产生孤立点，则称此连通线图为可分图，称顶点 p 为割点。

例如，图1-5-4(a),(b)和(c)所示的线圈都是可分图。注意顶点 p 和 p' 是它们的割点。

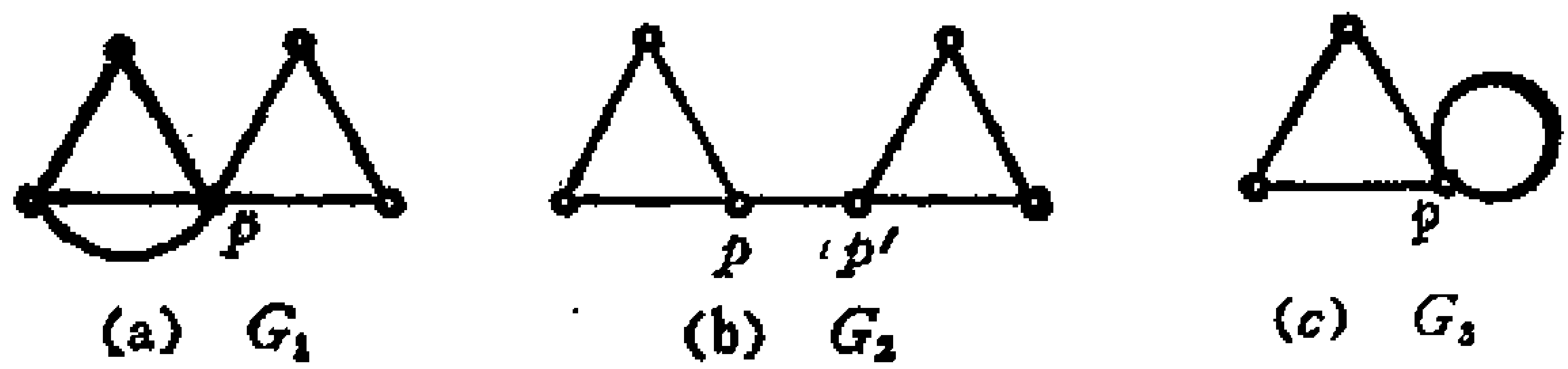


图1-5-4 可分图

(a) G_1; (b) G_2; (c) G_3

定义1-5-3 如果一个连通线图不是可分图，则为不可分图。

例如，图1-5-5(a),(b)所示的线图都是不可分图。

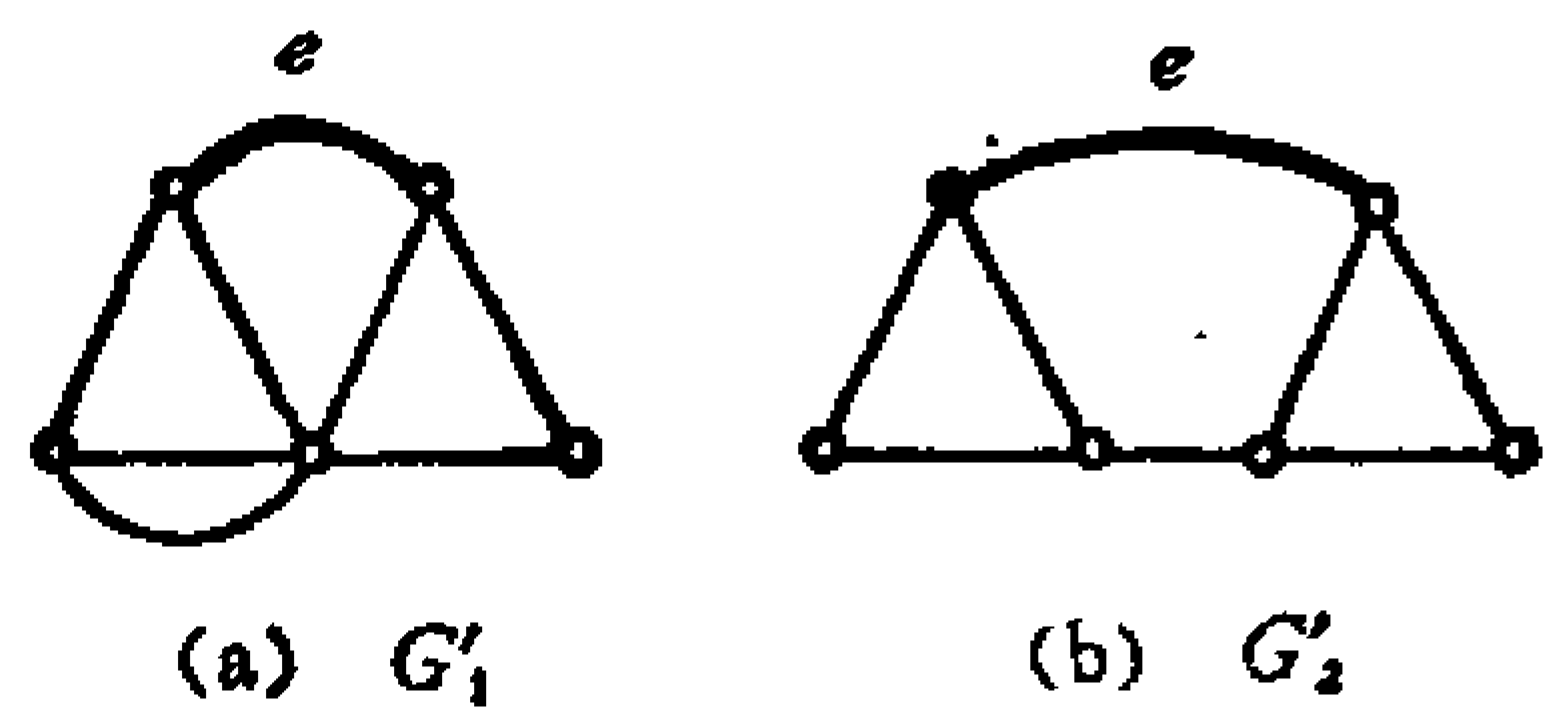


图1-5-5 不可分图

(a) G'_1; (b) G'_2

为了得到不可分图的某些性质，我们来考虑由两个最大连通子图 g_1 和 g_2 构成的线图 G，其中每一个最大连通子图至少包含一条边。容易看出，若在 g_1 的一个顶点和 g_2 的一个顶点之间加上一条边 e，G 就变成了连通图，如图1-5-6所示。但所得的图是一个

可分图．相反，如果线图G'是不可分图，那么删去它的一条边后，也不会变成分离图。

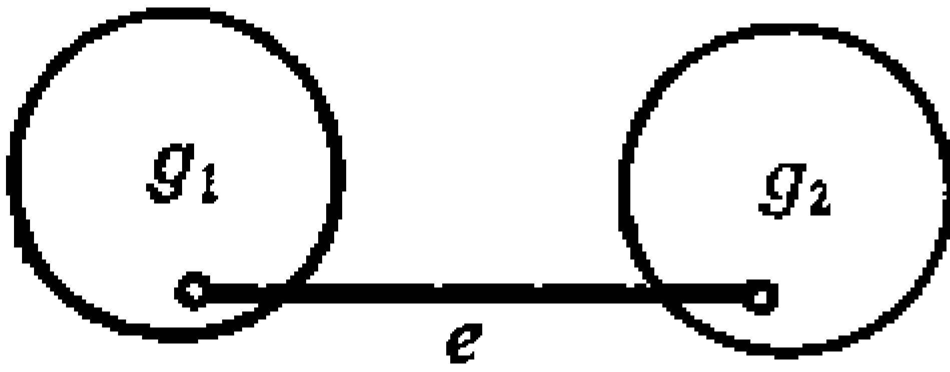


图1-5-6　一个可分图

设e是不可分图G'中连接顶点i和j的一条边．因为删去边e后，G'不会分离，所以，在从G'中删除e所得的图G'_e中，存在一条顶点i和j之间的路径P_{ij}，如图1-5-7所示．这条路径和边e一起，构成G'中的一个回路．于是我们有定理1-5-1．

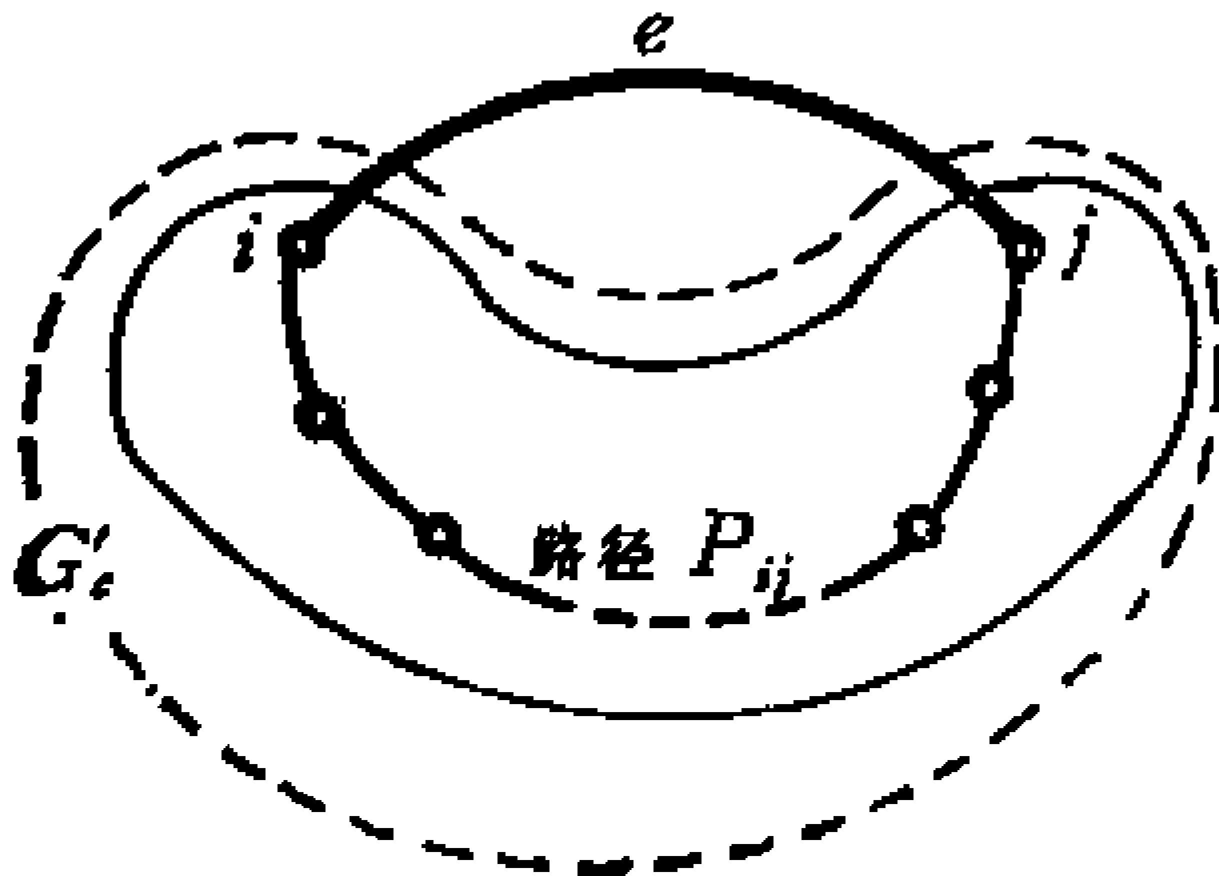


图1-5-7　不可分图G'

定理1-5-1　一个不可分图的任一条边至少在一个回路中．

应当注意的是，某些可分图和分离图也具有定理1-5-1所述的性质（即每条边至少在一个回路中）．例如，图1-5-8(a)和(b)

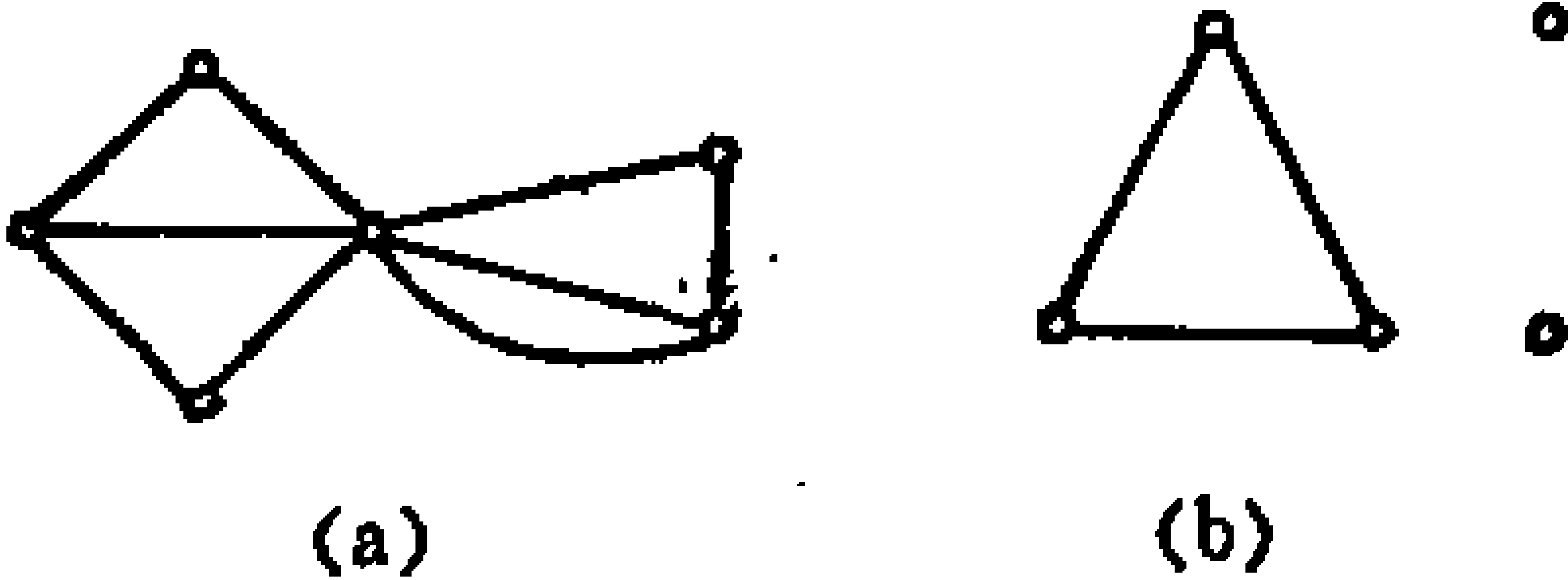


图1-5-8　线图

(a)可分图，　(b)分离图

中的可分图和分离图就有这个性质。所以，这个性质并非不可分图特有的性质。

要从一个线图中移去一条边，有两种方法。一种方法是删除一条边（或断开一条边），另一种方法是短路一条边。所谓“短路边 e”，就是把边 e 删除，并把边 e 的两个端点合并成一个顶点。例如，在图1-5-9(a)所示的线图中，删除（断开）边 e，就得到图1-5-9(b)所示的线图。然而在同一线图中短路边 e，则得到图1-5-9(c)所示的线图。

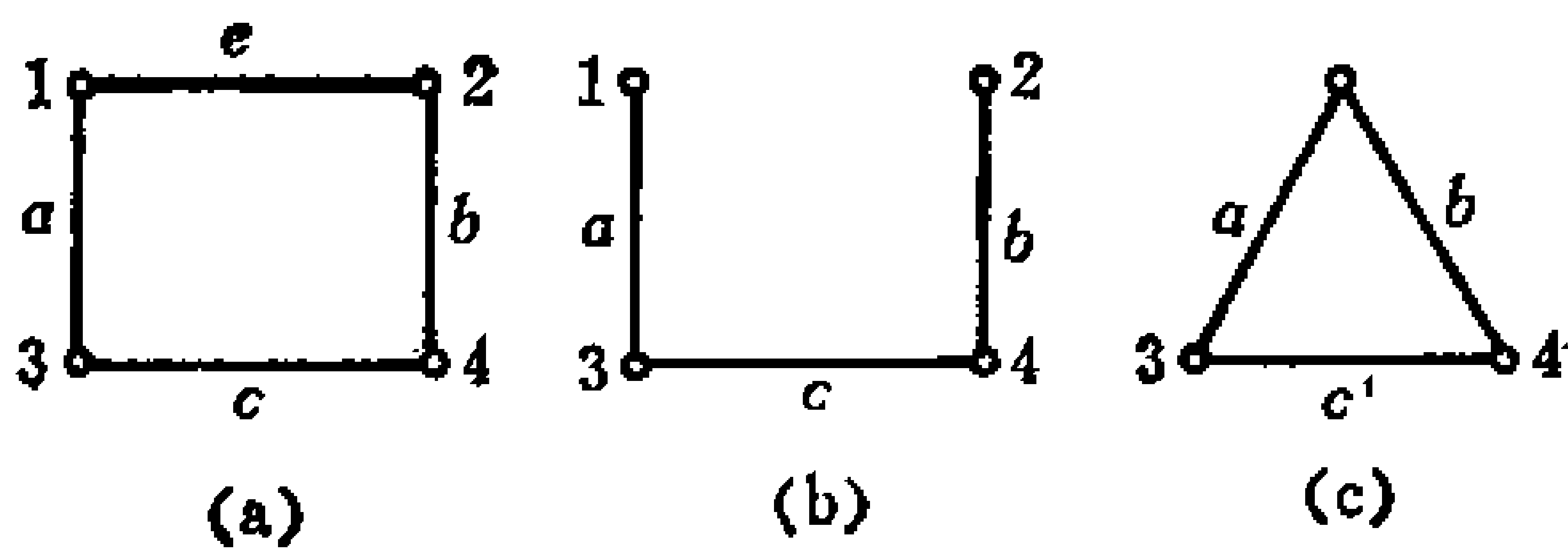


图1-5-9　删除边 e 和短路边 e

(a)一个线图；　(b)删除边 e；　(c)短路边 e

下面我们要说明，在对一个不可分图的任何一条边作删除或短路处理时，必至少有一种方法能够保持原线图的不可分性。假定从不可分图 G' 中删除边 e，使它变成了可分图 G'_e，顶点 p 是它的一个割点（见图1-5-10）。又设边 e 的两个端点是 i 和 j，则可看出，i 和 j 中必有一个在 G'_{1e} 中，而另一个在 G'_{2e} 中，并且 i 和 j 都不可能是顶点 p，因为原图 G' 是不可分的。这样，如果

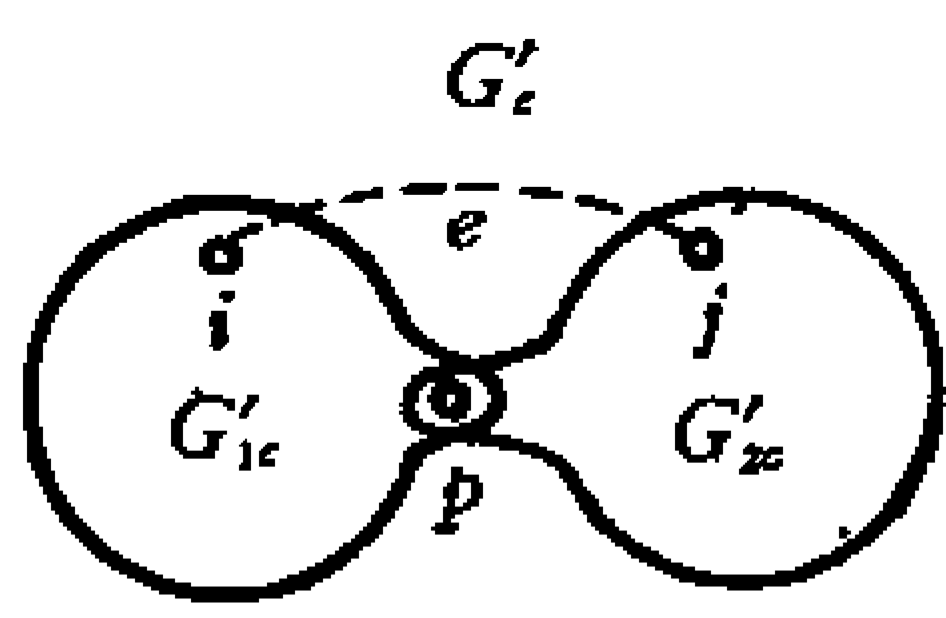


图1-5-10　可分图 G_e'

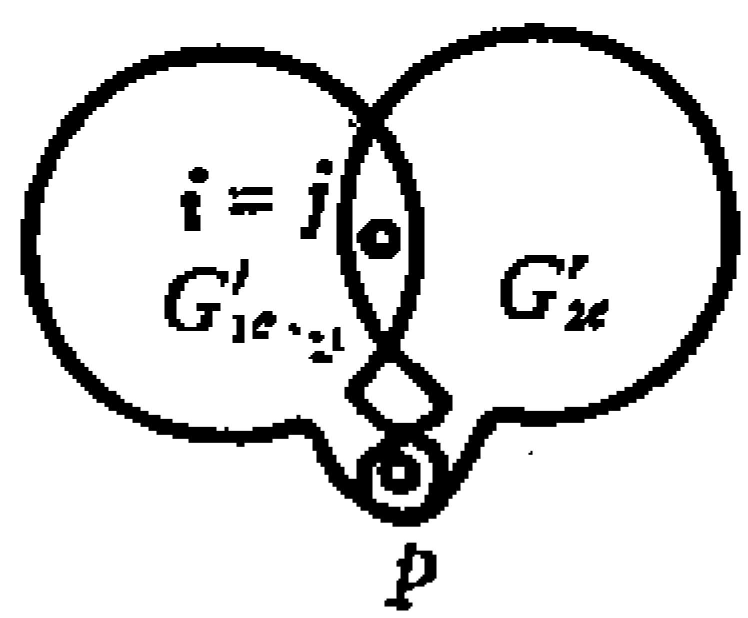


图1-5-11　短路边 e

我们不是删除边 e，而改用将其短路的方法，所得的图就是不可分的，如图1-5-11所示。

假定在短路边 e 后，不可分图 G'' 变成了可分图 G''_e，如图1-5-12所示，则原不可分图必定由边 e 和两个子图 G_1，G_2构成，其中子图 G_1和G_2在 e 的端点 p_1，p_2 处结合起来，如图1-5-13所示。注意，当我们短路边 e 时，顶点 p_1 和 p_2 变成了割点 p。这样，如果我们不是短路边 e，而改用删除 e 的方法，所得的图将是不可分的。只要一个不可分图不少于三个顶点，这个结论都成立。

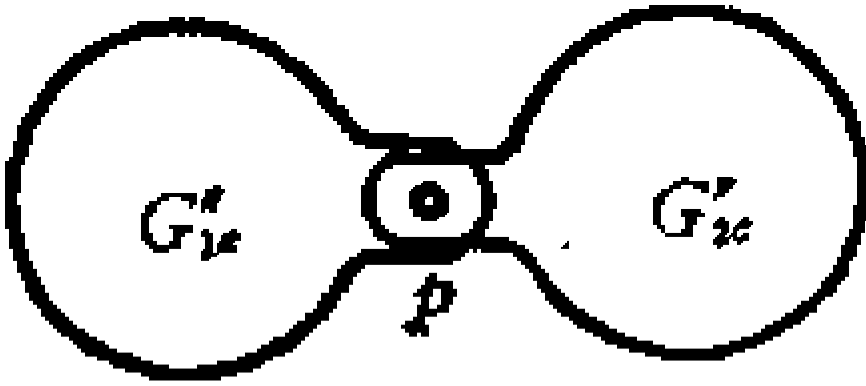


图1-5-12　短路一条边所得的可分图G_e''

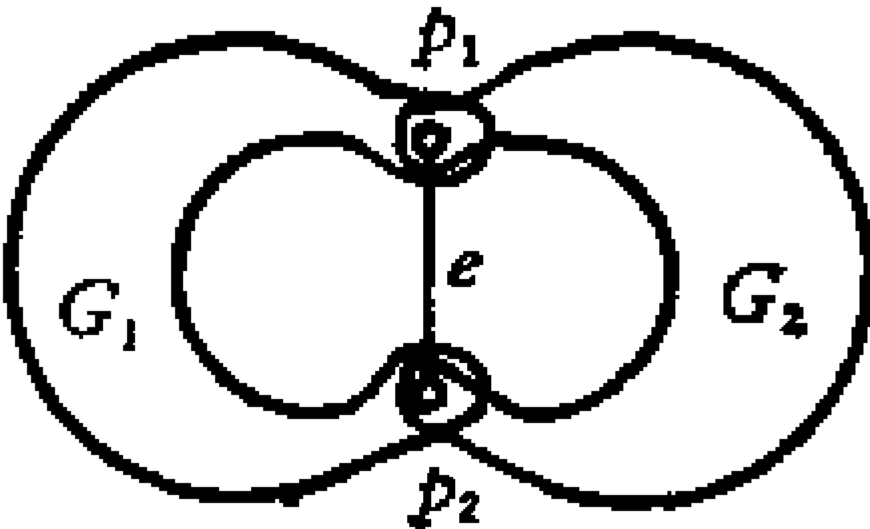


图1-5-13　一个不可分图

定理1-5-2　设不可分图G至少包含三个顶点，则用删除或短路的方法移去它的任一条边时，必至少有一种方法能保持其不可分性。

现在我们已经作好准备，可以来讨论不可分图所独具的性质了。

定理1-5-3　当且仅当一个线图是不可分图时，对于该线图的任一对顶点 i，j 和任一条边 e，在 i 和 j 之间存在一条包含边 e 的路径。

证明：　若不可分图G恰有三个顶点，定理显然成立。假设定理对于所有具有 k 个顶点的不可分图都成立。我们来考虑一个具有 $k+1$ 个顶点的不可分图G。据定理1-5-2，我们可以挑出G中的任一条边，或者短路它，或者删除它，使所得的图仍是不

可分的。在G中选取一条异于边e且不与i连接的边e_1。将e_1短路，若所得的图是可分的，就改为将e_1删除。然后，再选取另一条异于边e且不与i连接的边e_2。将e_2短路，如果所得的图是可分的，又改为将e_2删除。如此继续下去，我们很快便能找到这样一条边e_r，它异于边e，不与i连接，且将e_r短路所得的图是不可分图，设为G'。显然G'有K个顶点，因此定理对G'成立，即在i和j之间存在着一条包含边e的路径。而这同一条路径，除了有可能包括边e_r外，也是G中i和j之间包含边e的路径。

（证毕）

由这个定理，可以得到以下定理。

定理1-5-4 在一个不可分图中，对于任一对顶点i，j及任一个回路C，一定存在i和j之间的两条路径P_1和P_2，使得

$$C=P_1\oplus P_2 \tag{1-5-1}$$

这个定理保证了存在一个路径集合，它可以作为$\{E,M_{ij}\}$的生成元集合。我们注意到，图1-3-3中的线图是不可分的，路径P_1，P_2，P_3和P_4能组成一个生成元的集合，如图1-3-7所示。

1-6 路径的集体

如前所述，以顶点i和j为端点的M图的集体$\{M_{ij}\}$包含了i和j之间所有的路径。我们还知道，$\{E,M_{ij}\}$在环和运算下是一个阿贝尔群。并且，根据定理1-4-3和1-4-4，如果我们适当地选取生成元，很容易得到$\{M_{ij}\}$。例如，在图1-3-3所示的线图中，选取E_1，E_2，E_3和P_1（见图1-3-4和1-3-7）作为生成元，即可知$\{M_{12}\}$中所有的M图是P_1，$P_1\oplus E_1$，$P_1\oplus E_2$；$P_1\oplus E_3$，$P_1\oplus E_1\oplus E_2$，$P_1\oplus E_1\oplus E_3$，$P_1\oplus E_2\oplus E_3$以及$P_1\oplus E_1\oplus E_2\oplus E_3$。因此，要求出顶点$i$和$j$之间的所有路径，一种方法是先由集体$\{E,M_{ij}\}$中的生成元生成集体$\{M_{ij}\}$，然后设法从$\{M_{ij}\}$中把路径

抽出来。这里介绍一种从$\{M_{ij}\}$中将所有路径抽取出来的方法，称为"最小化运算"。使用这种运算，还能从欧拉图集体$\{E\}$中抽出所有的回路。

这种运算还可以用来得到路径集体的一些重要性质。并且，借助于这些性质，可以导出另一种生成两指定顶点间所有路径的简单算法。对此，我们将在本节内研究，首先，在一个集体上定义"最小化运算"如下。

定义1-6-1 设A是若干集合的一个集体。则定义$\min A$为A的这样一个子集体：A中任一个集合α属于$\min A$，当且仅当A中除α外的每一个集合β，只要不是空集，就满足$\beta \not\subset \alpha$。($\beta \not\subset \alpha$表示β不是α的子集，即β中至少有一个元素不在α中。)*

例如，设$A=\{(a,b,c),(a,d),(a),(b,c),\phi\}$。则$\min A$由集合$(a)$，$(b,c)$和空集$\phi$组成。可以看出，通过以下步骤即可求出一个集体$A$的$\min A$。

对$p=1,2,3,\cdots,n$，检验$a_p(\neq\phi)$，看是否存在一个非空集合$a_r(\neq a_p)$，使得$a_r\subset a_p$。如果存在这样的集合a_r，就删去a_p。否则将a_p保留在此集体中。($a_r\subset a_p$表示a_r是a_p的一个子集，即a_r的每一个元素都在a_p中。)例如，在例1-3-2中，删去(a,b,c,d)，即得$\{E\}$的最小化集体为

$$\min\{E\}=\{\phi,(a,b)\ (c,d),(a,c,e),(b,c,e),(a,d,e),(b,d,e)\}$$

这是因为，只有(a,b,c,d)，具有另一个非空子集(a,b)适合$(a,b)\subset(a,b,c,d)$。

前面说过，$\{E\}$是由所有不同的回路，回路的无重边并和空集组成的集体。设$E_1\in\{E\}$是回路C_1，$C_2,\cdots$，C_k的无重边并，则因C_1是一个回路，故C_1在$\{E\}$中，且$C_1\subset E_1$。于是，在求min

---

*括号中的字是译者加的。——译注

$\{E\}$时，E_1将被删去。由于$\{E\}$中任一回路C是一个连通子图。它的每一个顶点的度均为 2，所以C的任何一个真子图都不是回路。

定理1-6-1 用$\{C\}$表示所有的回路和空集组成的一个集体，则

$$\min\{E\}=\{C\} \tag{1-6-1}$$

按照定义，集体$\{M_{ij}\}$是以i和j为端点的全部M图的集体。我们已经知道，一个M图M_{ij}或者是顶点i和j间的一条路径P_{ij}，或者是路径P_{ij}和若干回路的无重边并。在$\{M_{ij}\}$中，设M_1是路径p_{ij}和若干回路的无重边并，则由于P_{ij}在$\{M_{ij}\}$中，所以M_1将不属于$\min\{M_{ij}\}$。

假定P''是$\{M_{ij}\}$中一条路径P'_{ij}的真子集。若P''也在$\{M_{ij}\}$中，则据定理 1-3-7 知，$P''\oplus P'_{ij}$或为回路，或为回路的无重边并。但是，由于P''是P'_{ij}的真子集，所以$P''\oplus P'_{ij}$是P'_{ij}的子图。而P'_{ij}不可能包含回路，因此P''不在$\{M_{ij}\}$中。

定理1-6-2 用$\{P_{ij}\}$表示顶点i和j间所有路径的集体，则

$$\min\{M_{ij}\}=\{P_{ij}\} \tag{1-6-2}$$

下面，我们用一种称为环积$\otimes$的运算来把两个集体乘起来。

定义1-6-2 诸集合的集体A和B的环积记作$A\otimes B$，定义为

$$A\otimes B=\min\{\alpha_p\oplus\beta_q;\ \alpha_p\in A,\beta_q\in B\} \tag{1-6-3}$$

例如，设$A=\{(a),(b,c),(d,e)\}$，

$B=\{(a,b),(b,c,d),(e)\}$，则

$$A\otimes B=\min\{(b),(a,b,c,d),(a,e),(a,c),(d),(b,c,e),(a,b,d,e)\}$$

$$=\{(b),(a,e),(a,c),(d)\}$$

下面是环积运算的一种应用。据定理1-5-4，在一个不可分图中，任一回路都可以表示为顶点i和j之间两条路径的环和。

因此，如果我们对顶点 i 和 j 之间的路径两两一组作环和，并把所有可能的环和汇集起来，就可以得到一个不可分图中所有的回路。

定理1-6-3 对于一个不可分图，有

$$\{P_{ij}\}\otimes\{P_{ij}\}=\{C\} \tag{1-6-4}$$

注意其中

$$\{P_{ij}\}\otimes\{P_{ij}\}=\min\{P_r\oplus P_s;\ P_r,P_s\in\{P_{ij}\}\} \tag{1-6-5}$$

由于空集 ϕ 在 $\{C\}$ 中，且任何集合 C 和空集 ϕ 的环和仍为集合 C，故有

$$\{C\}\subset\{C\}\otimes\{C\} \tag{1-6-6}$$

此外，对于 $\{C\}$ 中的元素 C_r 和 C_s，$C_r\oplus C_s$ 是一个回路或回路的无重边并。注意，$\{E\}$ 是由所有不同的回路，回路的无重边并和空集组成的集体，故有

$$\{C_r\oplus C_s;\ C_r,C_s\in\{C\}\}\subset\{E\} \tag{1-6-7}$$

因此

$$\{C\}\otimes\{C\}=\min\{C_r\oplus C_s;\ C_r,C_s\in\{C\}\}\subset\min\{E\} \tag{1-6-8}$$

然而由式(1-6-1)知，$\min\{E\}=\{C\}$。结合式（1-6-6）即得

$$\{C\}\subset\{C\}\otimes\{C\}\subset\{C\} \tag{1-6-9}$$

于是得到定理1-6-4。

定理1-6-4

$$\{C\}\otimes\{C\}=\{C\} \tag{1-6-10}$$

因为空集在 $\{C\}$ 中，故有

$$\{P_{ij}\}\subset\{P_{ij}\}\otimes\{C\} \tag{1-6-11}$$

另一方面，

$$\{P\oplus C,\ P\in\{P_{ij}\},C\in\{C\}\}\subset\{M_{ij}\} \tag{1-6-12}$$

其中 $\{M_{ij}\}$ 是以 i 和 j 为端点的所有不同的 M 图的集体。由于据式（1-6-2），$\min\{M_{ij}\}$ 等于 $\{P_{ij}\}$，所以

$$\{P_{ij}\}\otimes\{C\}=\min\{P\oplus C;\ P\in\{P_{ij}\},\ C\in\{C\}\}$$
$$\subset\min\{M_{ij}\}=\{P_{ij}\} \tag{1-6-13}$$

由此式及（1-6-11），可得定理1-6-5。

定理1-6-5

$$\{P_{ij}\}\otimes\{C\}=\{P_{ij}\} \tag{1-6-14}$$

这个定理可以进一步修改。

定理1-6-6

$$\{P_{ij}\}\otimes\{P_{ij}\}\otimes\{P_{ij}\}=\{P_{ij}\} \tag{1-6-15}$$

证明： 因为空集 ϕ 在 $\{P_{ij}\}\otimes\{P_{ij}\}$ 中，故

$$\{P\oplus Q;\ P\in\{P_{ij}\},\ Q\in\{P_{ij}\}\otimes\{P_{ij}\}\}\supset\{P_{ij}\} \tag{1-6-16}$$

由于 Q 是一个欧拉图，故 $P\oplus Q$ 是一个 M 图。（证毕）

例1-6-1 在例1-3-3中，给出 $\{P_{12}\}$ 为

$$\{P_{12}\}=\{(e),(a,d),(b,c),(a,c),(b,d)\}$$

通过运算 $\{P_{12}\}\otimes\{P_{12}\}$，可以得到图 1-3-3 所示不可分图中所有的回路：

$$\begin{aligned}\{P_{12}\}\otimes\{P_{12}\}&=\min\{(e)\oplus(e),(e)\oplus(a,d),(e)\oplus(b,c),\\&\quad(e)\oplus(a,c),\ (e)\oplus(b,d),(a,d)\oplus\\&\quad(b,c),(a,d)\oplus(a,c),(a,d)\oplus\\&\quad(b,d),(b,c)\oplus(a,c),(b,c)\oplus\\&\quad(b,d),(a,c)\oplus(b,d)\}\\&=\min\{\phi,(a,d,e),(b,c,e),(a,c,e),(b,d,e),\\&\quad(a,b,c,d),(c,d),(a,b)\}\\&=\{\phi,(a,d,e),(b,c,e),(a,c,e),(b,d,e),\\&\quad(c,d),(a,b)\}\\&=\{C\}\end{aligned}$$

注意，$\{P_{rs}\}$ 的下标 r 和 s 代表两个顶点，而 $\{P_{rs}\}$ 中的每一条路径都在这两个顶点之间。也就是说，符号 $\{P_{rs}\}$ 表示顶点 r

和 s 之间所有路径的集体。式(1-6-4)说明，$\{P_{rs}\}$ 和 $\{P_{rs}\}$ 的环积等于$\{C\}$。但是，当$r\neq t,u$时，$\{P_{rs}\}$ 和 $\{P_{tu}\}$的环积显然不等于$\{C\}$。

定理1-6-7 设G是一个连通图，又设 i，j和 k是G中三个不同的顶点，则

$$\{P_{ij}\}\otimes\{P_{jk}\}=\{P_{ik}\} \qquad (1\text{-}6\text{-}17)$$

其中$\{P_{ij}\}$是G中 i 和 j 之间所有路径的集体，$\{P_{jk}\}$ 是 j 和 k 之间所有路径的集体，$\{P_{ik}\}$是 i 和 k 之间所有路径的集体。

证明： 对$\{P_{ij}\}$ 中任一路径 P_{ij} 和 $\{P_{jk}\}$ 中任一路径 P_{jk}，$P_{ij}\oplus P_{jk}$是一个M图M_{ik}。因此只需证明，对于$\{P_{ik}\}$中任一路径P_{ik}，分别存在$\{P_{ij}\}$中一条路径P_{ij}和$\{P_{jk}\}$中一条路径 P_{jk}，使得

$$P_{ij}\oplus P_{jk}=P_{ik} \qquad (1\text{-}6\text{-}18)$$

因为G是连通的，故从 j 到路径P_{ik}中任一顶点，存在一条路径。设P'是G中从 j 到路径P_{ik}中一个顶点 r，且不含P_{ik}中其他顶点的一条路径。设P_{ir}是子图P_{ik}中 i 和 r 间的路径，P_{rk}是子图P_{ik}中 r 和 k 间的路径，如图1-6-1所示。则 $P_{ij}=P_{ir}\cup P'$和$P_{jk}=P_{rk}\cup P'$就是所求的路径。 （证毕）

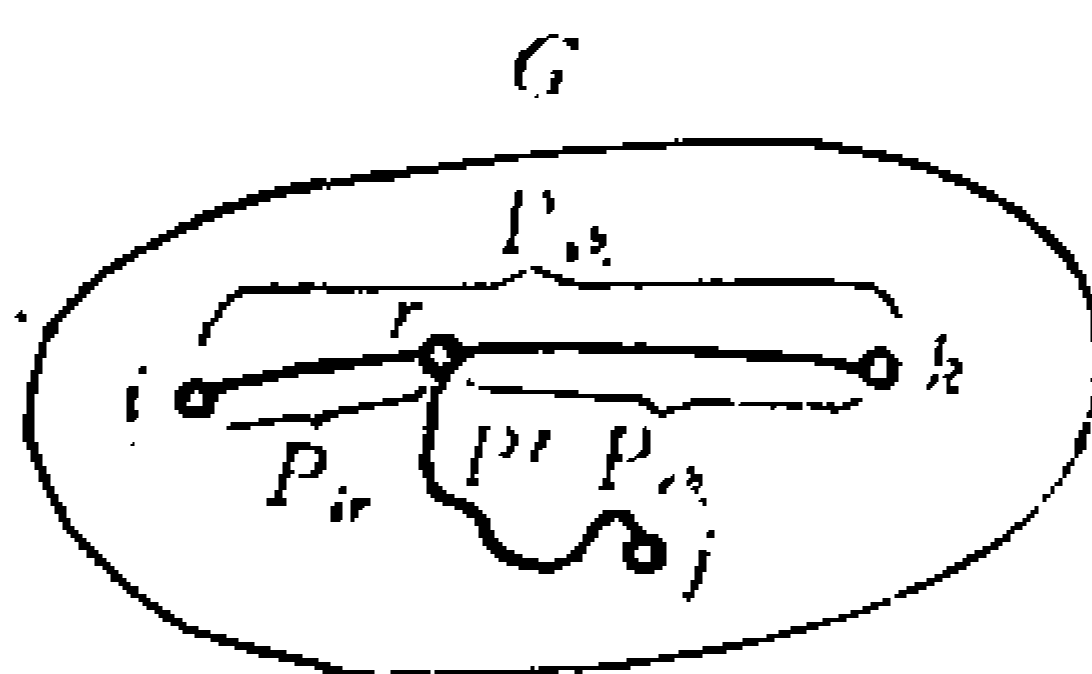


图1-6-1 路径P_{ik},P_{ir},P_{rk}和P'

这一定理可推广如下。

定理1-6-8 设 i，j_1，$\cdots$，j_m和 k 是连通线图G的顶点，

则

$$\{P_{ij_1}\}\otimes\{P_{j_1j_2}\}\otimes\{P_{j_2j_3}\}\otimes\cdots\otimes\{P_{j_mk}\}=\{P_{ik}\}$$

(1-6-19)

再根据式（1-6-4），可将上述定理修改为

定理1-6-9 对于一个不可分图，有

$$\{P_{ij_1}\}\otimes\{P_{j_1j_2}\}\otimes\cdots\otimes\{P_{j_mk}\}\otimes\{P_{ki}\}=\{C\}$$

(1-6-20)

例1-6-2 在图1-3-3所示的连通图中，

$$\{P_{23}\}=\{(c),(d),(a,e),(b,e)\}$$

连同例1-6-1给出的$\{P_{12}\}$，我们有

$$\begin{aligned}\{P_{13}\}&=\{P_{12}\}\otimes\{P_{23}\}=\{(e),(a,d),(b,c),(a,c),(b,d)\}\otimes\\&\quad\{(c),(d),(a,e),(b,e)\}\\&=\min\{(c,e),(d,e),(a),(b),(a,c,d),(a,b,d,e),\\&\quad(b,c,d),(a,b,c,e)\}\\&=\{(c,e),(d,e),(a),(b)\}\end{aligned}$$

现在我们来考虑一个不可分图G'。设e是G'的一条边，其端点为i和j，如图1-5-7所示。设G'_e是从G'中删去边e得到的线图。因为G'_e是连通的，在顶点i和j之间至少存在一条路径。设$\{P_{ij}\}$是G'_e中i和j之间所有路径的集体。注意(e)本身就是G'中i和j之间的一条路径，所以若P在$\{P_{ij}\}$中，则$(e)\oplus P$是一个回路。换句话说，对$\{P_{ij}\}$中任何P，存在G'中的一个回路C，使得

$$C\oplus(e)=P \qquad (1\text{-}6\text{-}21)$$

设$\{C\}$是由空集和G'中所有回路组成的集体。因为$(e)\oplus\phi=(e)$，所以$\min\{(e)\oplus C;\ C\in\{C\}\}$是顶点$i$和$j$之间所有路径的集体。

定义1-6-3 符号$\{P_{(e)}\}$表示边e的两个端点之间所有路径的集体。

定理1-6-10 对于一个线图中的任一条边 e，

$$\{P_{[e]}\}=\min\{(e)\oplus C;\ C\in\{C\}\} \qquad (1\text{-}6\text{-}22)$$

证明： 设$P_1(\neq\phi)$是顶点 i 和 j 之间的一条路径，则 $P_1\cup(e)$是$\{C\}$中的一个回路。空集ϕ在$\{C\}$中。故

$$\{(e)\oplus C;\ C\in\{C\}\}\supset\{P_{[e]}\} \qquad (1\text{-}6\text{-}23)$$

$(e)\oplus C$是一个以边 e 的端点为端点的M图，故

$$\min\{(e)\oplus C;\ C\in\{C\}\}=\{P_{[e]}\} \qquad (1\text{-}6\text{-}24)$$

（证毕）

例1-6-3 在例1-6-1的不可分图中，

$$\{C\}=\{\phi,(a,b),(c,d),(a,c,e),(b,c,e),$$
$$(b,d,e),(a,d,e)\}$$

因此

$$\{P_{[a]}\}=\min\{(a)\oplus C;\ C\in\{C\}\}$$
$$=\min\{(a),(b),(a,c,d),(c,e),(a,b,c,e),$$
$$(a,b,d,e),(d,e)\}$$
$$=\{(a),(b),(c,e),(d,e)\}$$

显然它与例1-6-2中的$\{P_{13}\}$相同。由例1-6-2可看出，

$$\{P_{12}\}\otimes\{P_{23}\}\otimes\{P_{13}\}=\{P_{13}\}\otimes\{P_{13}\}=\{C\}$$

定理1-6-11 对于一个线图中的任一条边 e，

$$\{P_{[e]}\}=\{(e)\oplus C;\ \text{回路}C\text{或为空集，或包含}e\} \qquad (1\text{-}6\text{-}25)$$

证明： 设 i 和 j 是边 e 的端点。由定理1-6-10知，$(e)\oplus C$是一个M图M_{ij}。为使M_{ij}是一条路径，C中必须包含边 e。也就是说，如果边 e 在C中，$(e)\oplus C$就不可能是一条路径P_{ij}和回路的无重边并。另一方面，对于任一条路径 P_{ij}，$(e)\oplus P_{ij}$是包含边 e 的一个回路。（证毕）

在例1-6-3中，回路(a,b)，(a,c,e)和(a,d,e)都包含边 a。

因此，据定理1-6-11，$\{P_{[e]}\}$由(a),(b),(c,e)和(d,e)组成。

假设边e_1，e_2，$\cdots$，e_k构成顶点i和j之间的一条路径，则据定理1-6-8，i和j之间所有路径的集体$\{P_{ij}\}$是

$$\{P_{ij}\}=\{P_{[e_1]}\}\otimes\{P_{[e_2]}\}\otimes\cdots\otimes\{P_{[e_k]}\} \qquad (1\text{-}6\text{-}26)$$

考虑$\{P_{ij}\}$中的一条路径P，可以看出：

$$\min\{P\oplus C;\ C\in\{C\}\}$$

不一定等于$\{P_{ij}\}$，除非P仅由一条边组成。例如，在图1-6-2所示的线图G中，如果我们取(a,b)作为路径P，则在G中就不存在这样的回路C，使$P\oplus C=(c,d)$。但另一方面，我们有下面的定理。

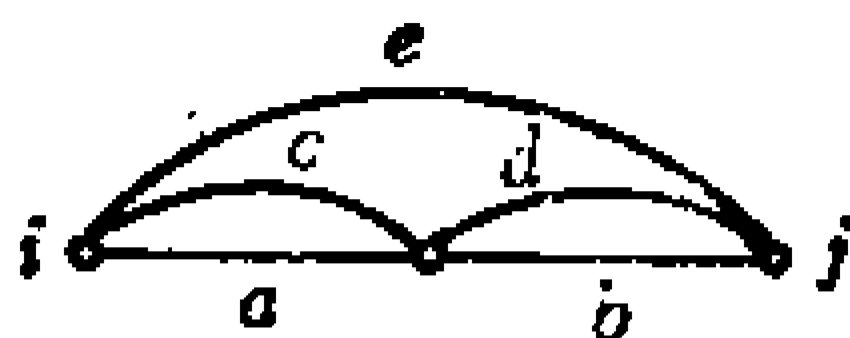


图1-6-2　一个线图

定理1-6-12　设$\{E\}$是线图G中所有欧拉图和空集的集体。假定P是$\{P_{ij}\}$中的一条路径，则

$$\{P_{ij}\}=\min\{P\oplus E;\ E\in\{E\}\} \qquad (1\text{-}6\text{-}27)$$

证明：　设P'是$\{P_{ij}\}$中的任一条路径，则$P\oplus P'$是一个欧拉图。因此$P\oplus P'$在$\{E\}$中。　　　　(证毕)

路径集合的一个应用领域是开关理论。用一个线图代表一个开关网络，其中每一条边表示一个开关变量。于是，从顶点i到顶点j的一个开关函数F_{ij}可表示为

$$F_{ij}=\sum_{(q)}\text{路径}P_{q_{ij}}\text{积} \qquad (1\text{-}6\text{-}28)$$

其中$\sum_{(q)}$表示对从i到j的所有路径求和，"路径$P_{q_{ij}}$积"是与路径$P_{q_{ij}}$中的边相联系的所有开关变量的乘积。于是，如果知道了顶点i和j之间的所有路径，就能求出开关函数F_{ij}。

例1-6-4 将图1-6-3中的线图看作一个开关网络，其中a，b，c，d，e，f，g代表开关变量。假定我们要求出开关函数F_{12}和F_{14}。从网络中，可以直接得到顶点1和2之间所有的路径及顶点1和4之间所有的路径。不过，我们也可以用式(1-6-2)和定理1-6-7，定理1-6-12来求出这些路径。首先求出$\{E\}$为

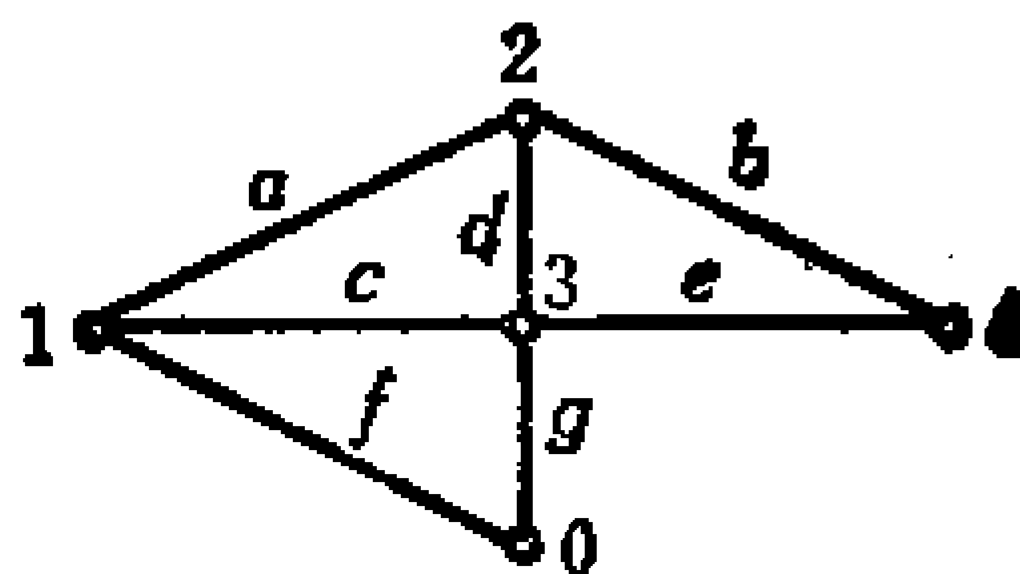


图1-6-3　一个开关网络

$$\{E\}=\{\phi,(a,c,d),(c,f,g),(b,d,e),(a,d,f,g),$$
$$(a,b,c,e),(b,c,d,e,f,g),(a,b,e,f,g)\}$$

故

$$\{C\}=\min\{E\}=\{\phi,(a,c,d),(c,f,g),(b,d,e),(a,d,f,g),$$
$$(a,b,c,e),(a,b,e,f,g)\}$$

因为$\{P_{12}\}=\{P_{[a]}\}$，故可得

$$\{P_{12}\}=\{P_{[a]}\}=\{(a),(c,d),(d,f,g),(b,c,e),$$
$$(b,e,f,g)\}$$

因此

$$F_{12}=a+cd+dfg+bce+befg$$

又因为$\{P_{24}\}=\{P_{[b]}\}$，故

$$\{P_{24}\}=\min\{(b)\oplus C;\ C\in\{C\}\}=\{(b),(d,e),(a,c,e),$$
$$(a,e,f,g)\}$$

据定理1-6-7，

$$\{P_{14}\}=\{P_{12}\}\otimes\{P_{24}\}=\{(a),(c,d),(d,f,g),(b,c,e),$$
$$(b,e,f,g)\}\otimes\{(b),(d,e),$$
$$(a,c,e),(a,e,f,g)\}$$
$$=\{(a,b),(a,d,e),(c,e),(e,f,g),(b,c,d),$$
$$(b,d,f,g)\}$$

因此

$$F_{14}=ab+ade+ce+efg+bcd+bdfg$$

因为（a，b）是顶点1和4之间的一条路径，应用定理1-6-12，可求得

$$\{P_{14}\}=\{P_{(ab)}\}=\min\{(a,b)\oplus E,\ E\in\{E\}\}$$
$$=\{(a,b),(b,c,d),(a,d,e),(b,d,f,g),(c,e),(e,f,g)\}$$

这个结果与上面求得的结果是一致的。

1-7 τ 图

一对路径的环和可以分为三类。一类是同一集体$\{P_{ij}\}$中两条不同路径P_1和P_2的环和。在这种情况下，我们已经知道，$P_1\oplus P_2$或者是一个回路，或者是回路的无重边并.另一类是路径P_{ij}和P_{jk}的环和，其中P_{ij}是顶点i和j之间的路径，P_{jk}是顶点j和k之间的路径。在上一节里，我们已经知道，$P_{ij}\oplus P_{jk}$或者是顶点i和k之间的一条路径P_{ik}，或者是路径P_{ik}和若干回路的无重边并. 现在，我们要来研究第三种类型，即路径P_{rs}和P_{tu}的环和. 其中P_{rs}是顶点r和s之间的一条路径，P_{tu}是顶点t和u之间的一条路径，而顶点r，s，t，u是互不相同的。例如，在图1-6-3中，(d,e)是顶点2和4之间的一条路径，(f,g)是顶点1和3之间的一条路径，这两条路径的环和是$(d,e)\oplus(f,g)=(d,e,f,g)$，如图1-7-1所示，它显然不是一条路径。

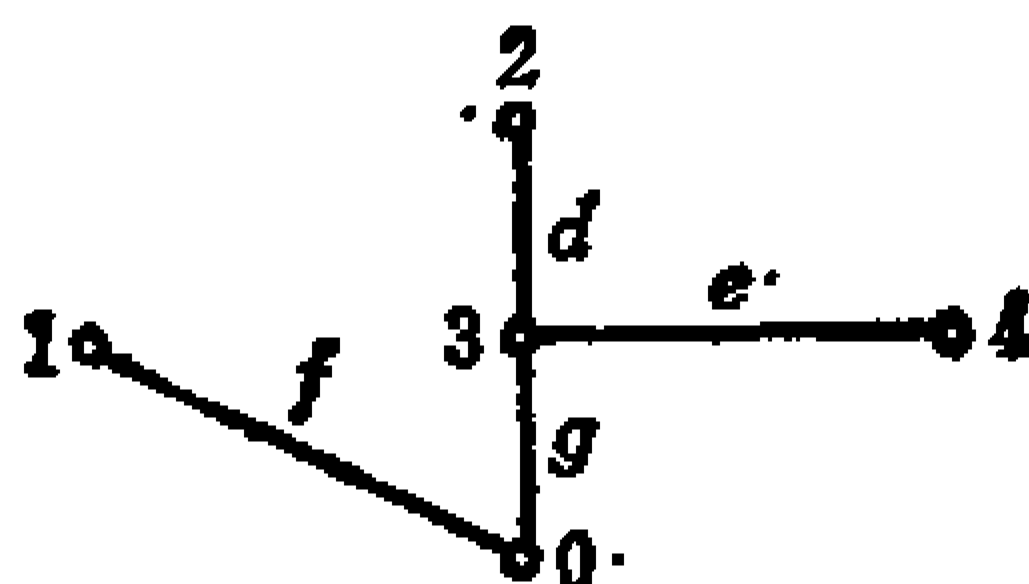


图1-7-1 $(d,e)\oplus(f,g)$

在所得的线图$P_{rs}\oplus P_{tu}$中，r，s，t，u的度显然都是奇数，因此$P_{rs}\oplus P_{tu}$不是一条路径。现在，我们来定义τ图。

定义1-7-1 如果一个线图中，既不包含回路，又没有孤立

点，则称此线图为 τ 图。若在一个 τ 图中，所有度为奇数的顶点是i_1，i_2，…，i_m，则用符号$\tau_{(i_1i_2\cdots i_m)}$来表示这个 τ 图。

例如，图 1-7-1 所示的线图是一个 τ 图，其中度为奇数的顶点是1，2，3，4。因此，可以用符号 $\tau_{(1234)}$ 来表示这个线图。

定理1-7-1 在一个线图中，设P_{rs}是顶点 r 和 s 之间的一条路径，P_{tu}是顶点 t 和 u 之间的一条路径，其中 r，s，t，u 互不相同，则$P_{rs}\oplus P_{tu}$或者是一个 τ 图 $\tau_{(rstu)}$，或者是 τ 图$\tau_{(rstu)}$和若干回路的无重边并。

这个定理可以推广为

定理1-7-2 设 τ 图$\tau_{(i_1i_2\cdots i_m)}$和$\tau_{(j_1j_2\cdots j_n)}$是同一线图的子图，若$(i_1i_2\cdots i_m)\oplus(j_1j_2\cdots j_n)$ 非空，则 $\tau_{(i_1i_2\cdots i_m)}\oplus\tau_{(j_1j_2\cdots j_n)}$ 或者是一个 τ 图$\tau_{((i_1i_2\cdots i_m)\oplus(j_1j_2\cdots j_n))}$，或者是 τ 图 $\tau_{((i_1i_2\cdots i_m)\oplus(j_1j_2\cdots j_n))}$和若干回路的无重边并。

考虑每个顶点的度，便可完成这个定理的证明。这里为了简单，在集合$(i_1i_2\cdots i_m)$作为下标时，我们省掉了其中的逗号。

例1-7-1 图1-7-2(a)中$\tau_{(1240)}$和图1-7-1中 $\tau_{(1234)}$ 的环和是

$$\tau_{(1240)}\oplus\tau_{(1234)}=(b,f)\oplus(d,e,f,g)=(b,d,e,g)$$

它是$\tau_{(30)}$和回路 (b,d,e) 的无重边并，如图1-7-2(c)所示。另外，图1-7-1中$\tau_{(1234)}$和图1-7-2(b)中$\tau_{(2340)}$的环和是

$$\tau_{(1234)}\oplus\tau_{(2340)}=(d,e,f,g)\oplus(c,d,e,f)=(c,g)$$

它是$\tau_{(10)}$，如图1-7-2(d)所示。

定理1-7-1还可以用另一种方法推广。

定理1-7-3 设 $P_{i_1j_1},P_{i_2j_2},\cdots,P_{i_kj_k}$ 是一个线图中顶点 i_p 和 $j_p(p=1,2,\cdots,k)$ 之间的路径，并设 $(i_1,j_1)\oplus(i_2,j_2)\oplus\cdots\oplus(i_k,j_k)\neq\phi$，则$P_{i_1j_1}\oplus P_{i_2j_2}\oplus\cdots\oplus P_{i_kj_k}$ 或者是一个 τ 图$\tau_{((i_1j_1)\oplus(i_2j_2)\oplus\cdots\oplus(i_kj_k))}$，或者是 $\tau_{((i_1j_1)\oplus(i_2j_2)\oplus\cdots\oplus(i_kj_k))}$ 和若干回路的无重边并。

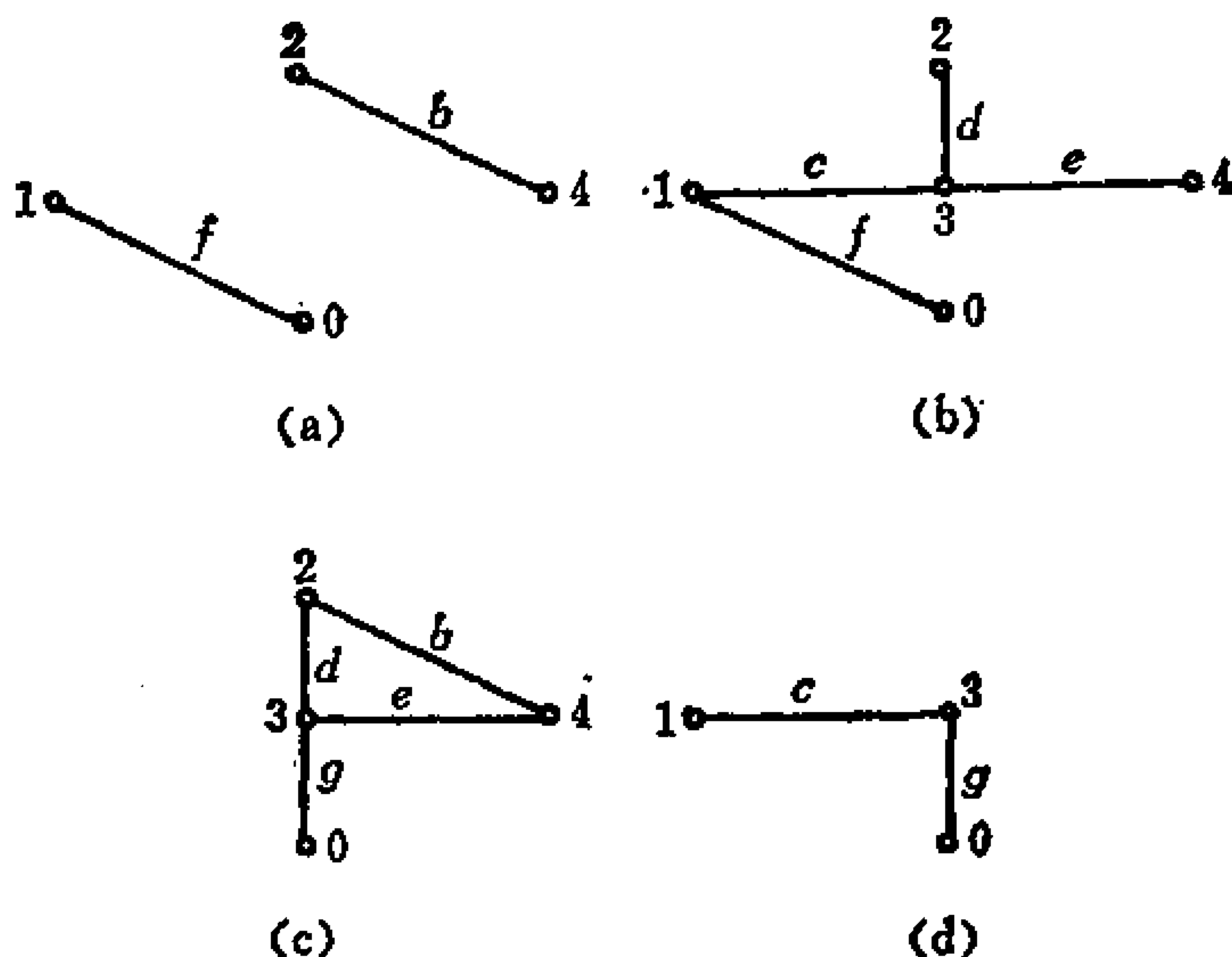


图1-7-2　τ图及τ图和回路的无重边并

(a)$\tau_{(1240)}$；(b)$\tau_{(2240)}$；(c)$\tau_{(30)}$和回路(b,d,e)的无重边并；(d)$\tau_{(10)}$

考虑所得图中每个顶点的度，便可完成这个定理的证明。

现在，我们已经作好准备，可以来讨论由若干集合组成的集体$\{P_{i_r j_r}\}$ $(r=1,2,\cdots,k)$ 了。下面的定理给出 τ 图集体的一个重要性质。

定理1-7-4　设r,s,t,u是一个连通线图G中四个互不相同的顶点，$\{P_{rs}\}$是顶点r和s之间所有路径的集体，$\{P_{tu}\}$是顶点t和u间所有路径的集体，则

$$\{P_{rs}\}\otimes\{P_{tu}\}=\{\tau_{(rstu)}\} \qquad (1\text{-}7\text{-}1)$$

其中，$\{\tau_{(rstu)}\}$是G中所有τ图$\tau_{(rstu)}$的集体。

为完成这个定理的证明，只需说明，对任何$\tau_{(rstu)}$，都存在一对路径P_{rs}和P_{tu}，使得$P_{rs}\oplus P_{tu}$是τ图。在证明这样一对路径

存在之前，我们先来研究 τ 图的一些重要性质。

引理1-7-1 设 τ 是一个具有 n_v 个顶点的连通 τ 图，则 τ 恰有 n_v-1 条边。

证明： 用数学归纳法。设 $\tau^{(2)}$ 是有两个顶点的连通 τ 图。由于不含回路，$\tau^{(2)}$ 必恰有一条边，因此在这种情形下引理成立。假定对所有具有 k 个顶点的连通 τ 图，引理为真，我们要证明，一个具有 $k+1$ 个顶点的连通 τ 图 $\tau^{(k+1)}$ 恰有 k 条边。因为 $\tau^{(k+1)}$ 不含回路，故在 $\tau^{(k+1)}$ 中，短路一条边 e（即删去边 e，并将 e 的两个端点重合在一起），将得到一个具有 k 个顶点的连通 τ 图。根据归纳假设，这个 τ 图恰有 $k-1$ 条边。因此 $\tau^{(k+1)}$ 恰有 k 条边。这就证明了引理。（证毕）

引理1-7-2 对于不同的顶点 i 和 j，任何 τ 图 $\tau_{(ij)}$ 是 i 和 j 间的一条路径。

证明： 我们用加进一条边的方法来证明这个引理。由 $\tau_{(ij)}$ 的定义可知，$\tau_{(ij)}$ 中所有异于 i 和 j 的顶点的度均为偶数。因此，加进一条以 i 和 j 为端点的边 y 后，$\tau_{(ij)}\cup(y)$ 必为欧拉图。并且 $\tau_{(ij)}\cup(y)$ 一定是一个回路。否则，如果 $\tau_{(ij)}\cup(y)$ 是回路的无重边并，则 $\tau_{(ij)}$ 中必至少包含一个回路，这与 $\tau_{(ij)}$ 是 τ 图的假设矛盾。因此 $\tau_{(ij)}$ 是一条路径。这也表明，$\tau_{(ij)}$ 是连通的。

定理1-7-4的证明 因为据定理 1-7-1，$P_{rs}\oplus P_{tu}$ 或者是一个 τ 图 $\tau_{(rstu)}$，或者是 τ 图 $\tau_{(rstu)}$ 和若干回路的无重边并。所以我们只需证明，对于 $\{\tau_{(rstu)}\}$ 中任一 τ 图 $\tau_{(rstu)}$，存在 $\{P_{rs}\}$ 中一条路径 P_{rs} 和 $\{P_{tu}\}$ 中一条路径 P_{tu}，使 $P_{rs}\oplus P_{tu}=\tau_{(rstu)}$。

假定 $\tau_{(rstu)}$ 是由 K 个最大连通子图组成的。注意，在 $\tau_{(rstu)}$ 中，度为奇数的顶点有四个。前面说过，在一个连通线图中，度为奇数的顶点个数必为偶数。因此，若 $K>2$，则必至少有一个最大连通子图，它的每个顶点的度均为偶数。显然这个最大连通子图

是欧拉图，因而它或者是一个回路，或者是回路的无重边并。但是，根据定义，$\tau_{(rstu)}$中不可能包含回路。所以，K必不大于2，

情形1　假定$K=2$。设g_1和g_2是$\tau_{(rstu)}$的两个最大连通子图，则顶点r，s，t，u中必恰有两个在g_1内，另两个在g_2内.因为在g_1和g_2中都没有回路，故g_1和g_2都是τ图。于是由引理7-1-2知，g_1和g_2都是路径。根据这四个顶点不同的位置，可分为两种情况：

1.若r和s在g_1中，则由引理1-7-2知，$g_1=P_{rs}$，$g_2=P_{tu}$，这正是我们所求的路径。

2.若r和t在g_1中，则$g_1=P_{rt}$，$g_2=P_{su}$，如图1-7-3(a)所示。由于我们假设存在着r，s间的路径P_{rs}和t，u间的路径P_{tu}，所以在这个线图（我们从中得到了P_{rt}和P_{su}）中，存在着一条连接g_1的一个顶点和g_2的一个顶点的路径。设这条路径是P'，如图1-7-3(b)所示。于是显然有两条所求的路径P_{rs}和P_{tu}，使$P_{rs}\oplus P_{tu}=\tau_{(rstu)}$。

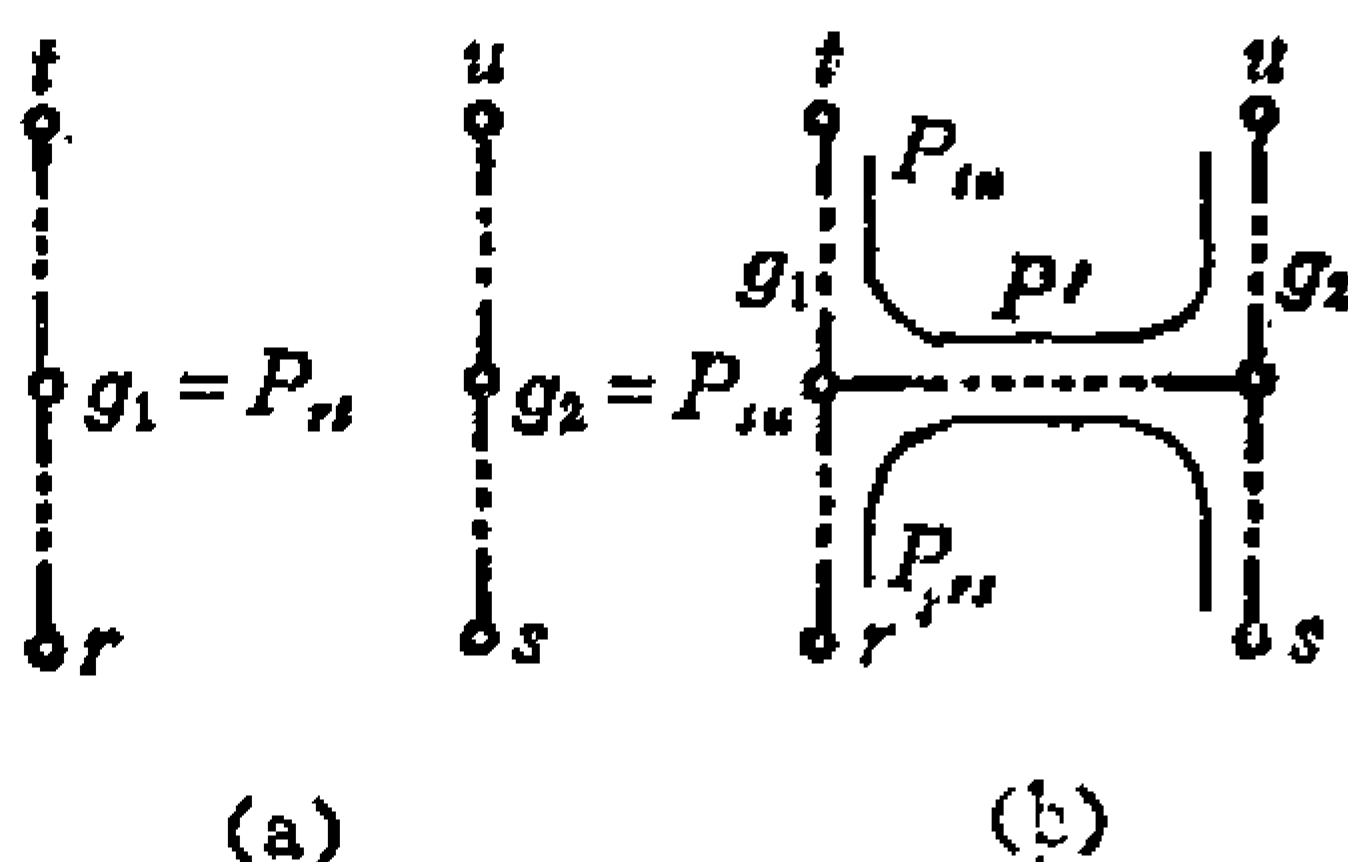


图1-7-3　$\tau_{(rstu)}$和路径P_{rs}，P_{tu}

(a)情形1（2）的$\tau_{(rstu)}$；(b)存在路径P'

情形2　假定$K=1$，则$\tau_{(rstu)}$是连通的。我们从顶点r开始取一个开边列，显然这个边列将终止于顶点s，t或u。用g表示由这个开边列中所有边组成的线图，由于$\tau_{(rstu)}$不含回路，故g必为一条路径。并且线图$[\tau_{(rstu)}-g]$不含回路，且恰有两个

顶点的度为奇数。因此$[\tau_{(rstu)}-g]$必为τ图，从而由引理1-7-2知，它也是一条路径。 设这条路径和g分别为P_1和P_2，注意P_1和P_2没有公共边。若P_1和P_2至少有两个公共顶点，则$P_1\cup P_2=\tau_{(rstu)}$至少包含一个回路，与$\tau_{(rstu)}$是$\tau$图的假设矛盾。如果$P_1$和$P_2$没有公共顶点，则$P_1\cup P_2=\tau_{(rstu)}$是一个分离图，也出现矛盾。因此，$P_1$和$P_2$必恰有一个公共顶点，如图1-7-4(a)和(b)所示。

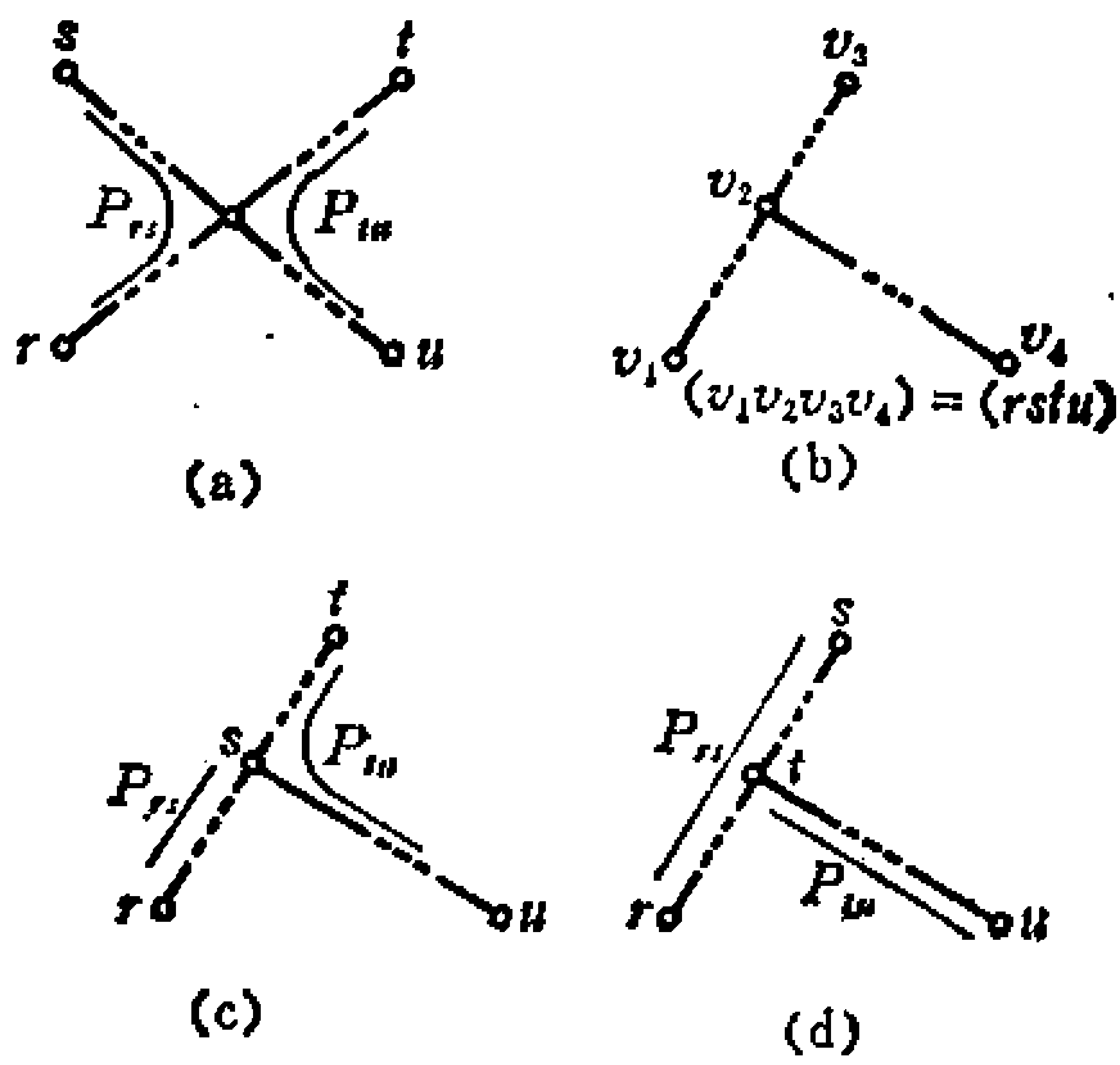


图1-7-4 $\tau_{(rstu)}$的结构

(a)$P_1\cup P_2$的一种结构； (b)$P_1\cup P_2$的另一种结构；

(c)顶点r、s、t、u的位置； (d)顶点r、s、t、u的位置

若$\tau_{(rstu)}$如图1-7-4(a)所示，则显然存在路径P_{rs}和P_{tu}，使得$P_{rs}\oplus P_{tu}=\tau_{(rstu)}$，故定理成立。假定$\tau_{(rstu)}$如图1-7-4(b)所示，不失一般性，设$v_1=r$，则只有两种不同的类型，一种是$v_2=s$，另一种是$v_2=t$。若$v_2=s$，如图1-7-4(c)所示，则可得

到所求的路径 P_{rs} 和 P_{tu}，这就证明了定理。当 $v_2=t$ 时，如图1-7-4(d)所示，也可以选择两条路径，使定理成立。（证毕）

从定理1-7-4的证明中，可以得到以下结论。

引理1-7-3 对于一个连通图，有

$$\{P_{rs}\}\otimes\{P_{tu}\}=\{P_{rt}\}\otimes\{P_{su}\} \quad (1\text{-}7\text{-}2)$$

例如，图1-7-2(a)中的 $\tau_{(1240)}$ 显然可以由 $P_{10}\oplus P_{24}$ 得到，这里 $P_{10}=(f)$，$P_{24}=(b)$。然而，它也可以由 $P_{12}\oplus P_{40}$ 得到，这里 $P_{12}=(d,f,g)$ 和 $P_{40}=(b,d,g)$ 是图1-6-3所示线图中的两条路径。

以下定理给出了 τ 图的另一个有趣的性质，即一个 τ 图总可以分解为若干条路径的无重边并。

定理1-7-5 τ 图 $\tau_{(i_1i_2\cdots i_{2k})}$ 是 k 条路径 $P_{j_1j_2}$，$P_{j_3j_4}$，$\cdots$，$P_{j_{2k-1}j_{2k}}$ 的无重边并。这里，集合 $(i_1, i_2, \cdots, i_{2k})$ 等于集合 $(j_1,j_2,\cdots,j_{2k})$。

证明： 用数学归纳法。当 $k=1$ 时，据引理1-7-2，$\tau_{(i_1i_2)}$ 即为路径 $P_{i_1i_2}$。假定当 $k=m$ 时定理成立，则当 $k=m+1$ 时，我们从顶点 i_1 出发，在 $\tau_{(i_1i_2\cdots i_{2m+2})}$ 中找一个开边列。显然这个开边列将终止于顶点 $i_2, i_3, \cdots, i_{2m+2}$ 中的一个。假定它终止于顶点 i_r，$2\leqslant r\leqslant 2m+2$。用 g 表示这个开边列中所有边组成的线图。显然 g 是一条路径 $P_{i_1i_r}$，而线图 $(\tau_{(i_1i_2\cdots i_{2m+2})}-g)$ 显然是一个 τ 图 $\tau_{(i_2\cdots i_{r-1},i_{r+1}\cdots i_{2m+2})}$，它包含 $2m$ 个度为奇数的顶点。因此，由归纳假设知，$(\tau_{(i_1i_2\cdots i_{2m+2})}-g)$ 是 m 条路径 $P_{j_1j_2}$，$\cdots$，$P_{j_{2m-1}j_{2m}}$ 的无重边并。这样，再加上一条路径 $P_{j_{2m+1}j_{2m+2}}=g$（其中 $j_{2m+1}=i_1, j_{2m+2}=i_r$），我们就可以说，$\tau_{(i_1i_2\cdots i_{2m+2})}$ 是 $m+1$ 条路径 $P_{j_1j_2},\cdots,P_{j_{2m-1}j_{2m}},P_{j_{2m+1}j_{2m+2}}$ 的无重边并。其中，$(i_1,i_2,\cdots,i_{2m+2})=(j_1,j_2,\cdots j_{2m+2})$。（证毕）

例1-7-2 由例1-6-4，图1-6-3所示线图的 $\{P_{12}\}$ 是

$$\{P_{12}\}=\{(a),(c,d),(d,f,g),(b,c,e),(b,e,f,g)\}$$

可以求得$\{P_{34}\}$为

$$\{P_{34}\}=\{P_{\{e\}}\}=\{(e),(b,d),(a,b,c),(a,b,f,g)\}$$

因此

$$\{\tau_{(1234)}\}=\{P_{12}\}\otimes\{P_{34}\}=\min\{P_r\oplus P_s;P_r\in\{P_{12}\},P_s\in\{P_{34}\}\}$$
$$=\{(a,e),(a,b,d),(b,c),(b,f,g,),(c,d,e),(d,e,f,g)\}$$

图1-7-5画出了这些τ图。

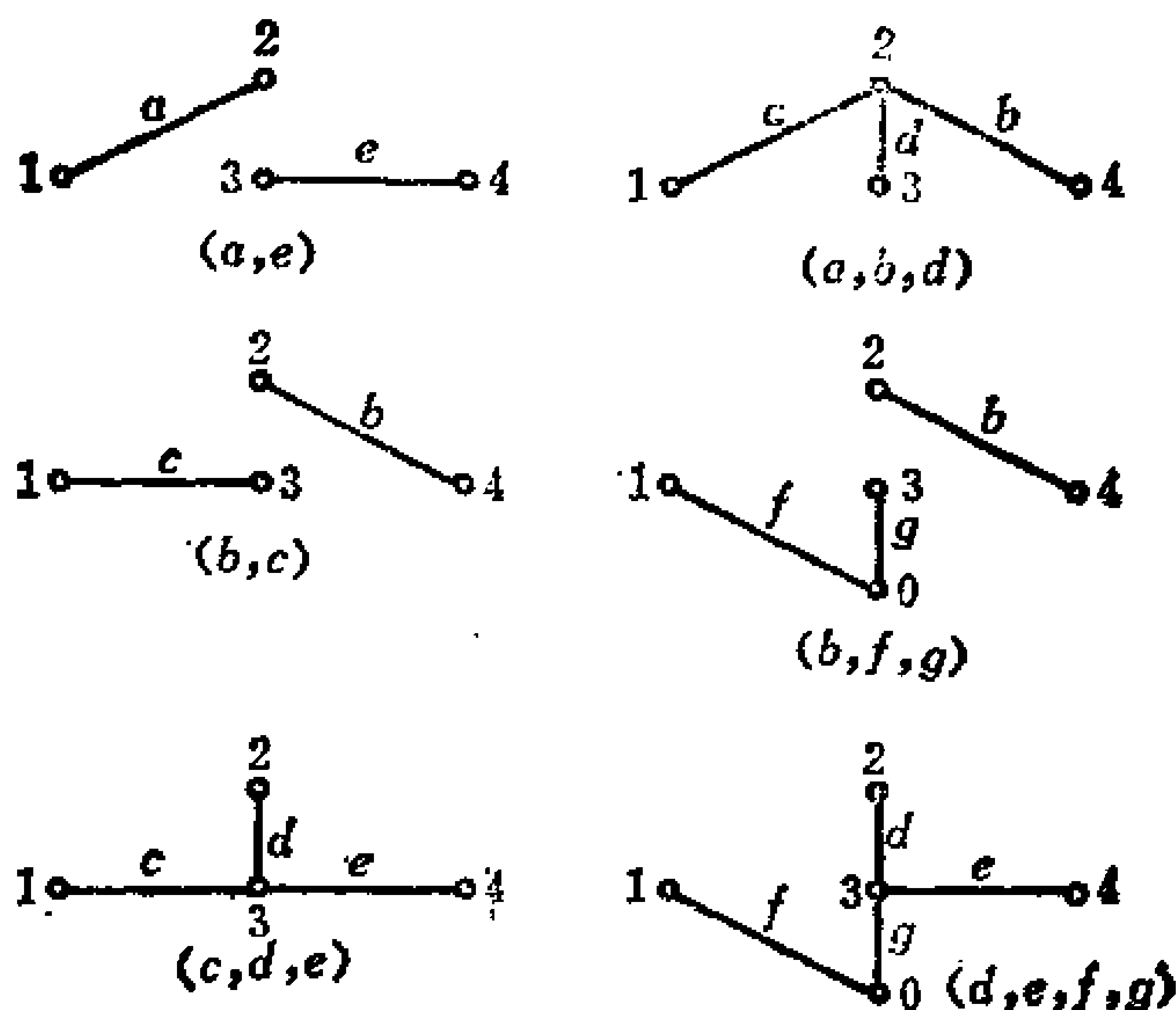


图1-7-5 $\{\tau_{(1234)}\}$

定理1-7-4还可作如下推广。

定理1-7-6 设$i_1,i_2,\cdots,i_k$是一个连通线图中互不相同的k个顶点，则

$$\{P_{i_1i_2}\}\otimes\{P_{i_3i_4}\}\otimes\cdots\otimes\{P_{i_{k-1}i_k}\}=\{\tau_{(i_1i_2\cdots i_k)}\} \qquad (1\text{-}7\text{-}3)$$

应用定理1-7-5和引理1-7-3，可以完成这个定理的证明。现

在可作进一步的推广。

定理1-7-7 设 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 是一个连通线图中的顶点，并设 $(i_1, i_2) \oplus (i_3, i_4) \oplus \cdots \oplus (i_{k-1} i_k)$ 是一个非空集合，则

$$\{P_{i_1 i_2}\} \otimes \{P_{i_3 i_4}\} \otimes \cdots \otimes \{P_{i_{k-1} i_k}\} = \{\tau_{((i_1 i_2) \oplus (i_3 i_4) \oplus \cdots \oplus (i_{k-1} i_k))}\} \tag{1-7-4}$$

证明： 设 $(i_1, i_2) \oplus (i_3, i_4) \oplus \cdots \oplus (i_{k-1}, i_k) = (j_1, j_2, \cdots, j_r)$，其中 $r \leqslant k$。据定理1-6-7，当 $i_u = i_m$ 时，有

$$\{P_{i_t i_u}\} \otimes \{P_{i_m i_n}\} = \{P_{i_t i_n}\}$$

因此可得

$$\{P_{j_1 j_2}\} \otimes \{P_{j_3 j_4}\} \otimes \cdots \otimes \{P_{j_{r-1} j_r}\} = \{P_{i_1 i_2}\} \otimes \{P_{i_3 i_4}\} \otimes \cdots \otimes \{P_{i_{k-1} i_k}\}$$

据定理1-7-4，上式左边等于 $\{\tau_{(j_1 j_2 \cdots j_r)}\}$，也就是 $\{\tau_{((i_1 i_2) \oplus \cdots \oplus (i_{k-1} i_k))}\}$。 （证毕）

定理1-7-4最终可推广为以下形式。

定理1-7-8 设 G 是一个连通线图。假定顶点集合的环和 $(i_1, i_2, \cdots, i_m) \oplus (j_1, j_2, \cdots, j_n)$ 非空，则

$$\{\tau_{(i_1 i_2 \cdots i_m)}\} \otimes \{\tau_{(j_1 j_2 \cdots j_n)}\} = \{\tau_{((i_1 i_2 \cdots i_m) \oplus (j_1 j_2 \cdots j_n))}\} \tag{1-7-5}$$

应用定理1-6-7和1-7-6，即可完成这个定理的证明。

例1-7-3 考虑图1-7-6所示的线图。现在 $\{\tau_{(1245)}\}$ 和 $\{\tau_{(1345)}\}$ 分别为

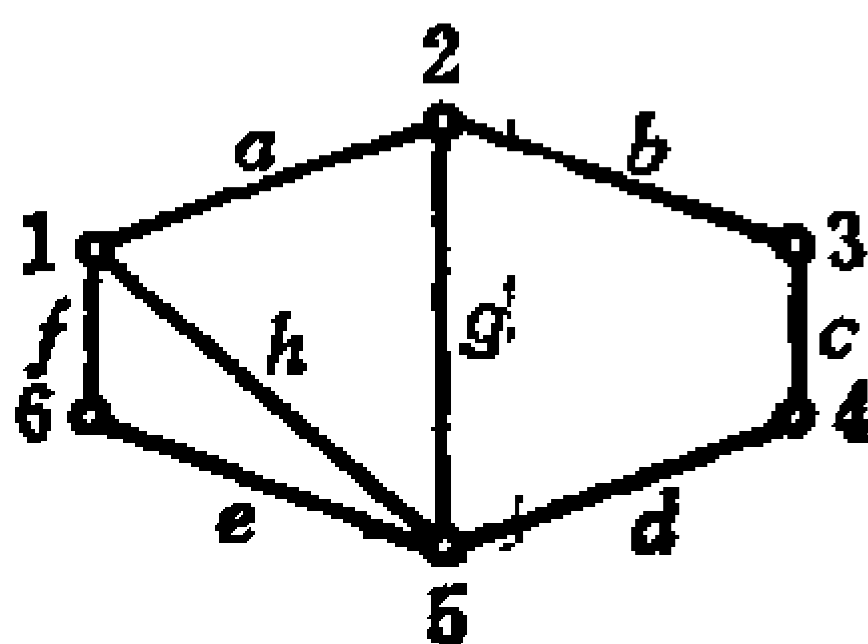


图1-7-6 一个连通线图

$$\{\tau_{(1245)}\} = \{(a,d),(a,b,c,g),(b,c,h),(b,c,e,f),$$
$$(d,g,h),(d,e,f,g)\}$$
$$\{\tau_{(1346)}\} = \{(a,b,d,e),(b,d,f,g),(a,b,d,f,h),$$
$$(a,c,e,g),(c,e,h),(c,f),(b,d,e,g,h)\}$$

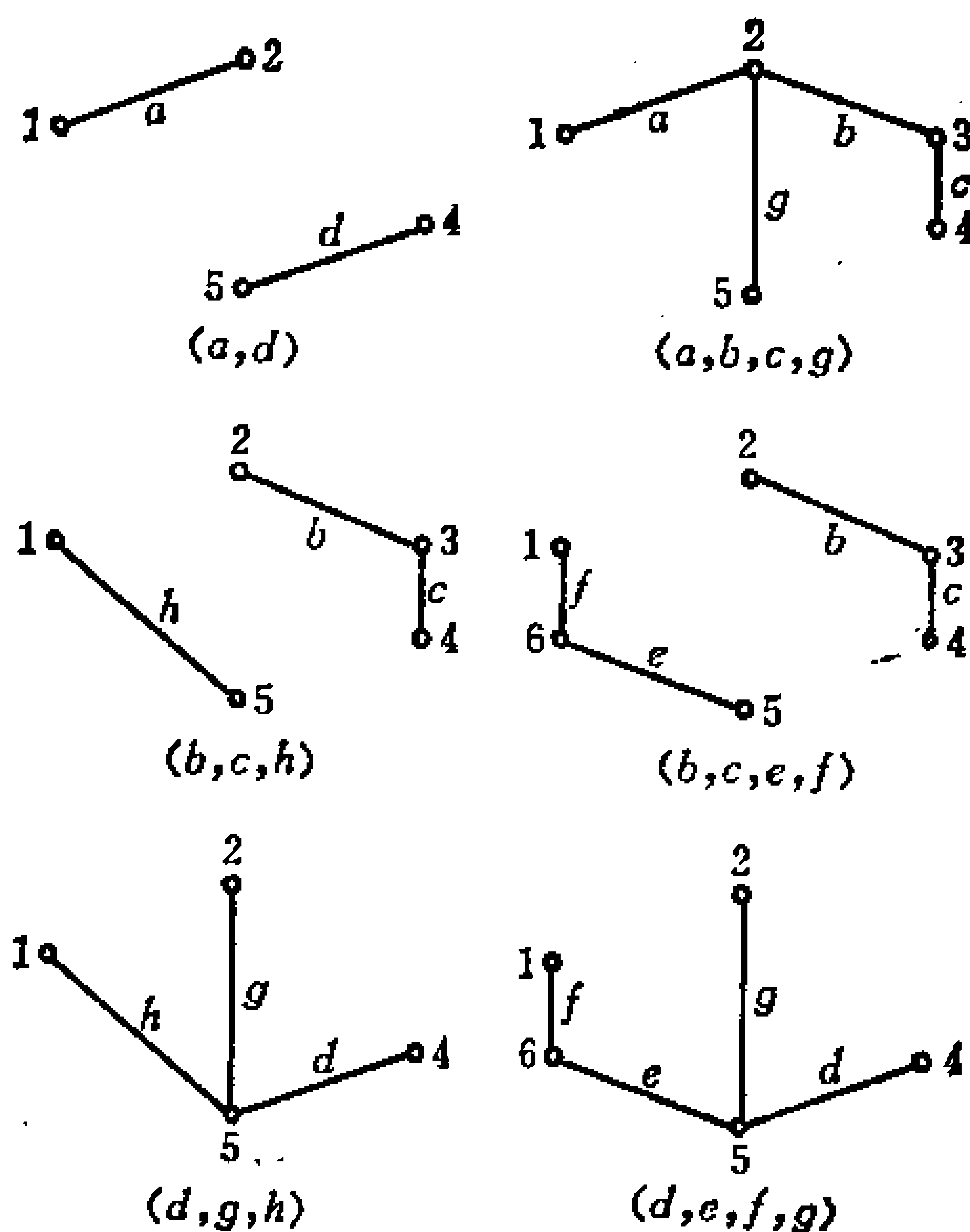


图1-7-7 $\{\tau_{(1245)}\}$

$\{\tau_{(1245)}\}$中所有的τ图如图1-7-7所示，$\{\tau_{(1346)}\}$中所有的τ图如图1-7-8所示。于是$\{\tau_{(1245)}\}$和$\{\tau_{(1346)}\}$的环积为

$$\{\tau_{(1246)}\} \otimes \{\tau_{(1346)}\} = \{\tau_{(2356)}\}$$
$$= \{(b,e),(a,b,f,g),(b,f,h),(c,d,e,g)$$
$$(a,c,d,e,h),(a,c,d,f),(c,d,f,g,h)\}$$

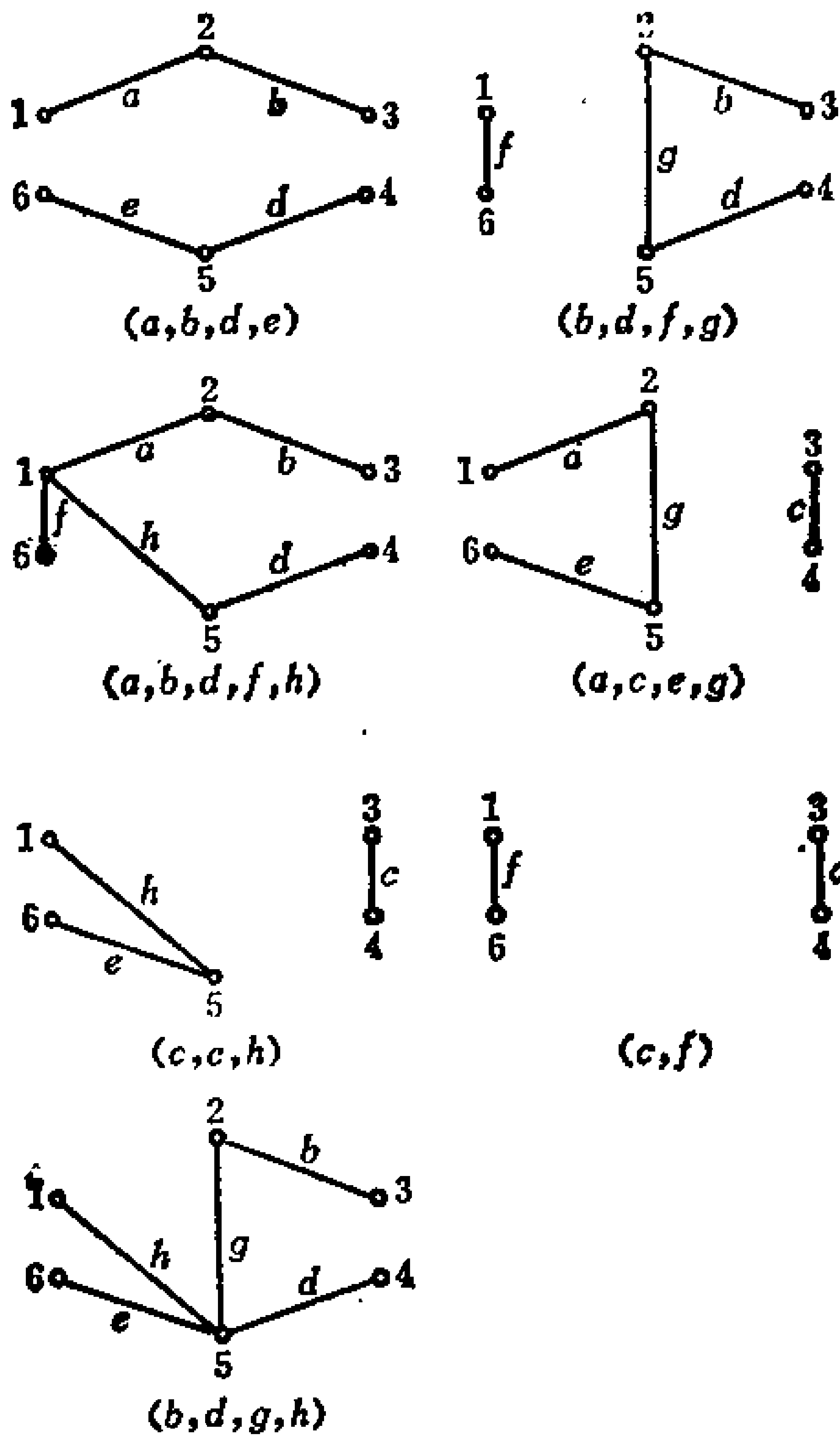


图1-7-8　$\{\tau_{(1246)}\}$

假定（1，2，3，…，n）是一个不可分线图中所有顶点的集合。用符号$\{\{\tau\},\{C\}\}$表示由集体$\{C\}$和所有可能的集体$\{\tau_{(i_1i_2\cdots i_{2r})}\}$为元素组成的集合，其中$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{2r}\leqslant n$，$r=1,2,\cdots[n/2]$。这里$[n/2]$表示最接近但不大于$n/2$的整数。于是我们可以看到，集合$\{\{\tau\},\{C\}\}$满足以下条件：

1.对于$\{\{\tau\},\{C\}\}$中任何集体$\mathscr{U}_1$和$\mathscr{U}_2$，

$$\mathscr{U}_1\otimes\mathscr{U}_2=\mathscr{U}_2\otimes\mathscr{U}_1\text{在}\{\{\tau\},\{C\}\}\text{中。}$$

2.在$\{\{\tau\},\{C\}\}$中存在一个集体$\mathscr{U}_0=\{C\}$，使得对于$\{\{\tau\},\{C\}\}$中的任何集体$\mathscr{U}$，

$$\mathscr{U}\otimes\mathscr{U}_0=\mathscr{U}$$

3.对于$\{\{\tau\},\{C\}\}$中任何集体$\mathscr{U}$，

$$\mathscr{U}\otimes\mathscr{U}=\mathscr{U}_0\qquad\text{（自反性）}$$

4.对于$\{\{\tau\},\{C\}\}$中任何集体$\mathscr{U}_1$，$\mathscr{U}_2$和$\mathscr{U}_3$，

$$(\mathscr{U}_1\otimes\mathscr{U}_2)\otimes\mathscr{U}_3=\mathscr{U}_1\otimes(\mathscr{U}_2\otimes\mathscr{U}_3)$$

因此，$\{\{\tau\},\{C\}\}$在环积运算下构成阿贝尔群。

习　题

1.以下线图如果存在，则将它们画出，其顶点度数分别为（a）2，2，2，2，2；（b）2，3，4，5，6；（c）3，3，4，5，5，5，6。

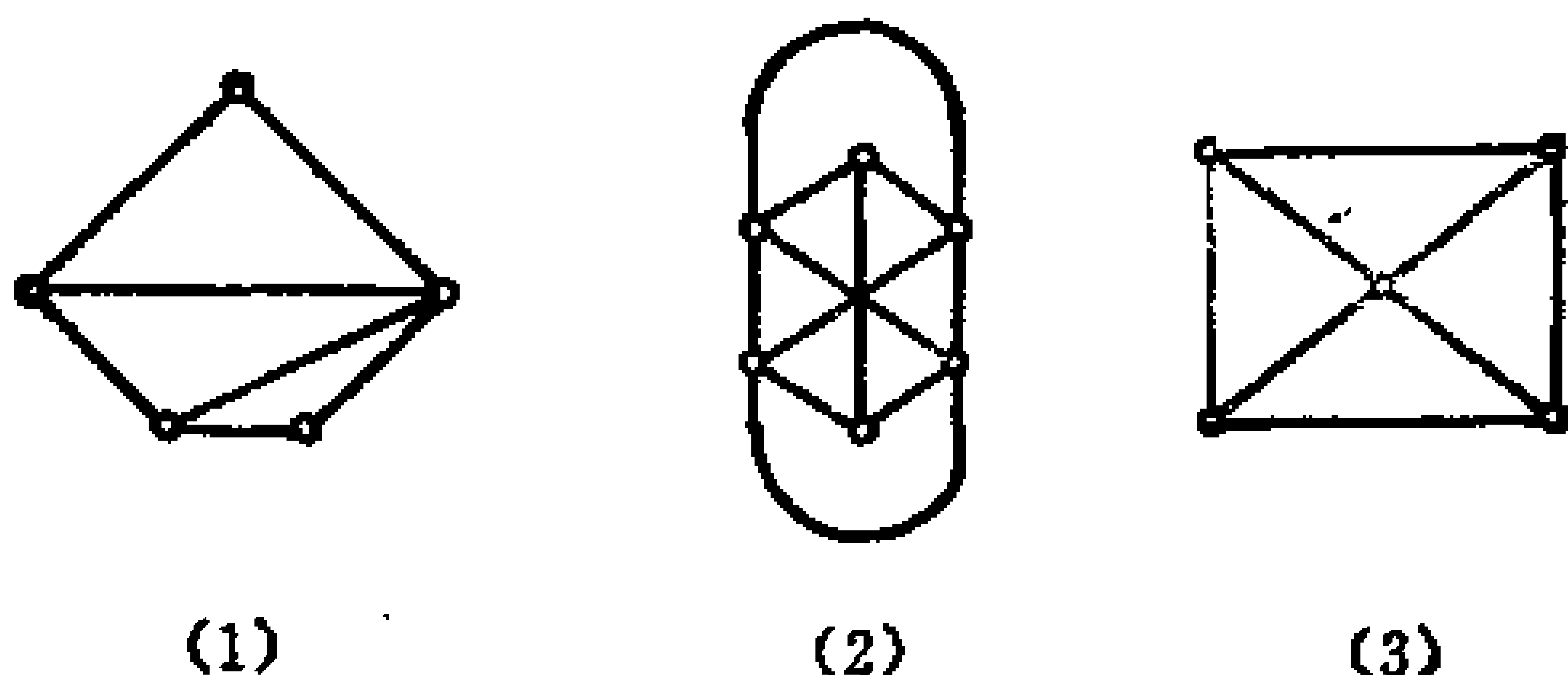
2.在以下三个线图中，你能分别找出包含其所有边的开边列吗？

3.证明有n个顶点的连通线图至少包含$n-1$条边。

4.证明有n个顶点的连通线图，若其边数超过$n-1$，则它至少包含一个回路。

5.设连通线图G有n（>1）个顶点。证明，若G由$n-1$条边组成，则G中至少有一个顶点的度为奇数。

6.设P是一条路径，证明在P中任两点之间恰有一条路径。



图P-1-2

7.设G是一个连通线图，i和j是G中仅有的两个度为奇数的顶点。证明对于i和j之间的任一路径P，$G-P$是一个欧拉图。

8.设G是一个不含自环的线图。证明顶点p是割点，当且仅当存在G的一个子图g，使得g的一个顶点和$G-g$的一个顶点之间的每一条路径都经过顶点p。

9.设P是连通线图G中顶点i和j之间的一条路径，又设$\{C\}$是G中所有的回路和空集的集体。证明，一般说来，集体$\{P \oplus C;\ C \in \{C\}\}$不包含顶点$i$和$j$之间所有的路径。

10.设G是一个可分线图，$\{P_{ij}\}$是G中顶点i和j间所有路径的集体。找出$\min\{P_r \oplus P_s;\ P_r, P_s \in \{P_{ij}\}\}$是$G$中所有回路的集体的条件。

11.在一个连通图中，如果每两个顶点之间恰有一条边连接，则称此连通图为完全图。设G是一个n阶完全图，试证明或否定

(a)G中有$\sum_{k=3}^{n}\frac{(k-1)!}{2}\binom{n}{k}$个回路。

（b）G中包含边e的回路有$\sum\limits_{k=1}^{n-2} k!\binom{n-2}{k}$个。

（c）G中任意两点间的路径有$\sum\limits_{k=1}^{n-2}\frac{(n-2)!}{(n-k-2)!}+1$条。

12.证明定理1-7-1。

13.证明定理1-7-2。

14.证明定理1-7-3。

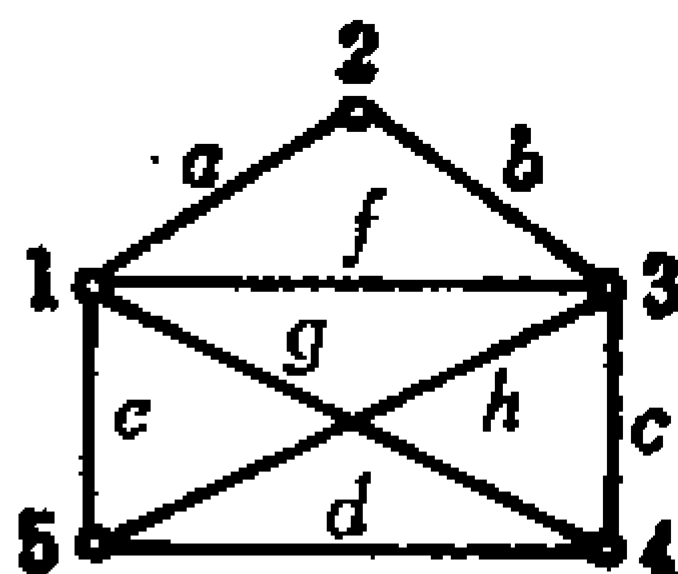


图 P-1-15

15.求出图 P-1-15所示线图的所有欧拉图集体$\{E\}$。

16.求出图 P-1-15所示线图的所有回路和空集的集体$\{C\}$。

17.求出图 P-1-15所示线图中顶点 1 和 2 之间所有路径的集体$\{P_{12}\}$。

18.求出图 P-1-15所示线图的$\{P_{12}\}$，$\{P_{23}\}$和$\{P_{13}\}$，然后说明

$$\{P_{12}\}\otimes\{P_{23}\}=\{P_{13}\}$$

19.在图 P-1-15所示的线图中，用以下两种方法求$\{\tau_{(1234)}\}$：（a）利用已经求得的$\{P_{13}\}$和$\{P_{24}\}$，计算$\{P_{13}\}\otimes\{P_{24}\}$；（b）利用已经求得的$\{C\}$，先计算$\{P_{[e]}\}$和$\{P_{[c]}\}$，然后求出$\{P_{[e]}\}\otimes\{P_{[c]}\}=\{\tau_{(1234)}\}$。

第二章　关联集和割集

2-1　关　联　集

前面，我们讨论了在环和运算下构成群的两个子图集体，即{E}和{E,M_{ij}}。在这一章里，我们要讨论另一种在环和运算下构成群的子图，称为割集和伪割。割集的性质与回路性质非常相似，伪割的性质则与路径性质几乎相同。这里我们集中讨论割集的性质。首先我们研究一种特殊类型的割集，称为关联集。因为不论是割集还是关联集，都不包含自环，为方便起见，我们作如下假设。

假设　除非特别说明，我们假设一个线图不含自环。

定义2-1-1　与一个顶点相关联的所有边的集合，称为与此顶点对应的关联集。用符号$S(v)$表示与顶点v对应的关联集。

根据这个定义，如果没有边与顶点v关联，则与此顶点对应的关联集是空集。并且我们可以看到，在一个线图中，每个顶点有一个关联集。例如，在图2-1-1中，线图由五个顶点构成，因此有五个关联集。与顶点0对应的关联集$S(0)$是(f, g).与顶点1，2，3，4对应的关联集$S(1)$，$S(2)$，$S(3)$，$S(4)$分别为(a, c, f)，(a, b, d)，(c, d, e, g)和(b, e)。

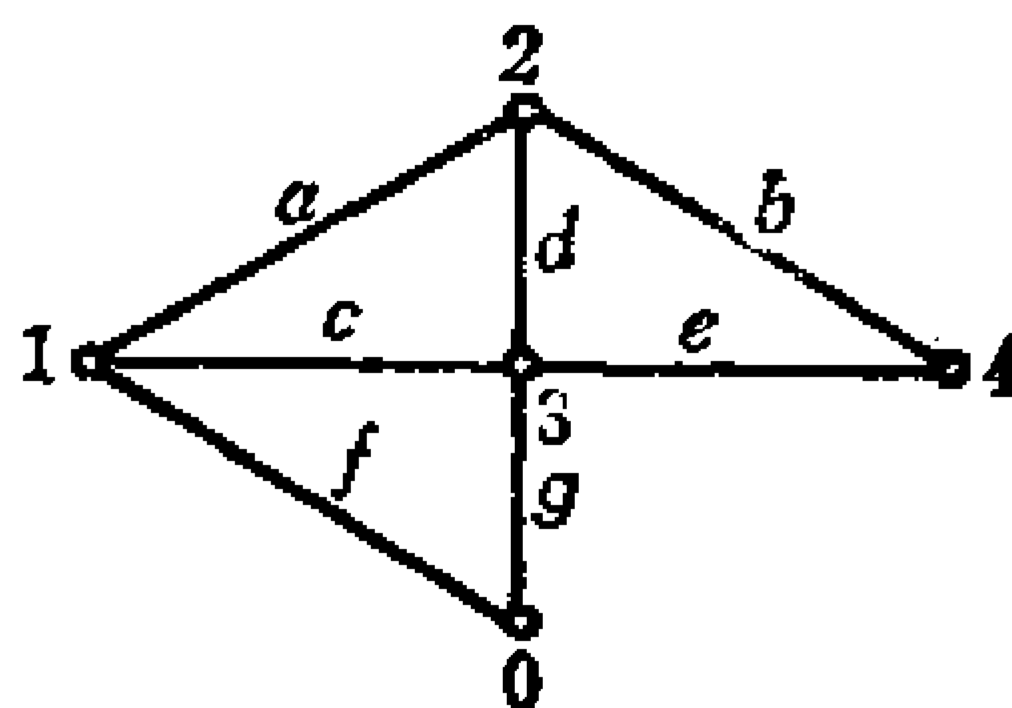


图2-1-1　一个线图

我们知道，两个欧拉图的环和是欧拉图。因此，两个回路的环和或者是回路，或者是回路的无重边并。另一方面，两个关联集的环和一般说来既不是关联集，又不是关联集的无重边并。为了说明这一点，我们考虑一个线图 G 中的关联集 $S(v_1)$ 和 $S(v_2)$。要使这两个关联集的环和 $S(v_1)\oplus S(v_2)$ 是一个关联集，$S(v_1)\oplus S(v_2)$ 中每一条边必须与一个顶点 v 关联。并且，在线图 G 中，$S(v_1)\oplus S(v_2)$ 里的这些边，必然只与顶点 v' 关联。换句话说，假定

$$S(v_1)=(e_1,\ e_2,\cdots,e_p,a_1,a_2,\cdots,a_m)$$

$$S(v_2)=(e_1,e_2,\cdots,e_p,b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

注意边 $e_1,e_2,\cdots,e_p$ 既在 $S(v_1)$ 中，又在 $S(v_2)$ 中，则 $S(v_1)\oplus S(v_2)=(a_1,a_2,\cdots,a_m,b_1,b_2,\cdots b_n)$。由于边 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 不与顶点 v_2 关联〔因为它们不在 $S(v_2)$ 中〕，故 $S(v_1)\oplus S(v_2)$ 不是与顶点 v_2 对应的关联集。同样，$S(v_1)\oplus S(v_2)$ 不是与顶点 v_1 对应的关联集。只有当 $S(v_1)\oplus S(v_2)$ 中的所有边都在与一个异于 v_1，v_2 的顶点 v' 关联的边集之中，并且没有其他的边与此顶点相关联时，$S(v_1)\oplus S(v_2)$ 才是一个关联集。因此，所给的图必是图2-1-2所示的那样的最大连通子图。

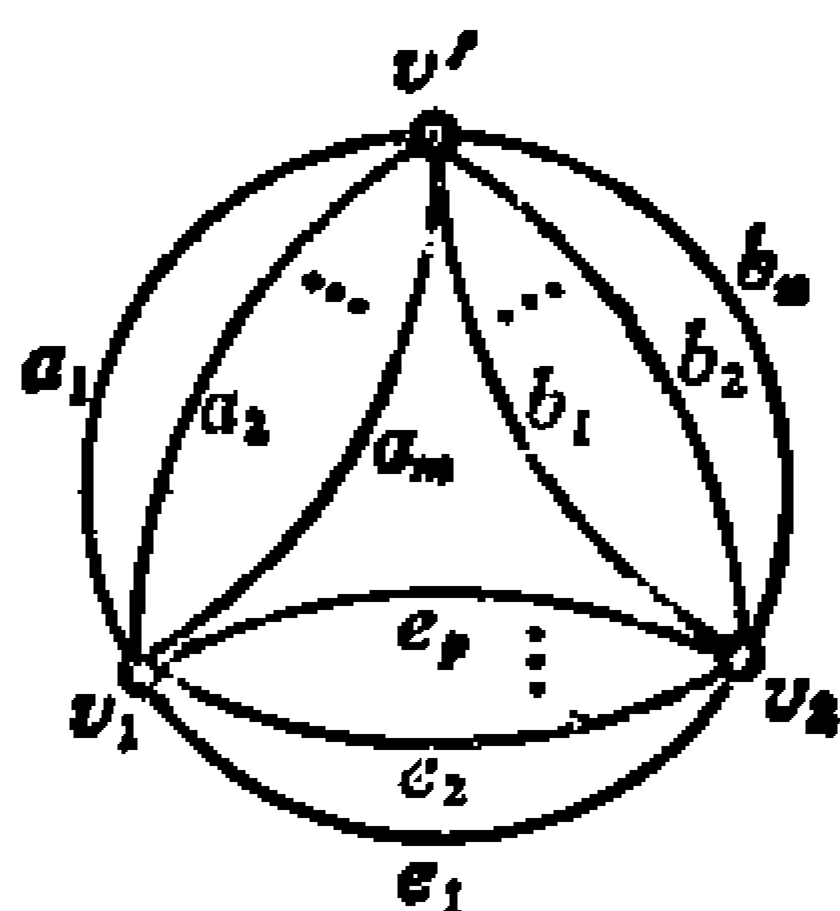


图2-1-2 $S(v_1)\oplus S(v_2)$ 是关联集时线图的结构

因此，一般地说，两个关联集的环和不是关联集。假定 $S(v_1)\oplus S(v_2)$ 不是关联集，那么，$S(v_1)\oplus S(v_2)$ 是不是关联集的无重边并呢？如果 $S(v_1)$ 和 $S(v_2)$ 没有公共边，则 $S(v_1)\oplus S(v_2)$ 显然是关联集的无重边并。但是，这只是一种特殊情况。现在，我们假设 $S(v_1)$ 和 $S(v_2)$ 有公共边，正如我们在上

面的讨论中所作的那样。要使$S(v_1)\oplus S(v_2)$成为关联集的无重边并，$S(v_1)\oplus S(v_2)$必可分解为k个集合$S(v'_1)$，$S(v'_2)$，…，$S(v'_k)$，其中$k\geqslant 2$，使得$S(v_1)\oplus S(v_2)$中的每一条边正好是这些集合中的一条边，并且对于$r=1,2,\cdots,k$，集合$S(v'_r)$必为与所给线图中的顶点v'_r对应的关联集。这样，所给的线图必然包含图2-1-3所示的子图为它的一个最大连通子图。因此，我们可以得出结论，一般地说，两个关联集的环和既不是一个关联集，也不是关联集的无重边并。

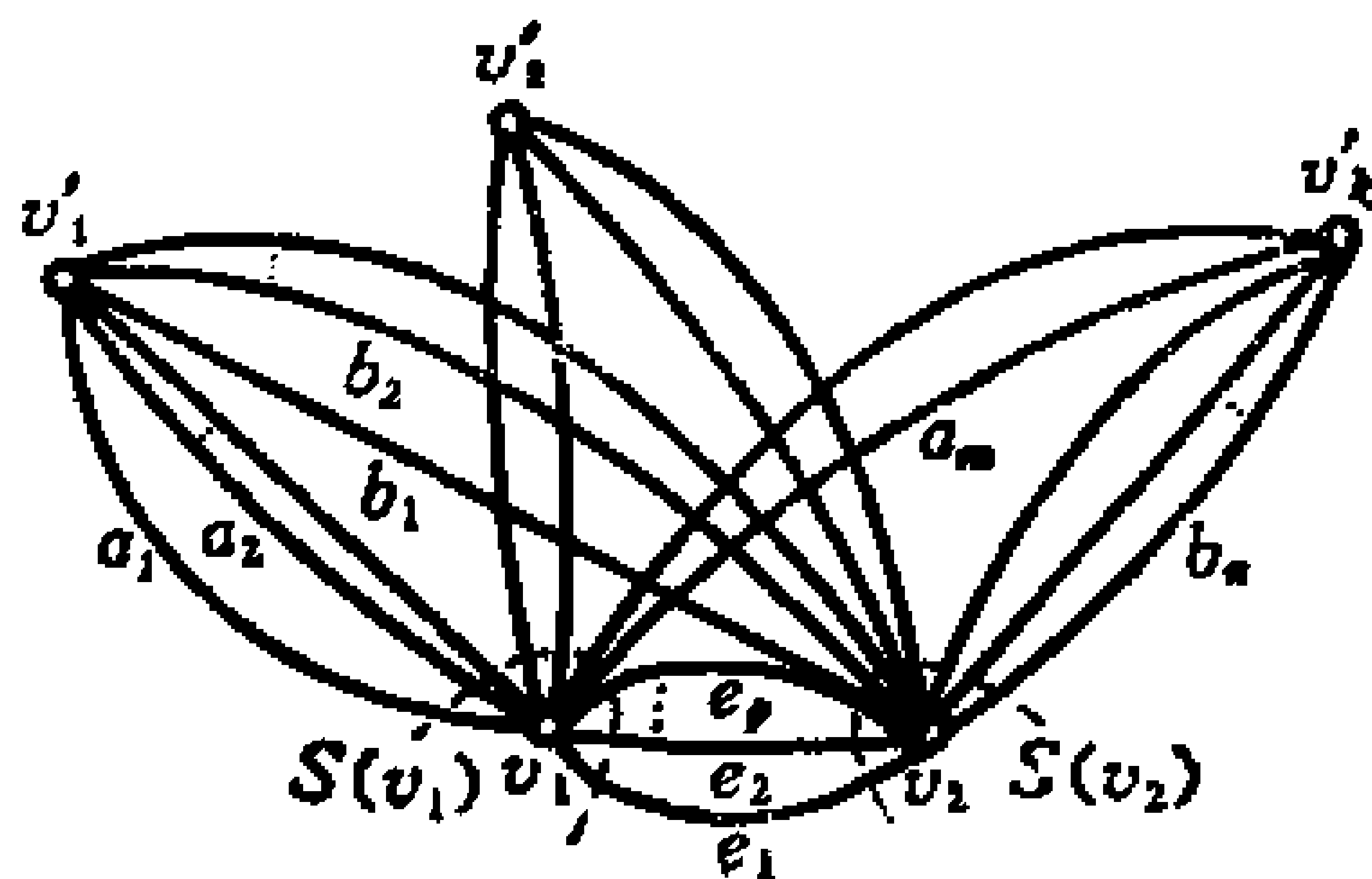


图2-1-3 $S(v_1)\oplus S(v_2)$是关联集的无重边并时线图的结构

2-2 割 集

为了定义割集，我们需要一个新的术语，称为线图的秩。

定义2-2-1 一个线图的秩等于$n_v-\rho$，这里n_v是顶点数，ρ是线图中最大连通子图的数目。例如，图2-1-1中线图的秩是4，图1-2-6中线图的秩是5，图1-3-5(a)中线图的秩是7。

假定从一个线图G中删除关联集$S(v_1)$的所有边，则所得的图G'包含G中除v_1以外的所有顶点。于是，如果所得的图G'中最大连通子图的数目与原图G相同，G'的秩就比G的秩少1。但

是，也有这样的线图，删除一个关联集的所有边后所得的图的秩，并不是比原图的秩少1。例如，图2-2-1中线图G的关联集$S(v_1)$由e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6组成。删除这些边后，所得的图G'如图2-2-2所示。G的秩是6，而G'的秩是$n_v-\rho=6-2=4$，它比原图G的秩少2，而不是少1。

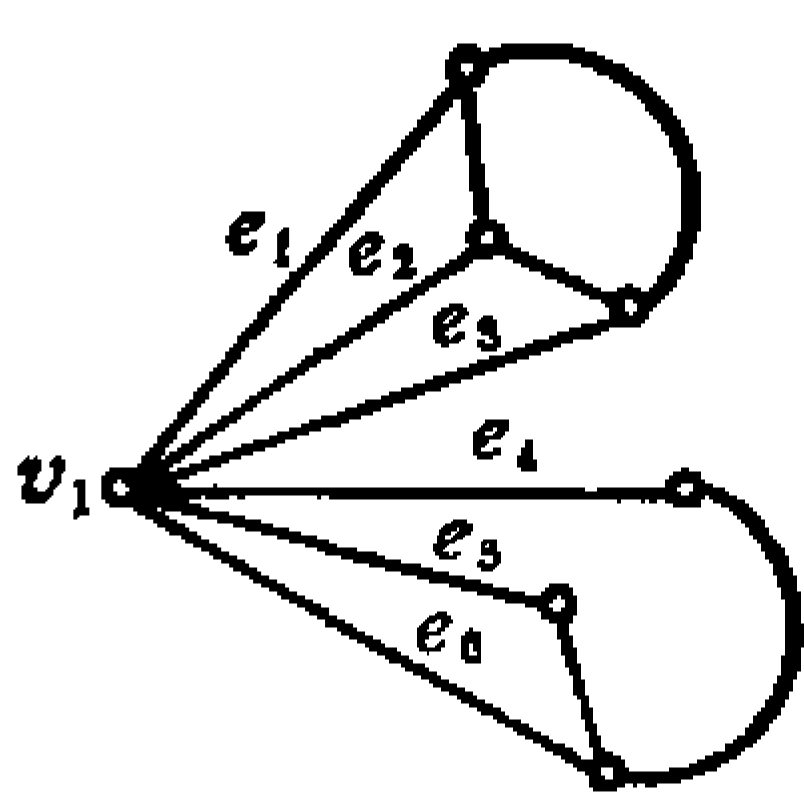


图2-2-1　可分图G

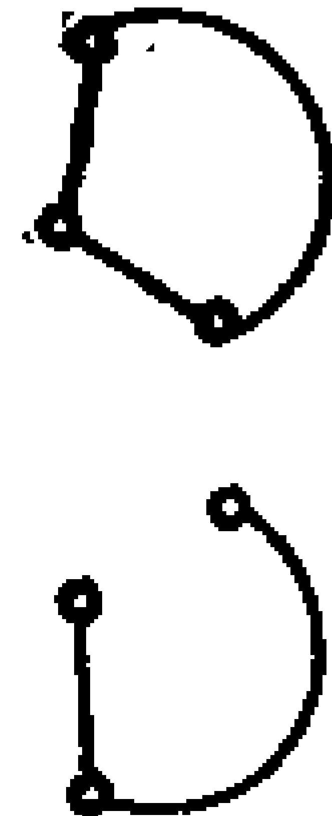


图2-2-2　从G中删除$S(v_1)$的所有边得到的图

一个称为"割集"的边集合，具有这样的性质：删除其中所有的边，正好使秩减少1。下面是通常采用的割集定义。

定义2-2-2　如果线图G中的一个边集S具有这样的性质：(1)从G中删除S的所有边，使秩正好减少1；(2) S的任一真子集*都不具备性质(1)，则称边集S为割集。

例2-2-1　考虑图2-1-1中线图的集合(b,c,d,f)，可以看出：(1)删除$(b.c,d,f)$中所有的边产生的线图如图2-2-3(a)所示，它的秩是$5-2=3$（注意原来线图的秩是4）；(2)删除(b,c,d,f)中的一部分而不是全部边，则使线图保持连通。例如，从原图中删除边b,c,d得到图2-2-3(b)所示的图，它的秩仍为4，没有改变。于是据定义知，集合(b,c,d,f)是一个割集。

在上述线图中，考虑集合(b,e,g)。删除(b,e,g)中的所有边产生的图如图2-2-3(c)所示，它的秩是$4-1=3$，因此删除这个

* 集合S的真子集是不等于S的子集。

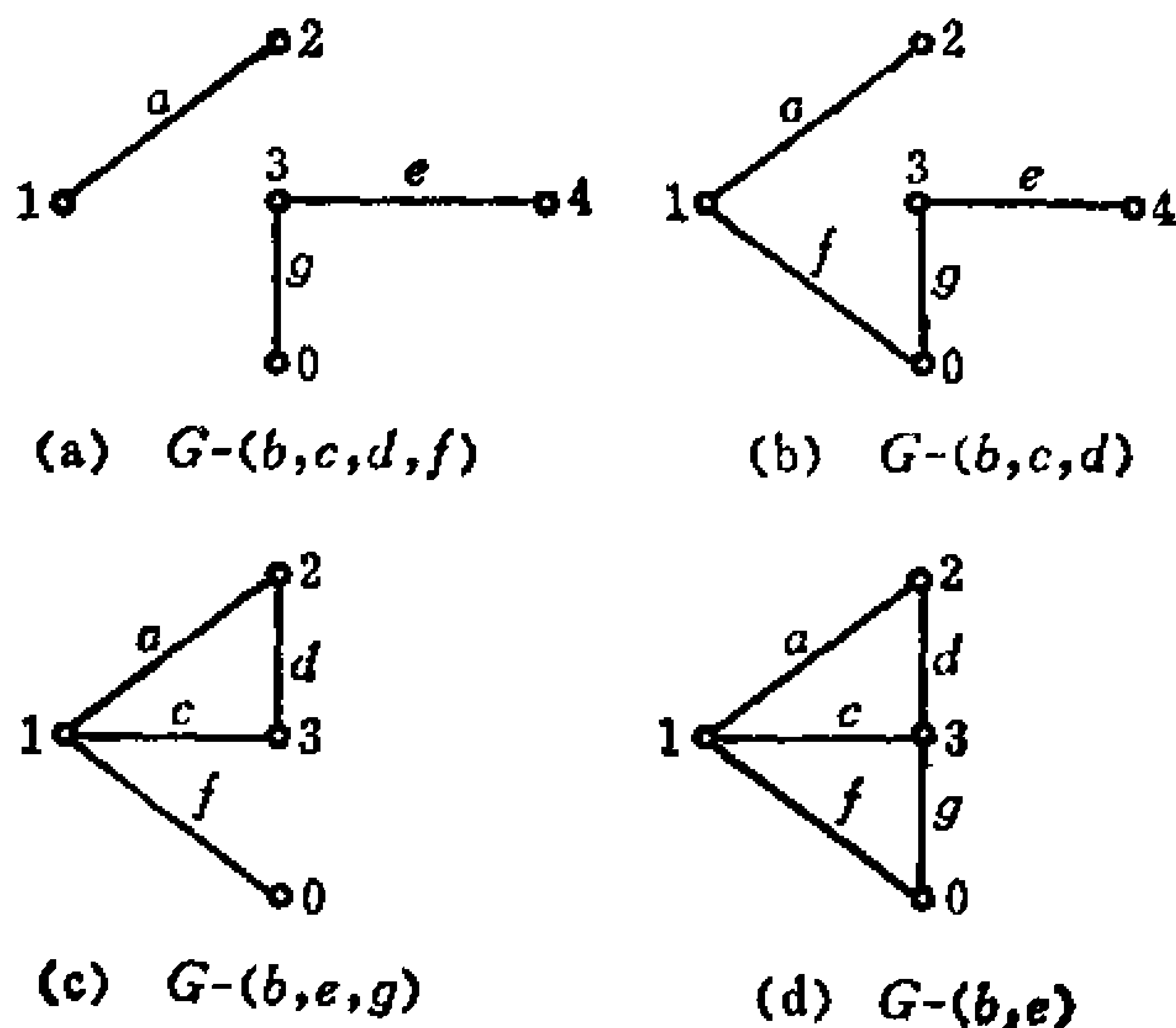


图2-2-3 线图G的子图

(a) $G-(b,c,d,f)$； (b) $G-(b,c,d)$；
(c) $G-(b,e,g)$； (d) $G-(b,e)$

集合的所有边使秩正好减少 1 。但是，存在 (b, e, g) 的真子集 (b,e)，删除子集(b,e)的所有边也使秩正好减少 1 ，这可以从图2-2-3(d)的图看出来。因此，据定义，(b,e,g)不是割集。

另一个例子是图2-2-1所示线图的关联集$S(v_1)$．前面说过，这个线图的秩是 6 ，而删除$S(v_1)$ 中所有边得到的图如图2-2-2所示，它的秩是 4 。因此据定义，$S(v_1)$不是割集。

定义2-2-3 一个完全图是在其任一对顶点之间恰有一条边的线图。

例如，图2-2-4所示的线图是由五个顶点组成的完全图。显然超过两个顶点的完全图是不可分的。

设G_C是一个完全图，$\Omega_c=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 是 G_c中所有顶点

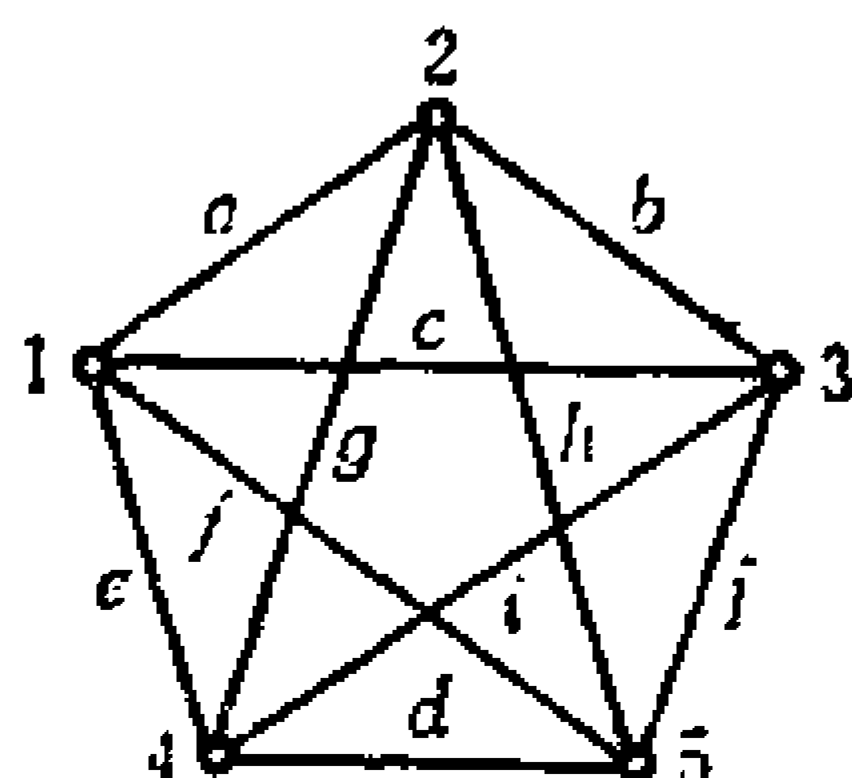


图2-2-4　一个完全图

的集合，则G_c的秩是$n-1$。又设Ω_1是Ω_c的真子集，$\bar{\Omega}_1$是Ω_c中所有不在Ω_1里的顶点的集合，因此

$$\Omega_1 \cup \bar{\Omega}_1 = \Omega_c \qquad (2\text{-}2\text{-}1)$$

$$\Omega_1 \cap \bar{\Omega}_1 = \phi \qquad (2\text{-}2\text{-}2)$$

例如，对$k<n$，若$\Omega_1=(v_1 v_2,\cdots,v_k)$，则$\bar{\Omega}_1=(v_{k+1},v_{k+2},\cdots,v_n)$。

定义2-2-4　符号$\mathscr{E}(\Omega_p\times\Omega_q)$表示所有从$\Omega_p$中顶点连接到$\Omega_q$中顶点的边的集合。

对于一个无向图，$\mathscr{E}(\Omega_p\times\Omega_q)$是连接$\Omega_p$中顶点和$\Omega_q$中的顶点的所有边的集合。例如，图2-2-4所示完全图的Ω_c是(1，2，3，4,5)．如果我们选取$\Omega_1=(1,2,3)$，则$\bar{\Omega}_1=(4，5)$，对于这两个顶点集合，我们有

$$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)=(a,b,c)$$

$$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_1)=(d)$$

$$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)=(e,f,g,h,i,j)$$

显然$\mathscr{E}(\Omega_c\times\Omega_c)=(a,b,c,d,e,f,g,h,i,j)$是所给完全图中所有的边。子图$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$如图2-2-5所示。

现在考虑G_c的子图$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)$．由于$G_c$是完全图，在$\Omega_1$的任两个顶点之间都有一条边相连，这条边是在子图$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)$中。因此在子图$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)$的任两个顶点之间有一条边。这就是说，$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)$是一个完全图。例如，假定我们选取图2-2-4所示完全图的$\Omega_1=(1,3,4,5)$，则$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)$如图2-2-6所示，显然它是一个包含四个顶点的完全图。

设Ω_1和Ω_2是Ω_c的真子集，并且

$$\Omega_1\cap\Omega_2=\phi \qquad (2\text{-}2\text{-}3)$$

我们来考虑子图$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_2)$．由于子图$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_2)$只包含图

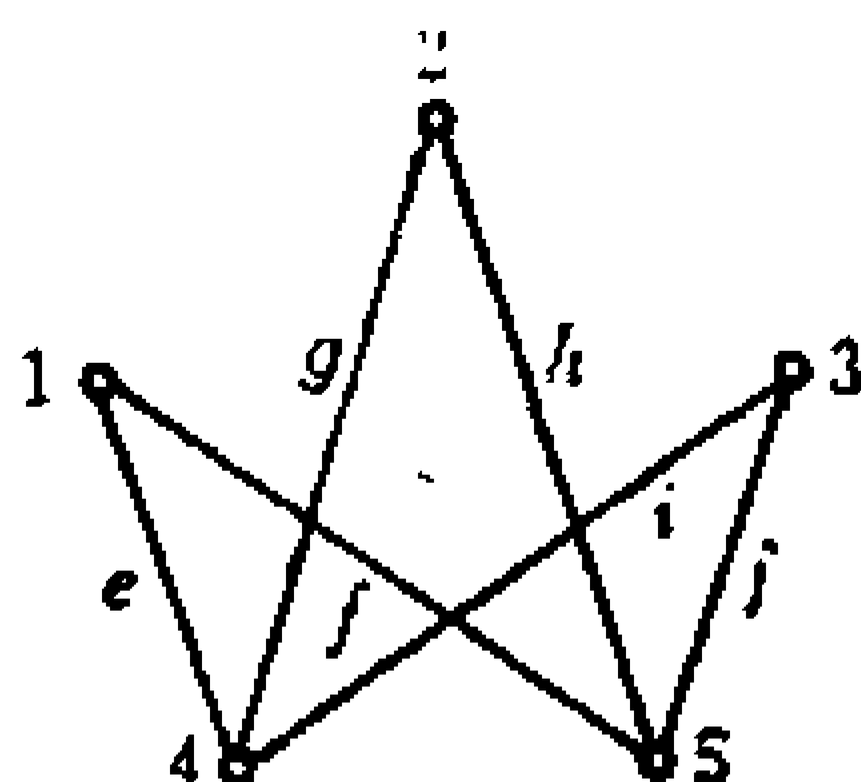


图2-2-5 子图$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$

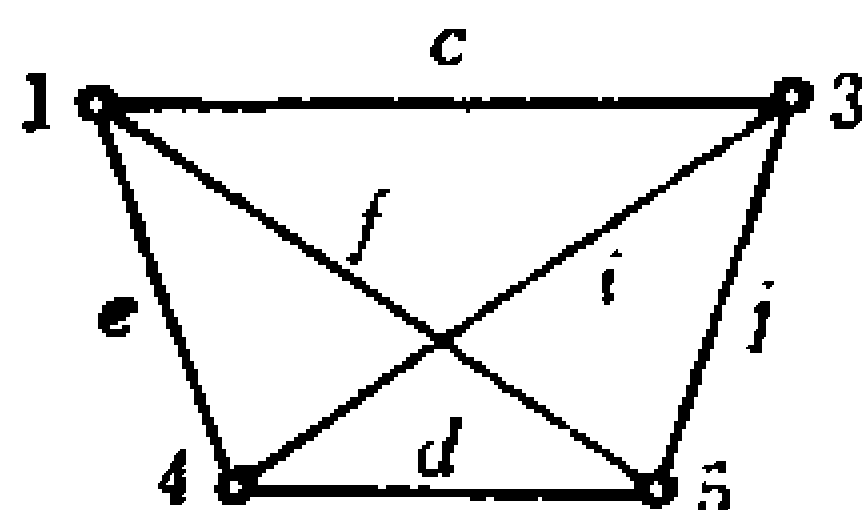


图2-2-6 一个子图

G_c中每一条连接Ω_1中顶点和Ω_2中顶点的边，而连接Ω_1中任两个顶点的边都不在此子图中，故子图$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_2)$不是完全图。下一个问题是，子图$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_2)$是不是连通的？设$v_1$是$\Omega_1$的顶点，$v_2$是$\Omega_2$的顶点，则由于$G_c$是完全图，在$G_c$中$v_1$和$v_2$间有一条边，而$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_2)$是连接$\Omega_1$的顶点和$\Omega_2$的顶点的所有边的集合，故在子图$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_2)$中，$v_1$和$v_2$间必存在一条边，因此在顶点$v_1$和$v_2$之间存在着一条路径（由一条边构成）。于是，为了回答上面提出的问题，我们只需要考查在Ω_1的任两个顶点之间和Ω_2的任两个顶点之间，是否都有$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_2)$里的路径。设$v_{1a}$和$v_{1b}$是$\Omega_1$的两个顶点，$v_2$是$\Omega_2$的一个顶点。因为在子图$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_2)$中存在$v_{1a}$和$v_2$之间的一条边，又存在$v_2$与$v_{1b}$之间的一条边，所以我们可以说，在$v_{1a}$和$v_{1b}$之间至少存在一条路径。因此在子图$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_2)$中，$\Omega_1$的任一对顶点之间，有一条路径。同样，在子图$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_2)$中，$\Omega_2$的任一对顶点之间也有一条路径。于是我们可以作出结论：子图$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_2)$连通的。例如，假定我们选取图2-2-4所示完全图的$\Omega_1=(1，2)$，$\Omega_2=(3，4)$，则子图$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_2)$如图2-2-7所示，显然它是连通的。

设Ω_1是Ω_c的真子集，且$\bar{\Omega}_1=\Omega_c-\Omega_1$。我们已经知道，子图$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)$是一个完全图。同样，子图$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_1)$也是一个完全图。又因为$\Omega_1\cap\bar{\Omega}_1=\phi$，故完全图$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)$与$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_1)$没有

共同的边和顶点。例如，在图2-2-4中所给出的完全图里，假定$\Omega_1=(1,2)$，则$\bar{\Omega}_1=(3,4,5)$。子图$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)\cup\mathscr{E}(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_1)$如图2-2-8所示，注意$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)$和$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_1)$没有共同的边和顶点。

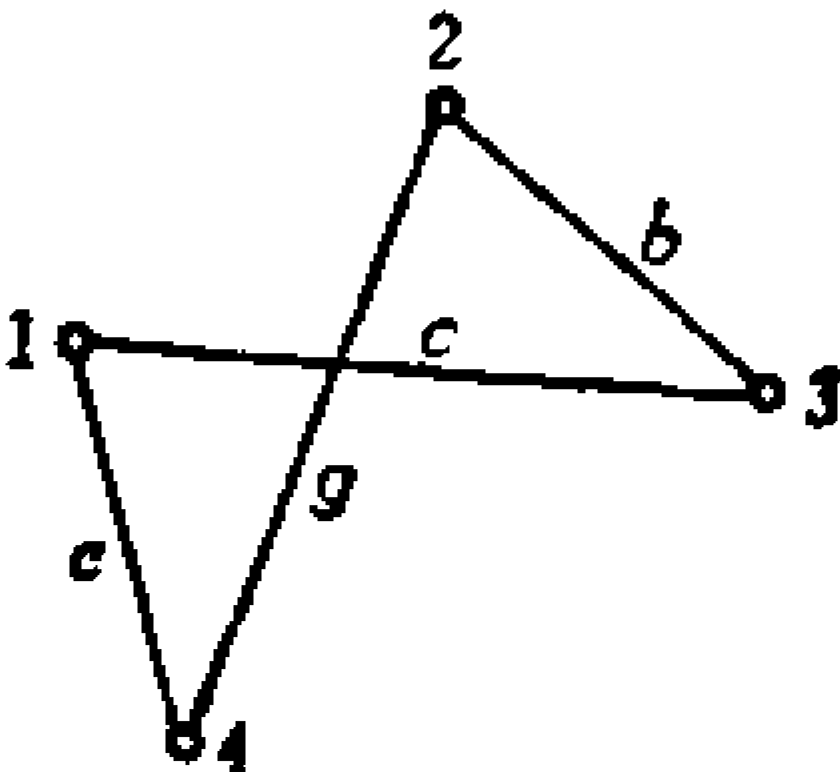


图2-2-7　子图$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)$

考虑完全图G_c的三个子图$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)$，$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$，和$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_1)$，设$e$是$G_c$中的任一条边，它的端点是$p$和$q$。根据$e$的端点的不同位置，我们分以下三种情况来讨论$e$的位置：

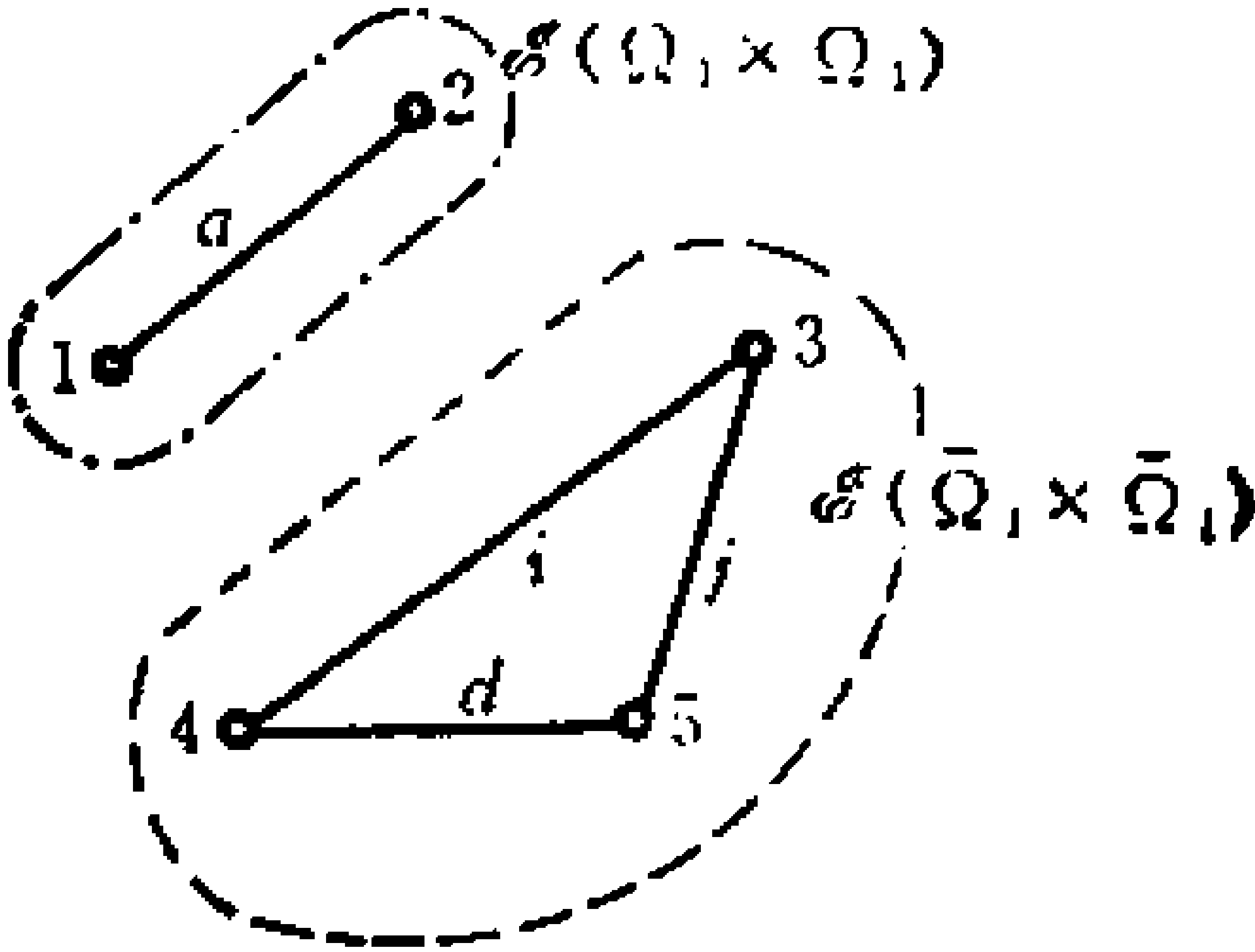


图2-2-8　一个子图

1.假定顶点p和q都在Ω_1中，则边e在子图$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)$中，而不在$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$和$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_1)$中。

2.假定p和q都在$\bar{\Omega}_1$中，则显然边e在$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_1)$中，而不在另外两个子图中。

3.假定顶点p在Ω_1中，顶点q在$\bar{\Omega}_1$中，则边e必在$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$中，而不在$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)$和$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_1)$中。

于是我们可以作出结论，G_c的每一边恰在子图$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)$，

$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$和$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_1)$之一中，也就是说，

$$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)\cup\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)\cup\mathscr{E}(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_1)$$
$$=\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)\oplus\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)\oplus\mathscr{E}(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_1)=\mathscr{E}(\Omega_c\times\Omega_c) \tag{2-2-4}$$

根据定义，$\mathscr{E}(\Omega_c\times\Omega_c)$就是所给完全图$G_c$。因此，如果我们从$G_c$中删除$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$ 的所有边，就得到 $\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)\cup\mathscr{E}(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_1)$.也就是

$$\mathscr{E}(\Omega_c\times\Omega_c)-\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)=\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)\cup\mathscr{E}(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_1) \tag{2-2-5}$$

现在我们已为证明集合$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$是割集作好了准备。根据割集的定义，我们需要证明，删除$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$的所有边使$G_c$的秩恰好减少 1 。并且，我们还要证明，如果只从$G_c$中 删 除$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$的一部分而不是全部边，则不会减少秩。

假定Ω_1至少由两个顶点组成，而$n\geqslant4$.由式(2-2-5)可以看出，从G_c中删除$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$的所有边产生子 图 $\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)\cup\mathscr{E}(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_1)$，因此所得的图包含$G_c$的所有顶点。我 们 已 经 看 到，子图$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)$和$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_1)$没有公共顶点，因此子图$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)\cup\mathscr{E}(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_1)$包含两个最大连通子 图。于 是 所 得 图$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)\cup\mathscr{E}(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_1)$的秩是$n-2$。注意$G_c$的秩是$n-1$ 。这就 证 明 了删除集合$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$的所有边恰使秩减少 1 。

因为$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$中任一条边，是连接在$\Omega_1$的一个顶点和$\bar{\Omega}_1$的一个顶点之间的边，如果我们把集合$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$的任一条边，添加到两个最大连通子图$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)$和$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_1)$中，这两图就被连接在一起，变成一个连通图，显然其秩为$n-1$。于 是 从G_c中 删除$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$的一部分而不是全部边，就不会使它的秩减少。因此根据定义，集合$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$是一个割集。

我们曾假设Ω_1和$\bar{\Omega}_1$至少包含两个顶点。现在我 们 要 考虑这样一种情况，即Ω_1由一个顶点（比如说 v_1） 构成，也就是 $\Omega_1=(v_1)$.则集合 $\mathscr{E}[(v_1)\times(\bar{v}_1)]$是与顶点 v_1 关联的所有边的集合，

也就是说，这个集合是与顶点 v_1对应的关联集。因为 $\mathscr{E}[(v_1)\times(v_1)]=\phi$，由式(2-2-5)，我们可以看到，从 G_c中删除这个关联集中所有的边产生一个连通图$\mathscr{E}[(\bar{v}_1)\times(\bar{v}_1)]$，它由$n-1$个顶点构成，于是所得的图的秩比$G_c$少 1 。并且，将此关联集 $\mathscr{E}[(v_1)\times(\bar{v}_1)]$ 的任一条边添入所得的图$\mathscr{E}[(\bar{v}_1)\times(\bar{v}_1)]$中，结果得到一个包含顶点$v_1$ 的连通图。因此，这个线图的秩是$n-1$。于是，根据割集的定义，关联集$\mathscr{E}[(v_1)\times(\bar{v}_1)]$是一个割集。换句话说，一个完全图的任一关联集是割集。

定理2-2-1 设Ω_1是完全图Ω_c的一个真子集，又设$\bar{\Omega}_1=\Omega_c-\Omega_1$，则$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$是一个割集。

例2-2-2 考虑图2-2-4所示的完全图。注意$\Omega_c=(1,2,3,4,5)$.设$\Omega_1=(1,4)$，则$\bar{\Omega}_1=(2,3,5)$，$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)=(a,c,d,f,g,i)$。删除$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$中的所有边，得到图2-2-9所示的线图。从这个线图中，我们可以清楚地看到，$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$是一个割集。

设$\Omega_2=(1)$，则$\bar{\Omega}_2=(2,3,4,5)$，而$\mathscr{E}(\Omega_2\times\bar{\Omega}_2)=(a,c,e,f)$，这是一个关联集，也是一个割集。

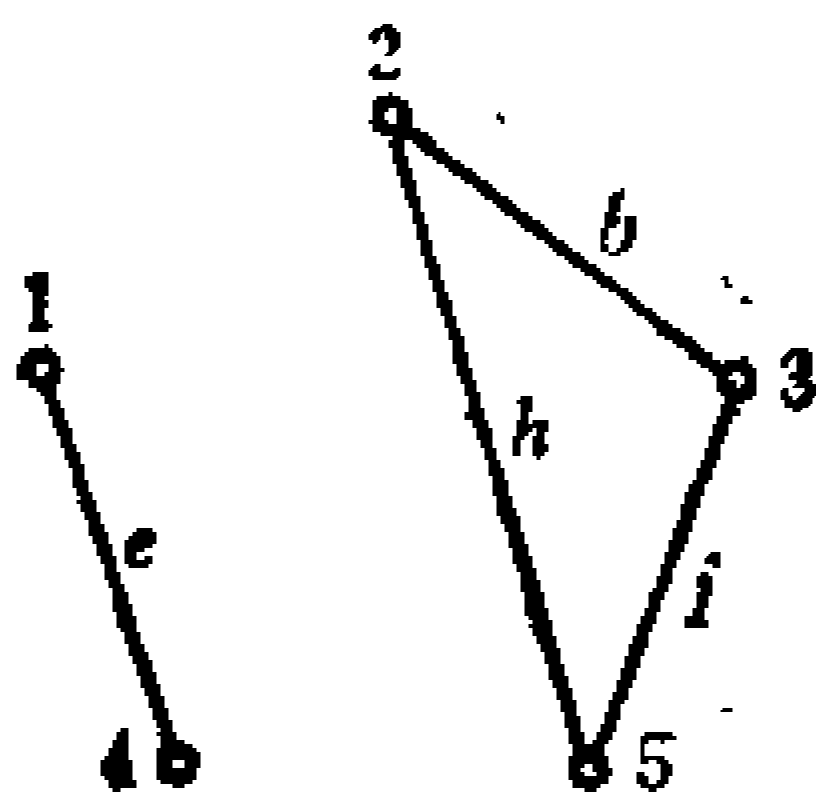


图2-2-9 $G_c-\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$

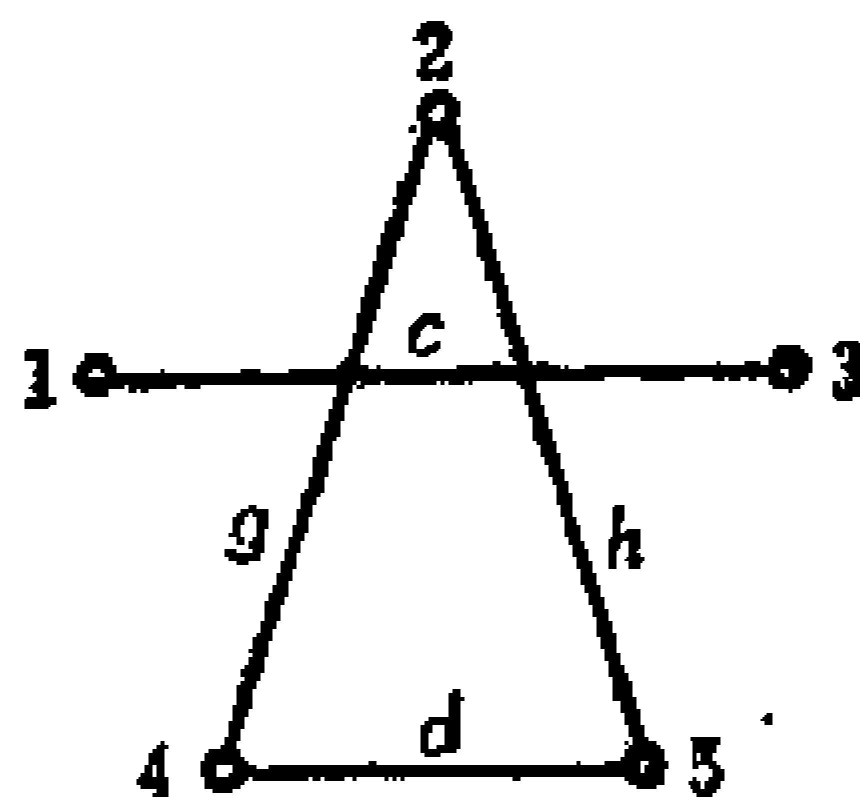


图2-2-10 从完全图中删去一个割集得到的线图

设$\Omega_3=(1,3)$，则$\bar{\Omega}_3=(2,4,5)$，而$\mathscr{E}(\Omega_3\times\bar{\Omega}_3)=(a,b,e,f,i,j)$，删除$\mathscr{E}(\Omega_3\times\bar{\Omega}_3)$的所有边得到的图如图2-2-10所示。

2-3 割集的环和

在第一章中，我们已经知道，一个线图的回路，回路的无重边并和空集的集体$\{E\}$，在环和运算下是一个阿贝尔群。在这一章里，我们将看到，割集，割集的无重边并和空集的集体在环和运算下也是一个阿贝尔群。但是，在我们研究割集环和的重要性质之前，有必要先来讨论一下边集的分解。

设$\Omega_a,\Omega_b,\Omega_c,\Omega_d$是一个线图的顶点集合$\Omega$的四个互不相交的非空真子集，也就是说，对于$p\in(a,b,c,d)$，

$$\Omega_p\subset\Omega \qquad (2\text{-}3\text{-}1)$$

$$\Omega_p\neq\phi \qquad (2\text{-}3\text{-}2)$$

对于$p\in(a,b,c,d)$，则

$$\Omega_p\cap\Omega_q=\phi \qquad (2\text{-}3\text{-}3)$$

对于$p,q\in(a,b,c,d)$ $p\neq q$

设

$$\Omega_A=\Omega_a\cup\Omega_b \qquad (2\text{-}3\text{-}4)$$

$$\Omega_B=\Omega_c\cup\Omega_d \qquad (2\text{-}3\text{-}5)$$

则

$$\mathscr{E}(\Omega_A\times\Omega_B)=\mathscr{E}(\Omega_a\cup\Omega_b\times\Omega_c\cup\Omega_d) \qquad (2\text{-}3\text{-}6)$$

我们可以把$\mathscr{E}(\Omega_a\cup\Omega_b\times\Omega_c\cup\Omega_d)$分解为以下四个集合：

1.连接Ω_a中顶点和Ω_c中顶点的所有边的集合$\mathscr{E}(\Omega_a\times\Omega_c)$。

2.连接Ω_a中顶点和Ω_d中顶点的所有边的集合$\mathscr{E}(\Omega_a\times\Omega_d)$。

3.连接Ω_b中顶点和Ω_c中顶点的所有边的集合$\mathscr{E}(\Omega_b\times\Omega_c)$。

4.连接Ω_b中顶点和Ω_d中顶点的所有边的集合$\mathscr{E}(\Omega_b\times\Omega_d)$。

换句话说，$\mathscr{E}(\Omega_a\cup\Omega_b\times\Omega_c\cup\Omega_d)$可以表示为

$$\mathscr{E}(\Omega_a\cup\Omega_b\times\Omega_c\cup\Omega_d)$$
$$=\mathscr{E}(\Omega_a\times\Omega_c)\cup\mathscr{E}(\Omega_a\times\Omega_d)\cup\mathscr{E}(\Omega_b\times\Omega_c)\cup\mathscr{E}(\Omega_b\times\Omega_d) \qquad (2\text{-}3\text{-}7)$$

可以看出，在$\mathscr{E}(\Omega_a\times\Omega_c)$，$\mathscr{E}(\Omega_a\times\Omega_d)$，$\mathscr{E}(\Omega_b\times\Omega_c)$，$\mathscr{E}(\Omega_b\times$

Ω_d)中，任何两个集合都没有公共的边。因此式(2-3-7)可以写作

$$\mathscr{E}(\Omega_a \cup \Omega_b \times \Omega_c \cup \Omega_d)$$
$$= \mathscr{E}(\Omega_a \times \Omega_c) \oplus \mathscr{E}(\Omega_a \times \Omega_d) \oplus \mathscr{E}(\Omega_b \times \Omega_c) \oplus \mathscr{E}(\Omega_b \times \Omega_d) \quad (2\text{-}3\text{-}8)$$

同样，$\mathscr{E}(\Omega_A \times \Omega_A)$可以写成

$$\mathscr{E}(\Omega_A \times \Omega_A) = \mathscr{E}(\Omega_a \cup \Omega_b \times \Omega_a \cup \Omega_b)$$
$$= \mathscr{E}(\Omega_a \times \Omega_a) \oplus \mathscr{E}(\Omega_a \times \Omega_b) \oplus \mathscr{E}(\Omega_b \times \Omega_b) \quad (2\text{-}3\text{-}9)$$

注意

$$\mathscr{E}(\Omega_a \times \Omega_b) = \mathscr{E}(\Omega_b \times \Omega_a) \quad (2\text{-}3\text{-}10)$$

因为这里所考虑的线图是无向的。

现在，我们为研究一个完全图中两个割集的环和作好了准备。我们把Ω_c*划分为四个互不相交的集合Ω_{11}，Ω_{12}，Ω_{21}和Ω_{22}，使得Ω_c的每一个顶点恰在这四个集合之一中，也就是

$$\Omega_{11} \cup \Omega_{12} \cup \Omega_{21} \cup \Omega_{22} = \Omega_c \quad (2\text{-}3\text{-}11)$$

且

$$\Omega_{pq} \cap \Omega_{rs} = \phi \quad (2\text{-}3\text{-}12)$$

其中 $p, q, r, s = 1, 2 \ (p, q) \neq (r, s)$

设集合$\Omega_1 = \Omega_{11} \cup \Omega_{12}$，集合$\Omega_2 = \Omega_{11} \cup \Omega_{21}$，则$\bar{\Omega}_1 = \Omega_{21} \cup \Omega_{22}$，$\bar{\Omega}_2 = \Omega_{12} \cup \Omega_{22}$，如图2-3-1所示。

两个割集S_1和S_2分别为$S_1 = \mathscr{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$，$S_2 = \mathscr{E}(\Omega_2 \times \bar{\Omega}_2)$。据式(2-2-4)，这两个割集可以表示为

$$S_1 = \mathscr{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1) = \mathscr{E}(\Omega_c \times \Omega_c) \oplus \mathscr{E}(\Omega_1 \times \Omega_1) \oplus \mathscr{E}(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1) \quad (2\text{-}3\text{-}13)$$

$$S_2 = \mathscr{E}(\Omega_2 \times \bar{\Omega}_2) = \mathscr{E}(\Omega_c \times \Omega_c) \oplus \mathscr{E}(\Omega_2 \times \Omega_2) \oplus \mathscr{E}(\bar{\Omega}_2 \times \bar{\Omega}_2) \quad (2\text{-}3\text{-}14)$$

我们假设这两个割集是相异的，因为如果它们相同，则它们

---

* 这里的Ω_c是一个完全图G_c的所有顶点的集合。——译注

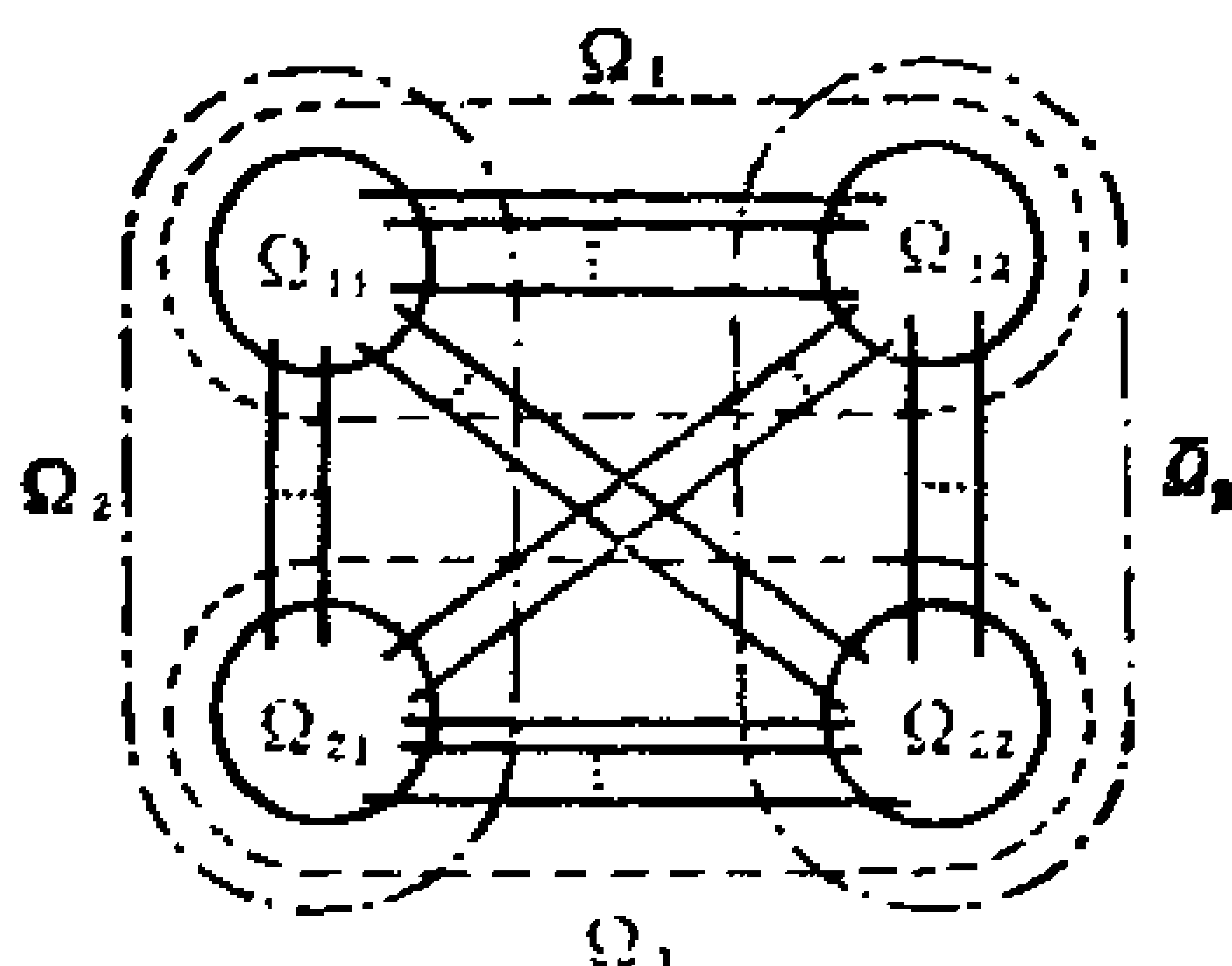


图2-3-1 顶点的集合

的环和为空集。由式(2-3-13)和(2-3-14)，这两个割集的环和 $S_1 \oplus S_2$ 是

$$S_1 \oplus S_2 = \mathscr{E}(\Omega_1 \times \Omega_1) \oplus \mathscr{E}(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1) \oplus \mathscr{E}(\Omega_2 \times \Omega_2) \oplus \mathscr{E}(\bar{\Omega}_2 \times \bar{\Omega}_2) \tag{2-3-15}$$

在式 (2-3-15)中代入 $\Omega_1 = \Omega_{11} \cup \Omega_{12}, \bar{\Omega}_1 = \Omega_{21} \cup \Omega_{22}, \Omega_2 = \Omega_{11} \cup \Omega_{21}, \bar{\Omega}_2 = \Omega_{12} \cup \Omega_{22}$，运用式(2-3-8)和(2-3-9)给出的关系式，我们有

$$\begin{aligned} S_1 \oplus S_2 &= \mathscr{E}(\Omega_{11} \cup \Omega_{12} \times \Omega_{11} \cup \Omega_{12}) \oplus \mathscr{E}(\Omega_{21} \cup \Omega_{22} \times \Omega_{21} \cup \Omega_{22}) \\ &\quad \oplus \mathscr{E}(\Omega_{11} \cup \Omega_{21} \times \Omega_{11} \cup \Omega_{21}) \oplus \mathscr{E}(\Omega_{12} \cup \Omega_{22} \times \Omega_{12} \cup \Omega_{22}) \\ &= \mathscr{E}(\Omega_{11} \times \Omega_{12}) \oplus \mathscr{E}(\Omega_{21} \times \Omega_{22}) \oplus \mathscr{E}(\Omega_{11} \times \Omega_{21}) \\ &\quad \oplus \mathscr{E}(\Omega_{12} \times \Omega_{22}) \end{aligned} \tag{2-3-16}$$

可以看出，在集合 $\mathscr{E}(\Omega_{11} \times \Omega_{12})$，$\mathscr{E}(\Omega_{21} \times \Omega_{22})$，$\mathscr{E}(\Omega_{11} \times \Omega_{21})$，$\mathscr{E}(\Omega_{12} \times \Omega_{22})$ 中，任两个集合无公共边。因此我们可以利用式(2-3-8)，将式(2-3-16)变为

$$S_1 \oplus S_2 = \mathscr{E}(\Omega_{11} \cup \Omega_{22} \times \Omega_{21} \cup \Omega_{12}) = \mathscr{E}(\Omega_3 \times \bar{\Omega}_3) \tag{2-3-17}$$

其中 $\Omega_3 = \Omega_{11} \cup \Omega_{22}$。因此，据定理2-2-1，两个割集 S_1 和 S_2 的环和是一个割集。

定理2-3-1 在一个完全图中，两个割集的环和是割集。

例2-2-1 考虑图2-2-4中的完全图。假定我们选取 $\Omega_1=(1,2,3)$，$\Omega_2=(1,2,4)$则$\bar{\Omega}_1=(4,5)$，$\bar{\Omega}_2=(3,5)$，另外，我们可以看出，若$\Omega_{11}=(1,2)$，$\Omega_{12}=(3)$，$\Omega_{21}=(4)$，$\Omega_{22}=(5)$，则$\Omega_1=\Omega_{11}\cup\Omega_{12}$,$\Omega_2=\Omega_{11}\cup\Omega_{21}$。于是在所给的图中，

$$S_1=\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)=(e,f,g,h,i,j)$$

$$S_2=\mathscr{E}(\Omega_2\times\bar{\Omega}_2)=(b,c,d,f,h,i)$$

因此
$$S_1\oplus S_2=(b,c,d,e,g,j)$$

这一结果必然与式(2-3-17)给出的割集相同，其中$\Omega_3=\Omega_{11}\cup\Omega_{22}=(1,2,5)$，直接从图2-2-4中的线图，我们得到

$$\mathscr{E}(\Omega_3\times\bar{\Omega}_3)=(b,c,d,e,g,j)$$

与上面的$S_1\oplus S_2$完全相同。

定义2-3-1 割集的无重边并是若干割集的并集，其中任何两个割集都没有公共边。

例如，在图2-1-1所示的线图中，两个割集(a,c,f)和(b,e)没有公共边，因此集合(a,b,c,e,f)是割集的无重边并。

现在我们来研究，当线图不是完全图时，由此线图的两个割集作环和所得到集合的一个性质。设Ω是线图G中所有顶点的集合，Ω_1是Ω的真子集，Ω_2是Ω的不等于Ω_1的真子集，则由这两个子集得到的两个割集S_1和S_2是

$$S_1=\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)\tag{2-3-18}$$

$$S_2=\mathscr{E}(\Omega_2\times\bar{\Omega}_2)\tag{2-3-19}$$

设$\Omega_1=\Omega_{11}\cup\Omega_{12}$,$\bar{\Omega}_1=\mathscr{E}(\Omega_{21}\cup\Omega_{22})$，$\Omega_2=\Omega_{11}\cup\Omega_{21}$,$\bar{\Omega}_2=\Omega_{12}\cup\Omega_{22}$，其中$\Omega_{11}$，$\Omega_{12}$，$\Omega_{21}$，$\Omega_{22}$没有公共顶点，如图2-3-1所示。注意，现在假设图2-3-1中的线图是一个非完全图。因为不论是非完全图还是完全图，S_1和S_2的表达式都成立，所以两个割集S_1和S_2的环和与式(2-3-17)相同。因此我们有

$$S_1\oplus S_2=\mathscr{E}(\Omega_{11}\cup\Omega_{22}\times\Omega_{21}\cup\Omega_{12})$$

$$=\mathscr{G}(\Omega\times\Omega)-[\mathscr{G}(\Omega_{11}\cup\Omega_{22}\times\Omega_{11}\cup\Omega_{22})$$
$$\cup\mathscr{G}(\Omega_{21}\cup\Omega_{12}\times\Omega_{21}\cup\Omega_{12})] \qquad (2\text{-}3\text{-}20)$$

或 $\mathscr{G}(\Omega\times\Omega)-S_1\oplus S_2$

$$=\mathscr{G}(\Omega_{11}\cup\Omega_{22}\times\Omega_{11}\cup\Omega_{22})\cup\mathscr{G}(\Omega_{21}\cup\Omega_{12}\times\Omega_{21}\cup\Omega_{12}) \qquad (2\text{-}3\text{-}21)$$

这说明从线图G中删除$S_1\oplus S_2$中的所有边，得到两个子图 $\mathscr{G}(\Omega_{11}\cup\Omega_{22}\times\Omega_{11}\cup\Omega_{22})$和$\mathscr{G}(\Omega_{21}\cup\Omega_{12}\times\Omega_{21}\cup\Omega_{12})$．当我们讨论完全图时，这些子图本身也是完全图．但是，根据假设，G不是完全图，因此这里不能保证$\mathscr{G}(\Omega_{11}\cup\Omega_{22}\times\Omega_{11}\cup\Omega_{22})$和$\mathscr{G}(\Omega_{21}\cup\Omega_{12}\times\Omega_{21}\cup\Omega_{12})$是完全图．事实上，正如下述例子所示，即使所给线图$G$是不可分的，这些子图仍有可能是可分离的．

例2-3-2 考虑图2-3-2所示的线图G，其中每个圆圈代表一

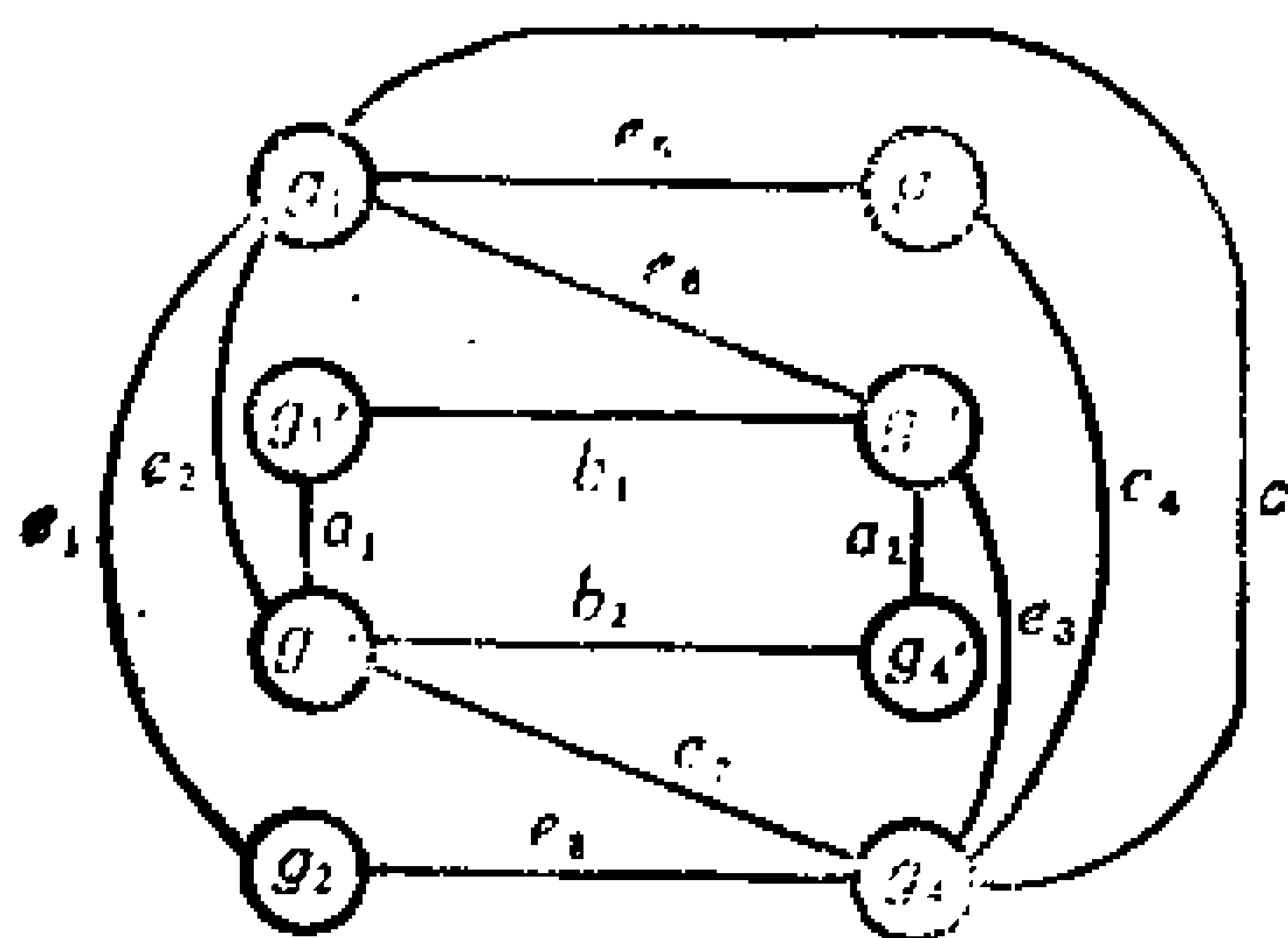


图2-3-2 一个不可分图

个连通的子图．两个割集S_1和S_2分别为

$$S_1=(e_1,e_2,e_3,e_4,a_1,a_2,c)$$
$$S_2=(e_5,e_6,e_7,e_8,b_1,b_2,c)$$

这两个割集的环和是

$$S_1 \oplus S_2 = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, a_1, a_2, b_1, b_2)$$

定义$\Omega_{11}=(g_1$和g_1'中的所有顶点$)$，$\Omega_{12}=(g_3$和g_3'中的所有顶点$)$，$\Omega_{21}=(g_2$和g_2'中的所有顶点$)$，$\Omega_{22}=(g_4$和g_4'中的所有顶点$)$，我们可以把这两个割集表示为

$$S_1=\mathscr{E}(\Omega_{11}\cup\Omega_{12}\times\Omega_{21}\cup\Omega_{22})$$

$$S_2=\mathscr{E}(\Omega_{11}\cup\Omega_{21}\times\Omega_{12}\cup\Omega_{22})$$

于是，据式(2-3-17)，S_1和S_2的环和变成

$$S_1\oplus S_2=\mathscr{E}(\Omega_{11}\cup\Omega_{22}\times\Omega_{21}\cup\Omega_{12})$$

或由式(2-3-21)，

$$\mathscr{E}(\Omega\times\Omega)-S_1\oplus S_2$$

$$=\mathscr{E}(\Omega_{11}\cup\Omega_{22}\times\Omega_{11}\cup\Omega_{22})\cup\mathscr{E}(\Omega_{21}\cup\Omega_{12}\times\Omega_{21}\cup\Omega_{12})$$

其中Ω是G中所有顶点的集合。图2-3-3所示的线图，是由上面给出的线图按以下方法得到的：调换其子图的位置，使子图$\mathscr{E}(\Omega_{11}\cup\Omega_{22}\times\Omega_{11}\cup\Omega_{22})$在一边，而子图$\mathscr{E}(\Omega_{21}\cup\Omega_{12}\times\Omega_{21}\cup\Omega_{12})$在图形的另一边。

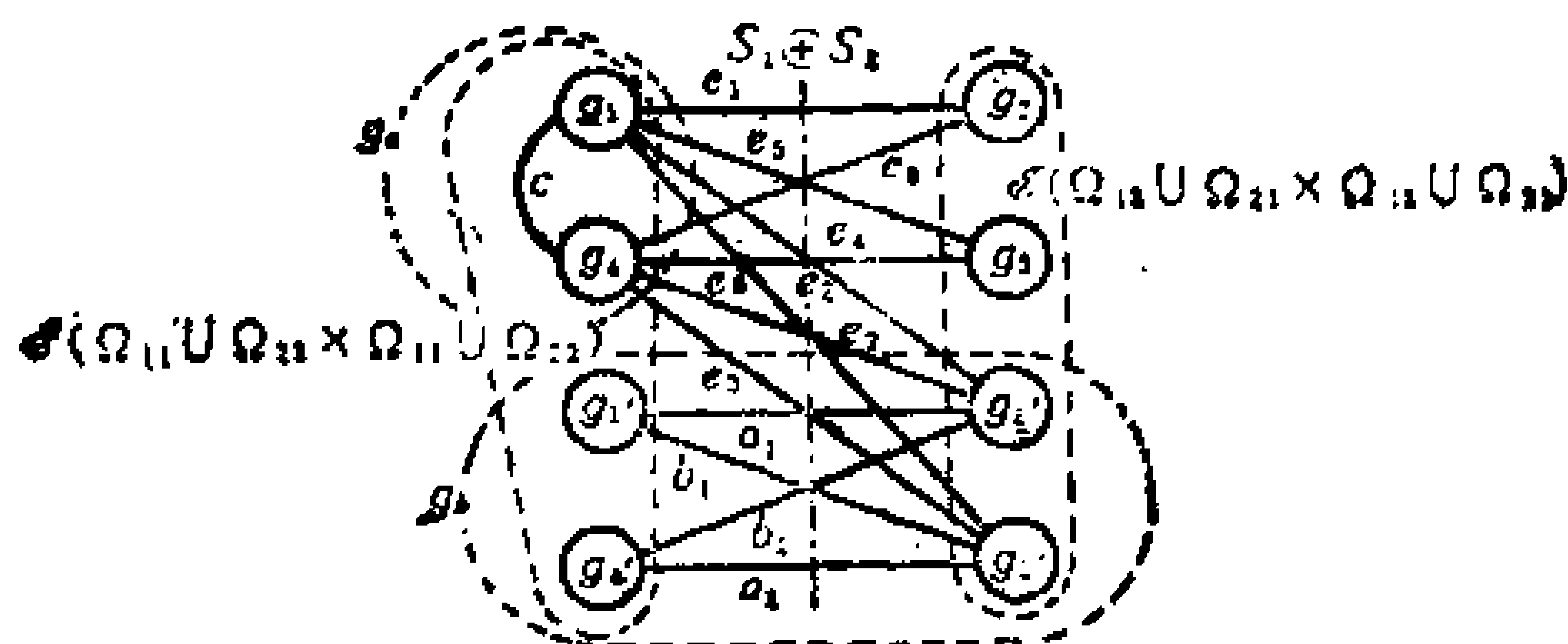


图2-3-3　一个不可分图

当我们删除$S_1\oplus S_2$中的所有边时，就得到图2-3-4所示的线图。注意子图$\mathscr{E}(\Omega_{11}\cup\Omega_{22}\times\Omega_{11}\cup\Omega_{22})$由三个最大连通子图$g_4$，$g_1'$和$g_4'$组成，而子图$\mathscr{E}(\Omega_{21}\cup\Omega_{12}\times\Omega_{21}\cup\Omega_{12})$由四个最大连通子

图g_2, g_3, g_2'和g_3'组成。因此$S_1 \oplus S_2$不是割集。

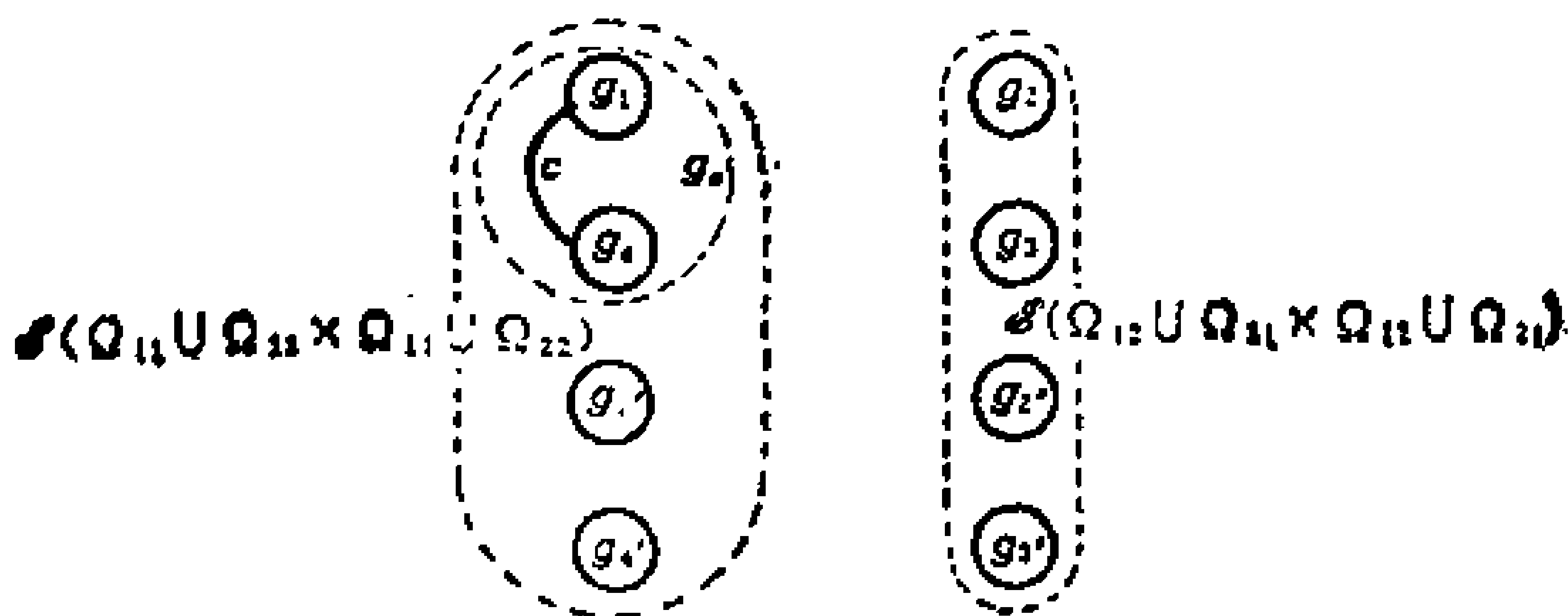


图2-3-4 删除$S_1 \oplus S_2$所得的图

现在考虑$S_1 \oplus S_2$的子集S_a，它由与最大连通子图g_a的顶点相连接的所有边组成，即

$S_a = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8)$

这个子集S_a不是割集，因为删除S_a的所有边产生的线图由四个最大连通子图g_a, g_b, g_2和g_3组成，如图2-3-5所示。

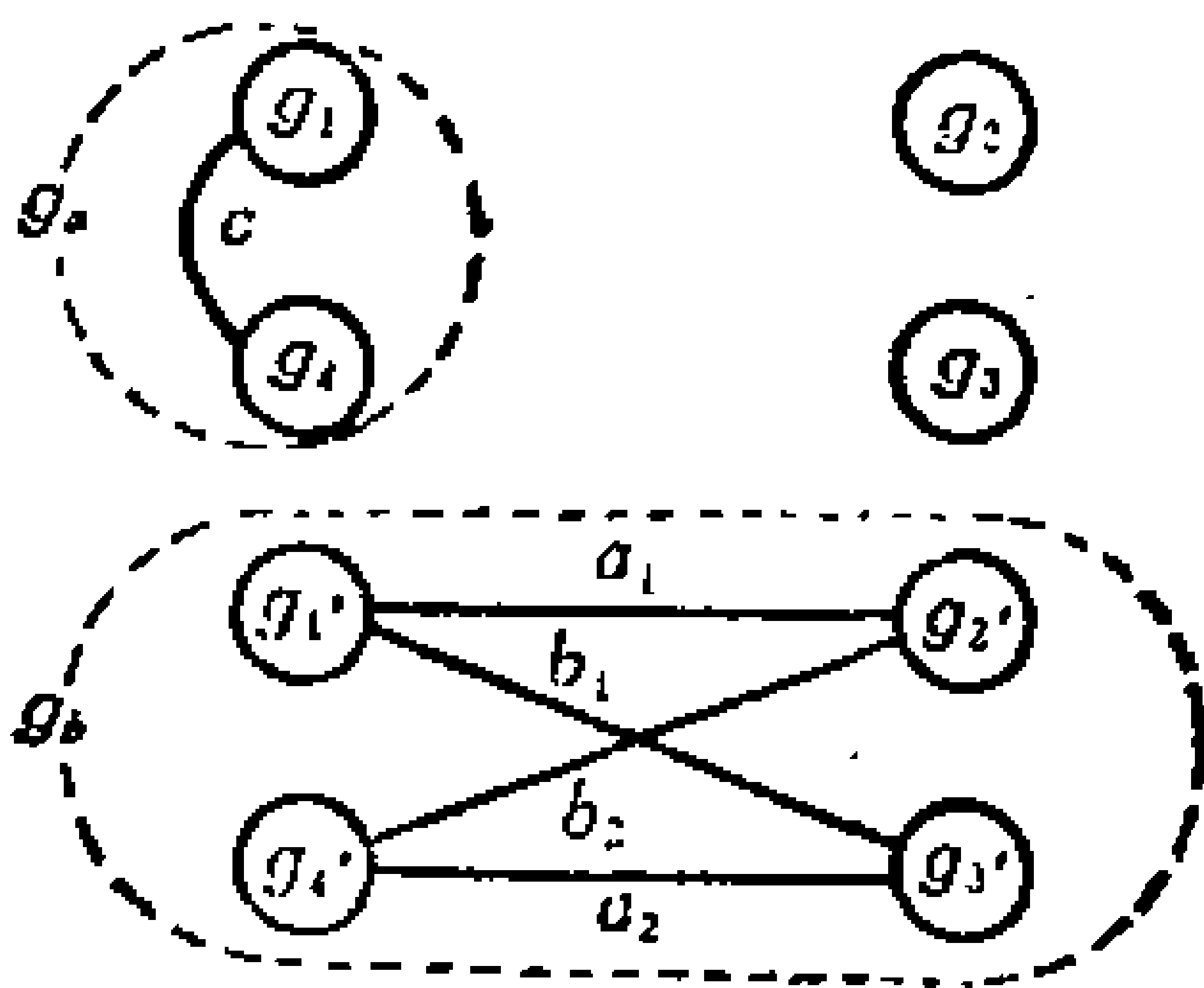


图2-3-5 删除S_a所得的图

再考虑S_a的子集S_{a1}，它是由与g_2的顶点相连的所有边组成，即

$$S_{a1} = (e_1, e_8)$$

删除S_{a1}的所有边产生的线图，由两个最大连通子图组成，如图

2-3-6所示。因此易知S_{a1}是一个割集。同样S_a的另一个子集$S_{a2}=(e_4,e_5)$，由与g_3相连的所有边组成，是一个割集。S_a的子集$S_{a3}=(e_2,e_3,e_6,e_7)$，由与g_b的顶点关联的所有边组成，也是一个割集。因此，S_a是割集S_{a1}，S_{a2}和S_{a3}的无重边并。我们还可以看到，$S_1 \oplus S_2$的子集S_b由与g_1'相连的所有边组成，是一个割集。$S_1 \oplus S_2$的子集$S_c=(a_2,b_2)$，由与g_4'的顶点相关联的所有边组成，也是一个割集。这样，$S_1 \oplus S_2$是割集S_{a1}，S_{a2}，S_{a3}，S_b和S_c的无重边并。

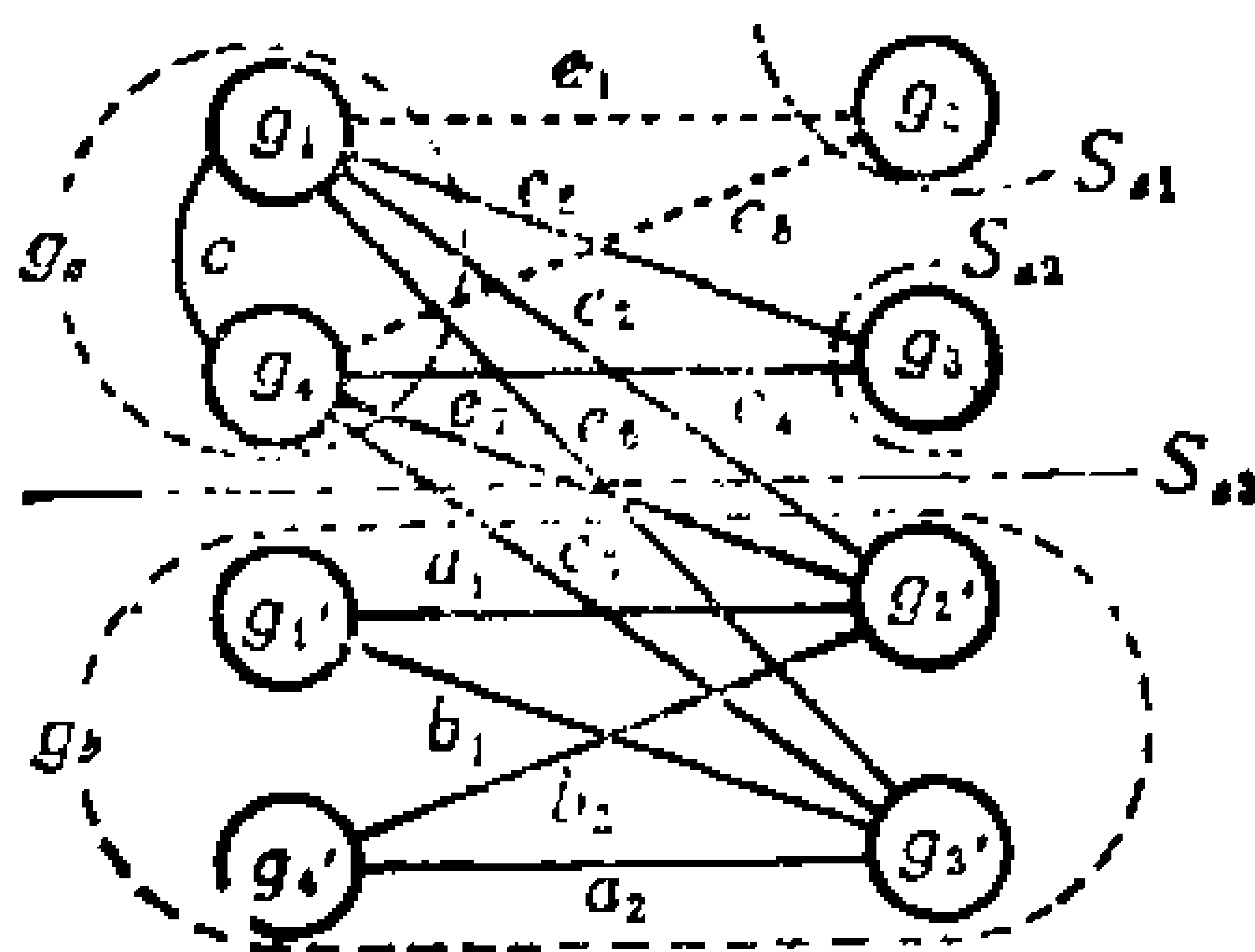


图2-3-6 删除S_{a1}所得的图

现在回到一般的情况.由式(2-3-21)，如果子图$\mathscr{G}(\Omega_{11} \cup \Omega_{22} \times \Omega_{11} \cup \Omega_{22})$和子图$\mathscr{G}(\Omega_{21} \cup \Omega_{12} \times \Omega_{21} \cup \Omega_{12})$每一个都是连通的，则$S_1 \oplus S_2$显然是一个割集。假定子图$\mathscr{G}(\Omega_{11} \cup \Omega_{22} \times \Omega_{11} \cup \Omega_{22})$是由$k$个最大连通子图$g_{a1},g_{a2},\cdots,g_{ak}$组成的分离图。设$\Omega_{ap}$是$g_{ap}$中所有顶点的集合($p=1, 2, \cdots, k$)，如图2-3-7所示。不要忘记，$\mathscr{G}(\Omega_{21} \cup \Omega_{12} \times \Omega_{21} \cup \Omega_{12})$也可能是分离的。注意$S_1 \oplus S_2=\mathscr{G}(\Omega_{11} \cup \Omega_{22} \times \Omega_{12} \cup \Omega_{21})$中的每一条边与$g_{a1},g_{a2},\cdots,g_{ak}$中的某一个子图的一个顶点相连。我们把集合$\mathscr{G}(\Omega_{11} \cup \Omega_{22} \times \Omega_{12} \cup \Omega_{21})$分成$k$个子集$S_{a1},S_{a2},\cdots,S_{ak}$，使得集合$S_{ap}(1 \leqslant p \leqslant k)$的所有边与$g_{ap}$中的顶点相连。容易看出，

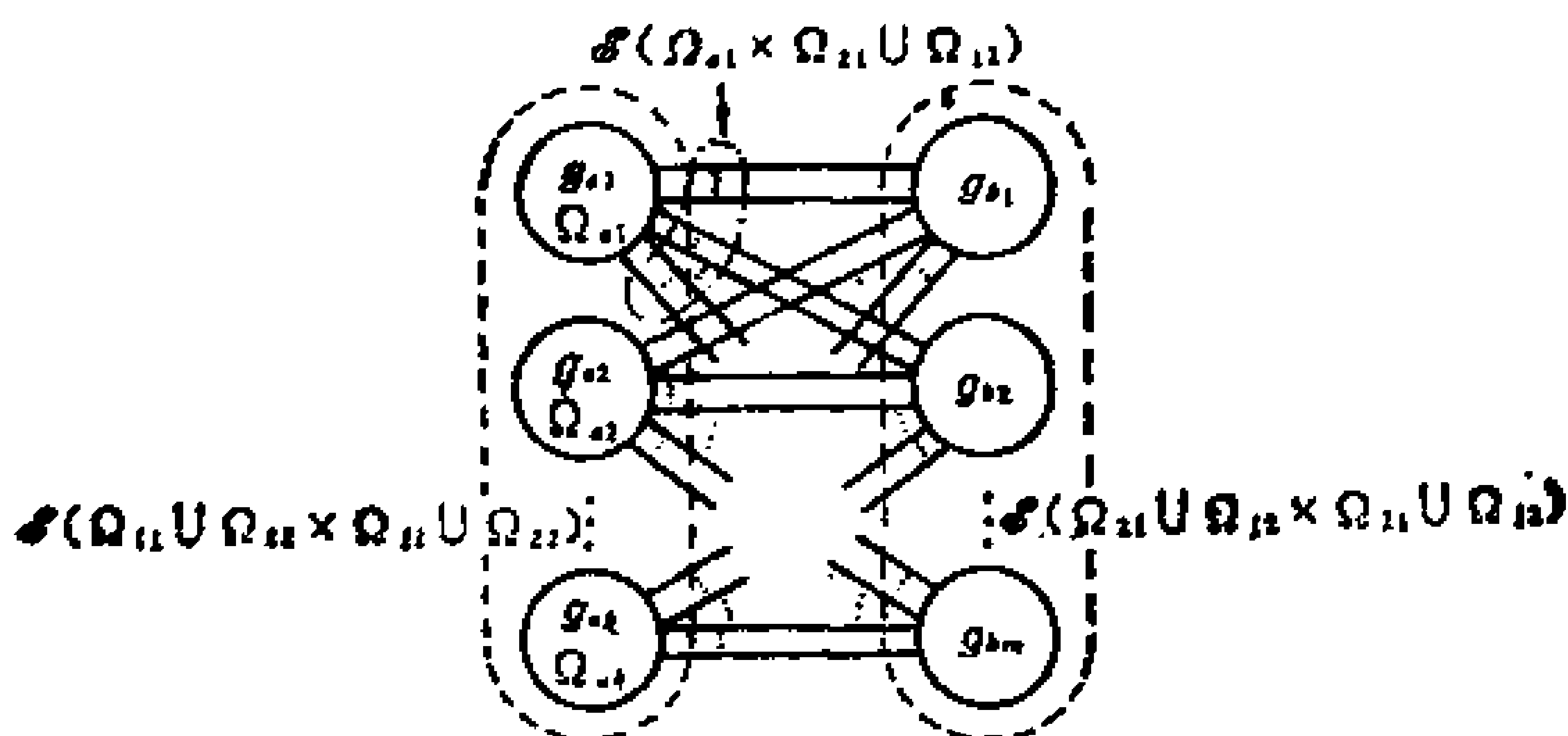


图2-3-7　子图$\mathscr{E}(\Omega_{11}\cup\Omega_{22}\times\Omega_{11}\cup\Omega_{22})$和$\mathscr{E}(\Omega_{21}\cup\Omega_{12}\times\Omega_{21}\cup\Omega_{12})$

$$S_{ap}=\mathscr{E}(\Omega_{ap}\times\Omega_{21}\cup\Omega_{12}) \tag{2-3-22}$$

并且，我们可以看到，集合$\mathscr{E}(\Omega_{11}\cup\Omega_{22}\times\Omega_{12}\cup\Omega_{21})$中的每一条边正好在集合$S_{a1}$，$S_{a2}$，…，$S_{ak}$之一中。因此，集合$\mathscr{E}(\Omega_{11}\cup\Omega_{22}\times\Omega_{12}\cup\Omega_{21})$可以看作集合$S_{a1}$，$S_{a2}$，…，$S_{ak}$的无重边并。因为对于$1\leqslant p<q\leqslant k$，$\Omega_{ap}$的顶点和$\Omega_{aq}$的顶点之间没有边相连，故集合$\mathscr{E}(\Omega_{ap}\times\Omega_{12}\cup\Omega_{21})$可以表示为

$$\mathscr{E}(\Omega_{ap}\times\Omega_{12}\cup\Omega_{21})$$
$$=\mathscr{E}(\Omega_{ap}\times\Omega_{12}\cup\Omega_{21}\cup\Omega_{a1}\cup\Omega_{a2}\cup\cdots\cup\Omega_{ap-1}\cup\Omega_{ap+1}\cup\cdots\cup\Omega_{ak}) \tag{2-3-23}$$

但是，由$\bar{\Omega}_{ap}$的定义可知

$$\Omega_{12}\cup\Omega_{21}\cup\Omega_{a1}\cup\Omega_{a2}\cup\cdots\cup\Omega_{ap-1}\cup\Omega_{ap+1}\cup\cdots\cup\Omega_{ak}=\bar{\Omega}_{ap} \tag{2-3-24}$$

因此，对所有的$p=1$，2，…，k，

$$\mathscr{E}(\Omega_{ap}\times\Omega_{12}\cup\Omega_{21})=\mathscr{E}(\Omega_{ap}\times\bar{\Omega}_{ap}) \tag{2-3-25}$$

于是$\mathscr{E}(\Omega_{11}\cup\Omega_{22}\times\Omega_{12}\cup\Omega_{21})$可以表示为

$$\mathscr{E}(\Omega_{11}\cup\Omega_{22}\times\Omega_{12}\cup\Omega_{21})$$
$$=\mathscr{E}(\Omega_{a1}\times\bar{\Omega}_{a1})\cup\mathscr{E}(\Omega_{a2}\times\bar{\Omega}_{a2})\cup\cdots\cup\mathscr{E}(\Omega_{ak}\times\bar{\Omega}_{ak})$$

$$= \mathscr{E}(\Omega_{a1}\times\bar{\Omega}_{a1})\oplus\mathscr{E}(\Omega_{a2}\times\bar{\Omega}_{a2})\oplus\cdots\oplus\mathscr{E}(\Omega_{ak}\times\bar{\Omega}_{ak})$$
(2-3-26)

由式(2-2-4)，集合$\mathscr{E}(\Omega_{ap}\times\bar{\Omega}_{ap})$可以表示为

$$\mathscr{E}(\Omega_{ap}\times\bar{\Omega}_{ap})=\mathscr{E}(\Omega\times\Omega)\oplus\mathscr{E}(\Omega_{ap}\times\Omega_{ap})\oplus\mathscr{E}(\bar{\Omega}_{ap}\times\bar{\Omega}_{ap})$$
(2-3-27)

或由式(2-2-5)，我们有

$$\mathscr{E}(\Omega\times\Omega)-\mathscr{E}(\Omega_{ap}\times\bar{\Omega}_{ap})=\mathscr{E}(\Omega_{ap}\times\Omega_{ap})\cup\mathscr{E}(\bar{\Omega}_{ap}\times\bar{\Omega}_{ap})$$
(2-3-28)

由这个公式可以看出，如果子图$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_{ap}\times\bar{\Omega}_{ap})$是连通的，则$\mathscr{E}(\Omega_{ap}\times\bar{\Omega}_{ap})$是一个割集（注意，根据假设，$\mathscr{E}(\Omega_{ap}\times\Omega_{ap})$是连通的）。不失一般性，考虑图2-3-8所示的集合$\mathscr{E}(\Omega_{a1}\times\bar{\Omega}_{a1})$。

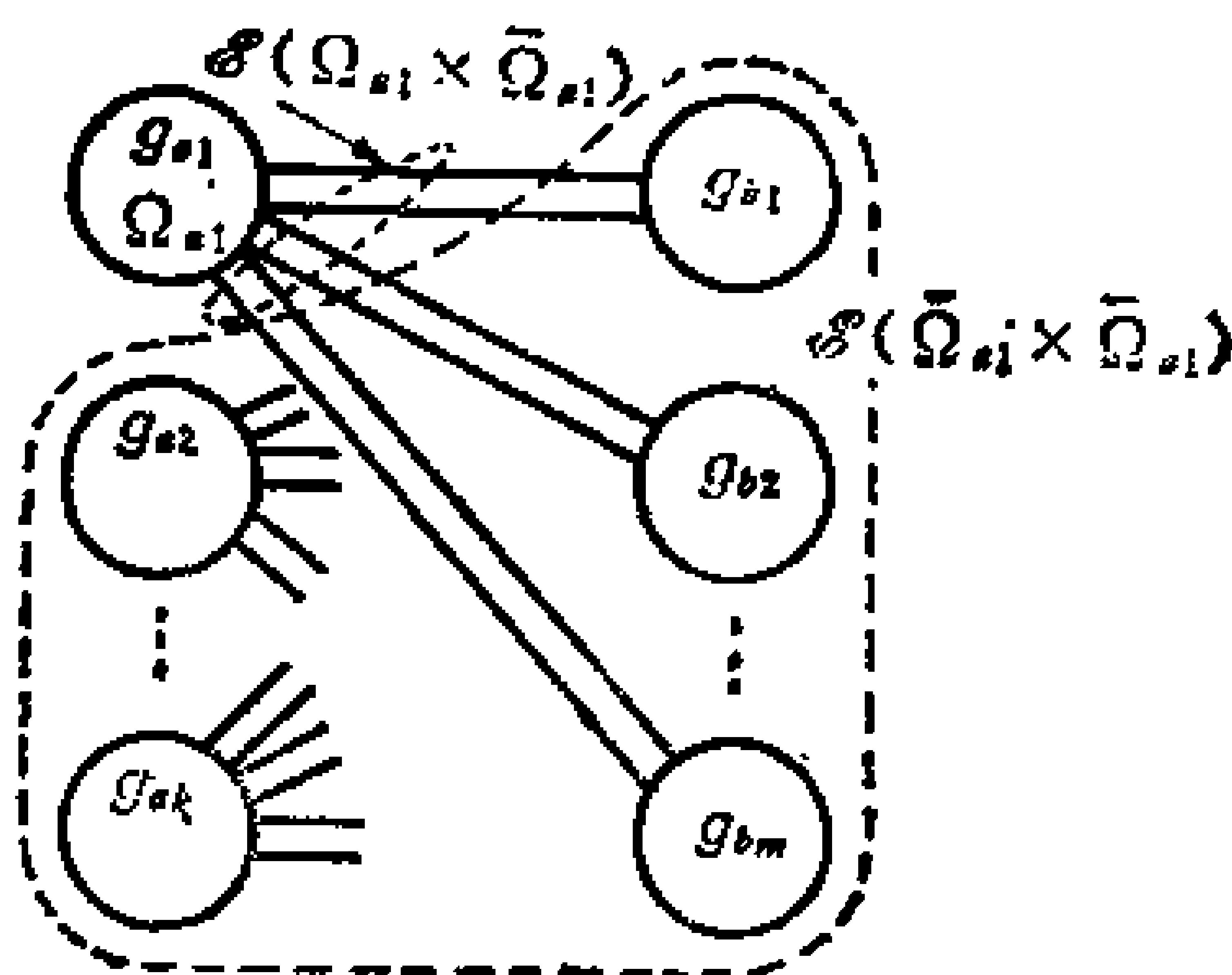


图2-3-8 子图$\mathscr{E}(\Omega_{a1}\times\bar{\Omega}_{a1})$

由式(2-3-28)，删除$\mathscr{E}(\Omega_{a1}\times\bar{\Omega}_{a1})$中所有的边，产生两个子图$\mathscr{E}(\Omega_{a1}\times\Omega_{a1})$和$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_{a1}\times\bar{\Omega}_{a1})$。我们知道，如果$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_{a1}\times\bar{\Omega}_{a1})$是连通的，则$\mathscr{E}(\Omega_{a1}\times\bar{\Omega}_{a1})$是一个割集。现在假定$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_{a1}\times\bar{\Omega}_{a1})$是分离的，子图$\mathscr{E}(\Omega_{a1}\times\Omega_{a1})$必然与$\mathscr{E}(\Omega_{a1}\times\bar{\Omega}_{a1})$的边连接。如图2-3-9所示，其中假设$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_{a1}\times\bar{\Omega}_{a1})$有$n$个最大连通子图$g_{c1},g_{c2},\cdots,g_{cn}$。

图2-3-9　分离图$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_{e1}\times\bar{\Omega}_{e1})$

设Ω_{cr}是最大连通子图g_{cr}的顶点集合，$r=1,2,\cdots,n$。则$\mathscr{E}(\Omega_{e1}\times\bar{\Omega}_{e1})$可以看成集合$\mathscr{E}(\Omega_{e1}\times\Omega_{c1})$，$\mathscr{E}(\Omega_{e1}\times\Omega_{c2})$，…，$\mathscr{E}(\Omega_{e1}\times\Omega_{cn})$的无重边并，或

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(\Omega_{e1}\times\bar{\Omega}_{e1})&=\mathscr{E}(\Omega_{e1}\times\Omega_{c1})\cup\mathscr{E}(\Omega_{e1}\times\Omega_{c2})\cup\cdots\cup\mathscr{E}(\Omega_{e1}\times\Omega_{cn})\\&=\mathscr{E}(\Omega_{e1}\times\Omega_{c1})\oplus\mathscr{E}(\Omega_{e1}\times\Omega_{c2})\oplus\cdots\oplus\mathscr{E}(\Omega_{e1}\times\Omega_{cn})\end{aligned}\tag{2-3-29}$$

因为对于$1\leqslant p<q\leqslant n$，$g_{cp}$的顶点和$g_{cq}$的顶点之间没有边连接，故$\mathscr{E}(\Omega_{e1}\times\Omega_{cp})$可以表示为

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(\Omega_{e1}\times\Omega_{cp})&=\mathscr{E}(\Omega_{e1}\cup\Omega_{c1}\cup\cdots\cup\Omega_{cp-1}\cup\Omega_{cp+1}\cup\cdots\cup\Omega_{cn}\times\Omega_{cp})\\&=\mathscr{E}(\bar{\Omega}_{cp}\times\Omega_{cp})\end{aligned}\tag{2-3-30}$$

其中　$$\bar{\Omega}_{cp}=\Omega_{e1}\cup\Omega_{c1}\cup\cdots\cup\Omega_{cp-1}\cup\Omega_{cp+1}\cup\cdots\cup\Omega_{cn}\tag{2-3-31}$$

据式(2-2-5)，我们有

$$\mathscr{E}(\Omega\times\Omega)-\mathscr{E}(\bar{\Omega}_{cp}\times\Omega_{cp})=\mathscr{E}(\Omega_{cp}\times\Omega_{cp})\cup\mathscr{E}(\bar{\Omega}_{cp}\times\bar{\Omega}_{cp})\tag{2-3-32}$$

根据这一等式，显然从原图G中删除$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_{cp}\times\Omega_{cp})$的所有的边必得到两个子图$\mathscr{E}(\Omega_{cp}\times\Omega_{cp})$和$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_{cp}\times\bar{\Omega}_{cp})$.据假设，$\mathscr{E}(\Omega_{cp}\times\Omega_{cp})$是连通的。从图2-3-9所示的线图中，我们可以看到，$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_{cp}\times\bar{\Omega}_{cp})$是连通的，否则原来的线图$G$就不是连通的。所以$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_{cp}\times$

Ω_{cp})是一个割集。因此由式(2-3-29)知，集合$\mathscr{E}(\Omega_{s1}\times\bar{\Omega}_{s1})$是割集的无重边并。并且，我们还可以说，对于任一个$p=1, 2, \cdots, k$，$\mathscr{E}(\Omega_{sp}\times\bar{\Omega}_{sp})$或为割集，或为割集的无重边并。于是据式(2-3-26)知，集合$\mathscr{E}(\Omega_{11}\cup\Omega_{22}\times\Omega_{12}\cup\Omega_{21})$是割集的无重边并。

如果我们注意观察，为得到上述结果，对两个集合$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$和$\mathscr{E}(\Omega_2\times\bar{\Omega}_2)$的要求，就可以看出，我们并没有要求集合$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$和$\mathscr{E}(\Omega_2\times\bar{\Omega}_2)$是割集。事实上，只要$\Omega_{11}$，$\Omega_{12}$，$\Omega_{21}$和$\Omega_{22}$是符合以下要求的顶点集合：

1. $\Omega_{11}\cup\Omega_{12}\cup\Omega_{21}\cup\Omega_{22}=\Omega$ (2-3-33)

2. 在Ω_{11}，Ω_{12}，Ω_{21}和Ω_{22}中，任两个集合没有公共边。

3. $\Omega_1=\Omega_{11}\cup\Omega_{12}$，$\Omega_2=\Omega_{11}\cup\Omega_{21}$ (2-3-34)

那么不论S_1或S_2，或者S_1和S_2一起，都可以成为割集的无重边并。因此我们可以说，对于连通图来说，一个割集和一个割集的无重边并的环和或者是割集，或者是割集的无重边并。另外，两个割集的无重边并的环和或者是割集，或者是割集的无重边并。

假定线图G是分离的，设S_1是G的一个最大连通子图中的一个割集或割集的无重边并，S_2是G的另一个最大连通子图的割集或割集的无重边并，则$S_1\oplus S_2$显然是一个割集的无重边并。于是，我们可以叙述如下定理，而不用限制线图是连通的。

定理2-3-2 设S_1是一个割集或割集的无重边并，S_2是与S_1不同的另一个割集或割集的无重边并，则$S_1\oplus S_2$或为割集，或为割集的无重边并。

定理2-3-3 设$\{S\}$是所有割集，割集的无重边并和空集的集体，则$\{S\}$在环和运算下是一个阿贝尔群。

例2-3-3 考虑图2-1-1所示的线图。取割集$S_1=(a, c, f)$，$S_2=(a,d,e)$，$S_3=(b,e)$，$S_4=(f, g)$作为生成元，我们可以得到所有割集、割集的无重边并和空集的集体$\{S\}$中全部元素如下：

$$S_1\oplus S_2=(c,d,e,f)$$

$$S_1 \oplus S_3 = (a,b,c,e,f)$$
$$S_1 \oplus S_4 = (a,c,g)$$
$$S_2 \oplus S_3 = (a,b,d)$$
$$S_2 \oplus S_4 = (a,d,e,f,g)$$
$$S_3 \oplus S_4 = (b,e,f,g)$$
$$S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 = (b,c,d,f)$$
$$S_1 \oplus S_2 \oplus S_4 = (c,d,e,g)$$
$$S_1 \oplus S_3 \oplus S_4 = (a,b,c,e,g)$$
$$S_2 \oplus S_3 \oplus S_4 = (a,b,d,f,g)$$
$$S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus S_4 = (b,c,d,g)$$
$$S_1 \oplus S_1 = S_2 \oplus S_2 = S_3 \oplus S_3 = S_4 \oplus S_4 = \phi$$

注意其中$S_1 \oplus S_3, S_2 \oplus S_4, S_1 \oplus S_3 \oplus S_4, S_2 \oplus S_3 \oplus S_4$都是割集的无重边并。

2-4 线性无关割集

我们已经知道，集体$\{S\}$在环和运算下构成一个群。如果一个线图是有限的，即线图中边的数目是有限的，则$\{S\}$由有限个集合组成。这里，我们将介绍一种求出一组最少数目的生成元的方法，这组生成元称为线性无关割集，利用它们可以生成$\{S\}$中的所有集合。集体$\{E\}$和$\{E, M_{ij}\}$中也有这样的生成元。在下一章学习线图的矩阵表示以后，可以很容易地知道$\{E\}$和$\{E, M_{ij}\}$中生成元的数目。

下述定理给出了割集的一个重要性质。

定理2-4-1 任何割集都可以表示为若干个关联集的环和。

证明： 假定线图G的顶点为$v_1, v_2, \cdots, v_n$。即$\Omega = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$，设$\Omega_{11} = \phi$，$\Omega_{12} = (v_1, v_2, \cdots, v_{k-1})$，$\Omega_{21} = (v_k)$，$\Omega_{22} = \Omega - \Omega_{12} \cup \Omega_{21} = (v_{k+1}, \cdots, v_n)$. 又设$\Omega_1 = \Omega_{11} \cup \Omega_{12}$，$\Omega_2 = \Omega_{11} \cup \Omega_{21}$. 则据式

(2-3-17)，两个集合$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$和$\mathscr{E}(\Omega_2\times\bar{\Omega}_2)$的环和是

$$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)\oplus\mathscr{E}(\Omega_2\times\bar{\Omega}_2)$$
$$=\mathscr{E}(\Omega_{11}\cup\Omega_{12}\times\overline{\Omega_{11}\cup\Omega_{12}})\oplus\mathscr{E}(\Omega_{11}\cup\Omega_{21}\times\overline{\Omega_{11}\cup\Omega_{21}})$$
$$=\mathscr{E}[(v_1,v_2,\cdots,v_{k-1})\times(\overline{v_1,v_2,\cdots,v_{k-1}})]\oplus\mathscr{E}[(v_k)\times(\overline{v_k})]$$
$$=\mathscr{E}[(v_{k+1},\cdots,v_n)\times(v_1,v_2,\cdots,v_{k-1},v_k)]$$
$$=\mathscr{E}[(v_1,v_2,\cdots,v_{k-1},v_k)\times(\overline{v_1,v_2,\cdots,v_{k-1},v_k})]\quad(2\text{-}4\text{-}1)$$

由这个等式，我们可以得到以下各等式。

对于$k=2$，

$$\mathscr{E}[(v_1)\times(\overline{v_1})]\oplus\mathscr{E}[(v_2)\times(\overline{v_2})]=\mathscr{E}[(v_1,v_2)\times(\overline{v_1,v_2})]\quad(2\text{-}4\text{-}2)$$

对于$k=3$，

$$\mathscr{E}[(v_1,v_2)\times(\overline{v_1,v_2})]\oplus\mathscr{E}[(v_3)\times(\overline{v_3})]$$
$$=\mathscr{E}[(v_1)\times(\overline{v_1})]\oplus\mathscr{E}[(v_2)\times(\overline{v_2})]\oplus\mathscr{E}[(v_3)\times(\overline{v_3})]$$
$$=\mathscr{E}[(v_1,v_2,v_3)\times(\overline{v_1,v_2,v_3})]\quad(2\text{-}4\text{-}3)$$

一般地，我们有

$$\mathscr{E}[(v_1)\times(\overline{v_1})]\oplus\mathscr{E}[(v_2)\times(\overline{v_2})]\oplus\cdots\oplus\mathscr{E}[(v_k)\times(\overline{v_k})]$$
$$=\mathscr{E}[(v_1,v_2,\cdots,v_k)\times(\overline{v_1,v_2,\cdots,v_k})]\quad(2\text{-}4\text{-}4)$$

另一方面，任一割集可写成$\mathscr{E}[(v_1,v_2,v,\cdots,v_k)\times(\overline{v_1,v_2,\cdots,v_k})]$的形式，因此，任一割集可由若干个关联集的环和得到。（证毕）

从上一个定理，我们又可以推得以下定理。

定理2-4-2 设G是一个连通图，则G中任一关联集等于其它所有关联集的环和。

证明： 不失一般性，设$(v_1,v_2,\cdots,v_n)$是G中所有顶点的集合。又设v_1是所选取的顶点，则据式(2-4-4)，

$$\mathscr{E}[(v_2,v_3,\cdots,v_n)\times(\overline{v_2,v_3,\cdots,v_n})]$$
$$=\mathscr{E}[(v_2)\times(\overline{v_2})]\oplus\mathscr{E}[(v_3)\times(\overline{v_3})]\oplus\cdots\oplus\mathscr{E}[(v_n)\times(\overline{v_n})]\quad(2\text{-}4\text{-}5)$$

另一方面，我们知道

$$(\overline{v_2, v_3, \cdots, v_n}) = (v_1) \qquad (2\text{-}4\text{-}6)$$

因此

$$\mathscr{S}[(v_2,v_3,\cdots,v_n)\times(\overline{v_2,v_3,\cdots,v_n})] = \mathscr{S}[(\overline{v_1})\times(v_1)] \qquad (2\text{-}4\text{-}7)$$

这就是与顶点v_1对应的关联集。于是式(2-4-5)的右边等于与顶点v_1对应的关联集。（证毕）

据定理2-4-1，容易看出，在对一个连通图的所有关联集作环和时，将得到一个空集。因此，即使线图G不连通，定理2-4-2也成立。

定理2-4-3 在一个线图中，一个关联集S等于除S外所有关联集的环和。

为了下面叙述方便，我们定义线性相关集合和线性无关集合如下。

定义2-4-1 设$D_1,D_2,\cdots,D_m$是一些集合。如果

$$D_1\oplus D_2\oplus\cdots\oplus D_m = \phi \qquad (2\text{-}4\text{-}8)$$

则说$D_1,D_2,\cdots,D_m$是线性相关的，或称$D_1, D_2, \cdots, D_m$是线性相关集合。

如果在$D_1,D_2,\cdots,D_m$中，没有线性相关集合，则称它们是线性无关的。

例如，若$D_1=\phi$，则$D_1,D_2,\cdots,D_m$显然不是线性无关的。

例2-4-1 图2-1-1所示线图的割集(a,c,f)，(a,b,d)，(b,e)和(b,c,d,f)不是线性无关的，因为

$$(a,c,f)\oplus(a,b,d)\oplus(b,c,d,f)=\phi$$

另一方面，割集(a,c,f)，$(a,b,d,)$，(b,e)和(c,d,e,f)是线性无关的。

据定理2-4-1，任一割集可由若干关联集的环和得到。并且，据定理2-4-3知，一个关联集等于其它所有关联集的环和。

定理2-4-4 设G是由n个顶点组成的连通线图。则G中至多

存在n_v-1个线性无关的关联集。

于是据定理2-4-1和2-4-4，我们有定理2-4-5。

定理2-4-5 在一个包含n_v个顶点的连通线图中，最多存在n_v-1个线性无关的割集。

现在，我们假定在一个由n_v个顶点组成的连通线图G中，有n_v-1个关联集是线性相关的，也就是说，设$S(v_1)$，$S(v_2)$，…，$S(v_{k+1})$是这n_v-1个关联集中的一些关联集，使得

$$S(v_1)\oplus S(v_2)\oplus\cdots\oplus S(v_k)\oplus S(v_{k+1})=\phi \qquad (2-4-9)$$

这一等式又可以写作

$$S(v_{k+1})=S(v_1)\oplus S(v_2)\oplus\cdots\oplus S(v_k) \qquad (2-4-10)$$

但由式(2-4-4)，

$$S(v_1)\oplus S(v_2)\oplus\cdots\oplus S(v_k)$$
$$=\mathscr{E}[(v_1,v_2,\cdots,v_k)\times(\overline{v_1,v_2,\cdots,v_k})] \qquad (2-4-11)$$

而且G中有n_v个顶点，注意$k+1\leqslant n_v-1$，因此$(\overline{v_1,v_2,\cdots,v_k})$中至少包含两个顶点。这就是说，$S(v_1)\oplus S(v_2)\oplus\cdots\oplus S(v_k)$不是一个关联集，与式(2-4-10)中$S(v_{k+1})$是一个关联集的假设矛盾。因此，这$n_v-1$个关联集必是线性无关的。

定理2-4-6 设G是由n_v个顶点组成的连通线图。则G中恰有n_v-1个线性无关的关联集。

假定线图G由ρ个最大连通子图$g_1,g_2,\cdots g_\rho$组成。又假定g_r由n_r个顶点组成，$r=1,2,\cdots,\rho$，并且$\sum_{r=1}^{\rho}n_r=n_v$，这里n_v是G中顶点数。由定理2-4-6知，在g_r中恰有n_r-1个线性无关的关联集。并且对于$1\leqslant p<q\leqslant\rho$，显然$g_p$的线性无关关联集与$g_q$的线性无关关联集组成了线性无关集合。

定理2-4-7 设G是一个包含n_v个顶点和ρ个最大连通子图的分离线图，则G中恰有$n_v-\rho$个线性无关的关联集。

由于有定理2-4-1，这$n_v-\rho$个线性无关的关联集通过环和运

算就足以得到所给线图的所有割集．换句话说，一个线图的所有割集，割集的无重边并和空集的集合$\{S\}$可以表示为

$$\{S\}=\{S(v_{i_1})\oplus S(v_{i_2})\oplus\cdots\oplus S(v_{i_r});\quad S(v_{i_1}),S(v_{i_2}),\cdots,S(v_{i_r})\in\{S(v)\},r=1,2,\cdots,n_v-\rho\} \tag{2-4-13}$$

这里$\{S(v)\}$是一个（包含n_v个顶点和ρ个最大连通子图的）线图的$n_v-\rho$个线性无关关联集的集体。

例2-4-2 考虑图2-1-1所示的线图．由于$n_v-\rho=4$，故有四个线性无关的关联集。假定我们选取$S(1)=(a,c,f)$，$S(2)=(a,b,d)$，$S_3=(c,d,e,g)$，$S(4)=(b,e)$为四个线性无关的关联集的集合，则

$$S(1)\oplus S(2)=(b,c,d,f)$$
$$S(1)\oplus S(3)=(a,d,e,f,g)$$
$$S(1)\oplus S(4)=(a,b,c,e,f)$$
$$S(2)\oplus S(3)=(a,b,c,e,g)$$
$$S(2)\oplus S(4)=(a,d,e)$$
$$S(3)\oplus S(4)=(b,c,d,g)$$
$$S(1)\oplus S(2)\oplus S(3)=(b,e,f,g)$$
$$S(1)\oplus S(2)\oplus S(4)=(c,d,e,f)$$
$$S(1)\oplus S(3)\oplus S(4)=(a,b,d,f,g)$$
$$S(2)\oplus S(3)\oplus S(4)=(a,c,g)$$
$$S(1)\oplus S(2)\oplus S(3)\oplus S(4)=(f,g)$$

加上$S(1)$，$S(2)$，$S(3)$，$S(4)$和空集，就得到了$\{S\}$中的全体集合．读者可以把这些结果，与例2-3-3中的集合相比较。

因为我们不能说每一个关联集都是割集，所以我们不能仅根据定理2-4-7就说，在一个线图中恰有$n_v-\rho$个线性无关的割集．如果我们知道了一种称为“树”的特殊子图的性质，就可以很容易地说明线性无关割集的数目．对此将在后面学习，我们现在就

不研究这个问题了。不过，不用树的知识，要证明线性无关割集的精确数目也并不困难。

习　题

1.证明一个连通图的任一割集均可表示为$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$。

2.设S是一个割集，C是一个回路。证明$S\cap C$包含偶数条边。

3.证明任意三个不同的关联集的交是空集。

4.设e是一个完全图中的一条边，(a)计算包含边e的割集的数目，(b)计算不包含边e的割集的数目。

5.证明任一条边都可以被包含在一个割集中。

6.证明在一个不可分图中，任一对边都可以被包含在一个割集中。

7.证明对于任一条路径P，存在一个割集或割集的无重边并S，使得$P\subset S$。

8.设S是线图G中的一个边集。假定从G中删除S的所有边，使它的秩减少$k\geqslant 1$。证明或否定，当且仅当删除S的任一真子集的所有边，使秩最多减少$k-1$时，S是一个割集或割集的无重边并。

9.假定在一个线图G中，任一对顶点之间最多有一条边。设Ω是G中所有顶点的集体。证明对于Ω的每一个真子集Ω_1，当且仅当$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$是割集时，$G$是一个完全图。

10.设G是包含n_v个顶点的连通线图，则$\{S\}$包含2^{n_v-1}个集合。注意$\{S\}$是所有的割集，割集的无重边并和空集的集体。

11.设e_1和e_2是一个包含n_v个顶点的完全图的两条边。证明包含e_1和e_2的割集的数目是2^{n_v-3}。

12.设G是一个线图，S是包含边e的一个割集。设G_e是从G中删除边e得到的线图。说明如果S包含的边不止一条，则$S-(e)$

是G_e的一个割集。

13.设G是一个线图，S是一个割集。假定边e在G中但不在S中，设$G_{\bar{e}}$是从G中短路边e（即将e的端点重合起来）得到的线图，证明S是$G_{\bar{e}}$的一个割集。

14.证明如果一个关联集$S(v)$不是割集，则顶点v是割点。

第三章　线图的矩阵表示和树

3-1　关 联 矩 阵

我们可以用矩阵代替集合，来表示一个线图。假定我们用矩阵的行p和列q分别表示子图g_p和边e_q，则可以用下面的方法来说明哪些边属于子图g_p：如果e_q在子图g_p中，就记(p,q)元为1；如果e_q不在子图g_p中，就记(p,q)元为0。

如果一个矩阵的所有行都代表一个线图的关联集，则称此矩阵为关联矩阵。类似地，一个割集矩阵的行代表割集和割集的无重边并，而回路矩阵的各行代表回路和回路的无重边并。这里，我们将要讨论割集矩阵和回路矩阵的某些性质，并且要导出一种确定一个给定矩阵是否为割集矩阵（或回路矩阵）的方法。首先，我们来考虑关联矩阵。

定义3-1-1　一个穷举关联矩阵(*exhaustive incidence matrix*)用符号A_e表示，其(p,q)元a_{pq}定义为

$$a_{pq}=\begin{cases}1 & \text{若边 } q \text{ 与顶点 } p \text{ 关联}\\ 0 & \text{若 } q\text{，}p \text{ 不关联}\end{cases} \tag{3-1-1}$$

例如，图3-1-1所示线图的穷举关联矩阵A_e为

$$A_e=\begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\0\end{matrix} & \begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1&1&0\\0&1&1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&1&0&1\end{bmatrix}\end{matrix}$$

其中第1行代表的关联集$S(1)$是(f,g).与顶点2对应的关联集$S(2)$由第2行表示等等. 我们可以看到，A_e的每一行代表一个顶点，也代表与此顶点对应的关联集。

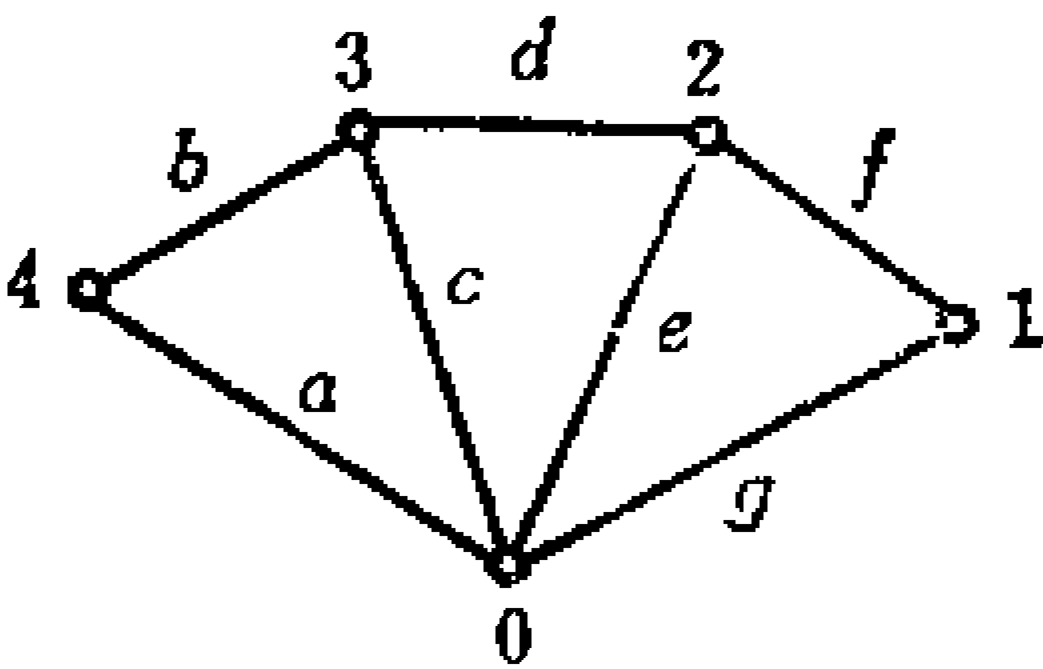


图3-1-1　线图G

由于一条边有两个端点，故在穷举关联矩阵的每一列中，恰有两个1。为了求出关联矩阵的秩，我们首先来研究对线图G的关联矩阵的一种运算。当我们将G的一些顶点合并起来，得到一个新的线图时，这种运算使所得的矩阵成为新线图的关联矩阵。由于我们只讨论不含自环的线图，而重合某些顶点可能产生自环，所以必须对线图作进一步的限制。为此，我们作如下约定：

当对一个线图作某种运算产生了自环时，我们将其删除，以使所得的线图不含自环。

例如，在图3-1-1所示的线图中，将顶点4和0重合在一起，则在所得的图里，边a变成了一个自环。根据约定，边a将被删去，于是得到图3-1-2的线图。这个图的穷举关联矩阵是

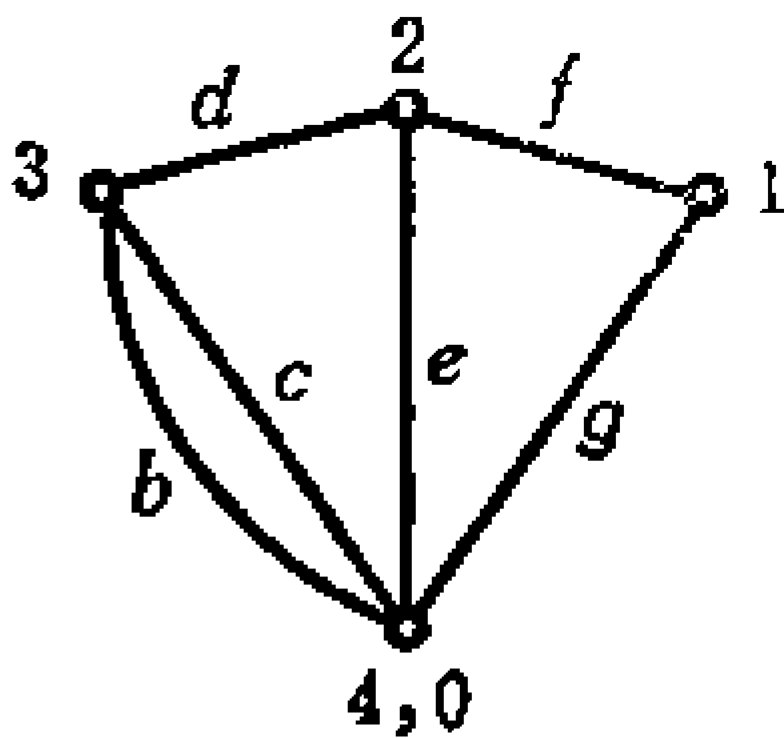


图3-1-2　在图3-1-1所示线图G中，重合顶点4和0得到的线图

$$A_{e2}=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4和0\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix} b & c & d & e & f & g\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}0&0&0&0&1&1\\0&0&1&1&1&0\\1&1&1&0&0&0\\1&1&0&1&0&1\end{bmatrix}\end{array}$$

设A_e是线图G的穷举关联矩阵。将G的顶点i和j重合在一起，就得到线图G'，设它的穷举关联矩阵是A'_e。设$A_e=[a_{pq}]$的行i代表顶点i，行j代表顶点

j，如果我们把A_e的行i加到行i上，那么所得的行j中每一个元素应该是$a_{ir}+a_{jr}$。根据a_{ir}和a_{jr}的不同数值，可以分为以下几种情形：

情形 1　$a_{ir}+a_{jr}=1$（a_{ir}，a_{jr}中有一个为 1，另一个为0）　(3-1-2)

情形 2　$a_{ir}+a_{jr}=0$（a_{ir}和a_{jr}均为 0）　(3-1-3)

情形 3　$a_{ir}+a_{jr}=2$（a_{ir}和a_{jr}均为 1）　(3-1-4)

如果i和j中有一个是与列r对应的边e_r的端点，而另一个不是e_r的端点，就出现情形 1．如果i和j都不是e_r的端点，则出现情形 2．因此，在这两种情形下，A_e'的行j就等于A_e的行i和j相加。

情形 3（即$a_{ir}+a_{jr}=2$）说明，在图G中e_r是连接在顶点i和j之间的。于是，根据前边的约定，在i和j重合时，边e_r应当被删去。这就是说，$a_{ir}+a_{jr}$应当等于 0，而不等于 2。因此，我们可以按照$1+1=0$的规则来把A_e的行i加到行j，从而将行i从A_e中删去，得到穷举关联矩阵A_e'。这种代数运算是模 2 的剩余类。在本章中，我们用它来进行矩阵运算。下面是模 2 算法的加法表和乘法表。

加法表

	1	0
1	0	1
0	1	0

乘法表

	1	0
1	1	0
0	0	0

前面说过，穷举关联矩阵的每一行代表一个顶点，同时也代表与此顶点对应的关联集。设在线图G中，$S(i)$是与顶点i对应的关联集，$S(j)$是与顶点j对应的关联集。则边集$S(i)\oplus S(j)$中的边或与顶点i关联，或与顶点j关联，但不同时与i和j关联。这就说明，在一个矩阵的代表$S(i)\oplus S(j)$的行里，当且仅

当边 e 与顶点 i 或 j 关联，但不同时与二者关联时，对应于边 e 的列为 1．由于我们采用模 2 加法，行 i 和行 j 的和就给出了对应$S(i)\oplus S(j)$的行．换句话说，在一个穷举关联矩阵 A_e中，行的加法恰好与关联集的环和一致．因此，根据定理2-4-7，A_e的秩*等于$n_v-\rho$，其中n_v是G的顶点数，ρ是G的最大连通子图数．

下面我们可以直接从A_e出发，来说明A_e的秩是 $n_v-\rho$．由于在A_e的每一列中恰有两个非零元（因为每一边有两个端点），把除最后一行外所有的行加到最后一行（模 2 加法），则最后一行全部变成零．因此A_e的秩必少于A_e的行数．但A_e的行数就是G的顶点数n_v，故A_e的秩$R(A_e)$应满足下式：

$$R(A_e)\leqslant n_v-1 \tag{3-1-5}$$

假定G是一个连通的线图．设A_e的第一列代表边 e，它的两个端点是 i 和 j．调整行的次序，我们可以使行 i 变成第一行：

$$A_e=\begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array}\overset{\begin{array}{c}e\end{array}}{\left[\begin{array}{c:c} 1 & \cdots\cdots \\ \hdashline 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \\ 1 & A_{e1} \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right]} \tag{3-1-6}$$

注意在列 e 中，行 i 和行 j 处是 1，其余的元素是 0．把行 i（第一行）加到行 j，得到

---

* 一个矩阵的秩等于这个矩阵中最大非奇异子矩阵的阶数．所谓非奇异子矩阵是行列式不为零的方子阵．

$$A'_e = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \cdots \\ \hline 0 & \\ \vdots & \\ 0 & A'_{e1} \\ 0 & \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} i \\ \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \tag{3-1-7}$$

我们已经知道，矩阵A'_{e1}是使G的顶点 i 和 j 重合得到的线图G'的穷举关联矩阵。G'是连通的，因为短路一个连通图中的一边仍得连通图。因此，A'_{e1}具有与A_e相同的性质。用上面采用的方法，即调整行的顺序并将一行加到另一行，我们可以使A'_{e1}的第一列变成一个单位列向量，其中只在第一行有一个 1 。即

$$A''_e = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ \hline 0 & 1 & \\ \hline 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & A'_{e2} \\ 0 & 0 & \end{array}\right] \tag{3-1-8}$$

并且A'_{e2}是一个连通图的穷举关联矩阵，于是A'_{e2}也具有与A_e相同的性质，如此类推。

一般地，我们可以将A_e变成下面的形式

$$A_e^{(k)} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & \cdots & & \\ 0 & 1 & \cdots & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & & & A'_{ek} \end{array}\right] \tag{3-1-9}$$

其中A'_{ek}是一个连通图的穷举关联矩阵。我们还可以继续修改A_e，直到A'_{ek}只包含一行。当A'_{ek}只包含一行时，由于我们排除了自环，对应的线图不含任何边，于是A'_{ek}的元素必全为零。也就是说，一个连通线图的A_e可以变成

$$A_e^{(n_v-1)}=\begin{bmatrix} 1 & & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & 1 & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3\text{-}1\text{-}10)$$

显然这种运算不改变矩阵的秩。因此我们从结果可以看出，至少存在一个阶为n_v-1的子矩阵，其行列式的值非零。

定理3-1-1 一个包含n_v个顶点的连通线图的穷举关联矩阵A_e的秩$R(A_e)$是

$$R(A_e)=n_v-1 \quad (3\text{-}1\text{-}11)$$

例3-1-1 考虑下面的矩阵，它是图3-1-1所示线图的穷举关联矩阵。

$$A_e=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\0 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

交换列g和列a，将行1加到行0。得

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\0 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} g & b & c & d & e & f & a \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

交换列 a 和列 b，把行 2 加到行 3，得

$$
\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\0 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} g & d & c & b & e & f & a \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right] \end{array}
$$

把行 3 加到行 0，得

$$
\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\0 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} g & d & c & b & e & f & a \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] \end{array}
$$

最后，把行 4 加到行 0，就得到

$$
\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\0 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} g & d & c & b & e & f & a \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right] \end{array}
$$

假定G是由ρ个最大连通子图g_1，g_2，…，g_ρ组成的分离图。设g_r的边数和顶点数分别为n_{er}和n_{vr}，其中$r=1，2，\cdots，\rho$。调整行和列的顺序，可使图G的A_e具有以下性质：（1）前n_{v1}行表示g_1中的顶点，接下来的n_{v2}行表示g_2的顶点，…，最后的$n_{v\rho}$行表示g_ρ的顶点；（2）前n_{e1}列表示g_1的边，接下来的n_{e2}列表示g_2的边，…，最后的$n_{e\rho}$列表示g_ρ的边。这个穷举关联矩阵A_e可以被分块为

$$A_e = \begin{array}{c} \\ g_1\text{中的顶点} \\ g_2\text{中的顶点} \\ \vdots \\ g_\rho\text{中的顶点} \end{array} \begin{array}{c} g_1\text{中的边} \quad g_2\text{中的边} \cdots \quad g_\rho\text{中的边} \\ \left[\begin{array}{cccc} A_{e1} & & & \\ & A_{e2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{e\rho} \end{array}\right] \end{array} \qquad (3\text{-}1\text{-}12)$$

其中A_{er}是g_r的穷举关联矩阵，$r=1,2,\cdots\rho$。因为A_{er}是一个连通图g_r的穷举关联矩阵，故A_{er}的秩是$n_{vr}-1$。从而G的秩$R(A_e)$是$n_v-\rho$。

定理3-1-2 穷举关联矩阵的秩等于线图的秩。

根据定理3-1-2，我们可以定义一个线图的关联矩阵A如下。

定义3-1-2 在式(3-1-12)，所示一个线图的穷举关联矩阵中，从每一个A_{er}里删去一行，得到一个$n_v-\rho$行的矩阵A。称A为此线图的关联矩阵。A的秩等于线图的秩。

注意，一个连通线图的关联矩阵A是从它的穷举关联矩阵A_e中删除任一行得到的。因为关联矩阵的每一行代表一个顶点，当线图连通时，为了得到线图的关联矩阵，而从穷举关联矩阵删去一行，这一行所对应的顶点称为参考点。

定义3-1-3 对于连通线图的一个关联矩阵而言，不由它的任何一行所代表的那个顶点，称为此连通线图的参考点。

例如，假定图3-1-1所示连通线图的一个关联矩阵A是

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \qquad (3\text{-}1\text{-}13)$$

则顶点0是参考点。

3-2 树

有一种称为“树”的子图，它不仅在理论上，而且在线图的各种应用，例如电网络的分析中，都具有非常重要的作用。这里我们要介绍树的概念，研究关联矩阵和树的关系。首先我们定义一个矩阵的大子阵如下。

定义3-2-1 对于一个$p\times q$阶矩阵，如果一个方子阵的阶等于p和q的最小值，则称此子阵为大子阵。大子阵的行列式称为大子式。

例如，式(3-1-13)中关联矩阵A的大子阵由四行组成，因为A的行数少于列数。其中一个大子阵是

$$\begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 3\\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

为了说明树与关联矩阵的大子阵之间的关系，我们考虑一个具有n_v个顶点的连通线图G. 设A是G的一个关联矩阵. 因为据定义3-1-2，A的秩等于它的行数，故A至少有一个行列式不为零的大子阵。考虑G的一个子图g_m，它的边对应于非奇异大子阵A_m的列。因为A_m是非奇异的，A_m一定是g_m的一个关联矩阵。因为A_m的行数是n_v-1，且每一行对应除参考点外的一个顶点，故g_m有n_v个顶点。因为A_m是一个方阵，其每一列对应一条边，故g_m共有n_v-1条边。并且g_m的秩是n_v-1。因此g_m必为连通的. 这样的一个子图就称为树.

定义3-2-2 在一个有n_v个顶点的连通线图中，有n_v个顶点和n_v-1条边的连通子图称为树。

现在很明显，如果一个线图G的子图g_m是树，而大子阵A_m的列对应g_m的边，则A_m是非奇异的。另一方面，如果一个包含n_v个顶点和n_v-1条边的子图g_m是分离的，则g_m的秩是$n_v-\rho$（这里$\rho>1$），而由于每一个大子阵包含n_v-1行，若大子阵A_m的列与g_m的全部边对应，则A_m的秩小于它的行数。因此A_m是奇异的*。

定理3-2-1 设A_m是一个连通图的关联矩阵的一个大子阵，则A_m是非奇异的，当且仅当由所有与A_m的列对应的边组成的子图是树。

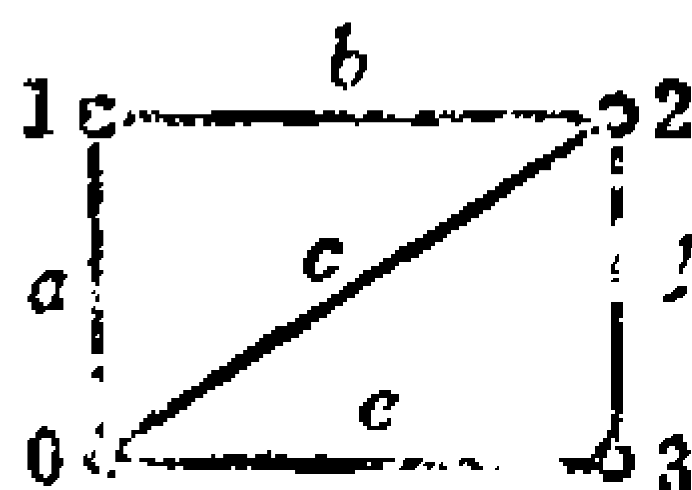


图3-2-1 一个线图

例3-2-1 在图3-2-1所示的线图中，以0为参考点，关联矩阵A是

$$
A=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}
$$

A的非奇异子阵和相应的子图（它们都是树）见表3-2-1。例如方子阵

$$
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

---

* 如果一个大子阵的行列式为零，则称此大子阵是奇异的。

是奇异的，因为与此子阵对应的子图由边a，b，c和顶点0,1,2,3组成，它是分离的。

根据树的定义，显然在一个分离图中没有树。但是，对应于分离图关联矩阵的每一个非奇异大子阵，存在着一个子图，这样的子图称为林。

表3-2-1　非奇异子阵和树

非奇异子阵	树	非奇异子阵	树
t_1 $\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & d \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$	b, a, d	t_5 $\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} a & d & e \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$	a, e, d
t_2 $\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & e \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$	b, a, e	t_6 $\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} b & c & d \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$	b, c, d
t_3 $\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} a & c & d \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$	a, c, d	t_7 $\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} b & c & e \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$	b, c, e
t_4 $\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} a & c & e \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$	a, c, e	t_8 $\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} b & d & e \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$	b, d, e

定义3-2-3　设分离图G由ρ个最大连通图$G_1, G_2, \cdots, G_\rho$组成，若对所有$i = 1, 2, \cdots, \rho$，τ_i是G_i的树，则由ρ个最大连通子图$\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_\rho$组成的子图$\tau$称为林。

例如，考虑图3-2-2所示的线图G，它由三个最大连通子图G_1，G_2和G_3组成。图3-2-3所示的子图包含三个最大连通子图τ_1，τ_2和τ_3，因为τ_1是G_1的树，τ_2是G_2的树，τ_3是G_3的树，所以该子图是一个林。

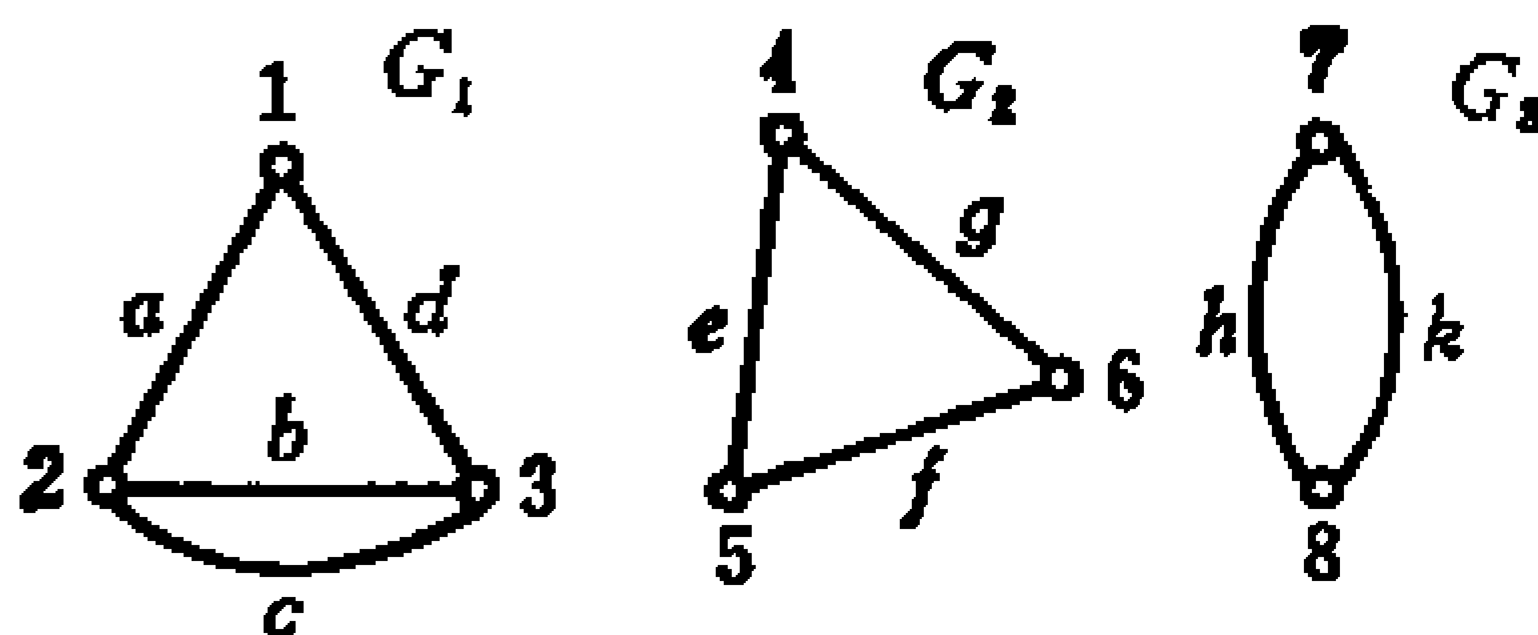


图3-2-2　分离线图G

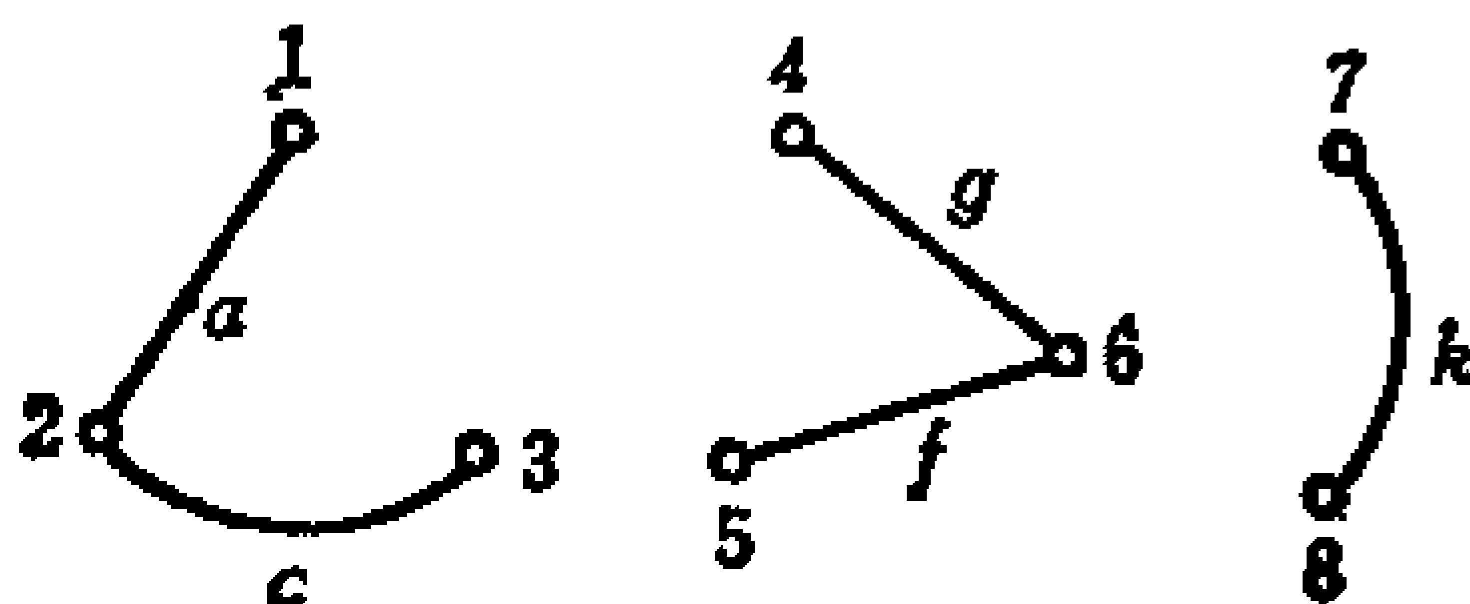


图3-2-3　G的一个林

虽然我们在这里只讨论树的性质，但从定义3-2-3可看出，这些性质也是林的每一个最大连通子图的性质。因此我们也能很容易地想象出林的性质。

树的一个重要性质由以下定理给出。

定理3-2-2　一个连通图的树不包含回路。

证明：　假定一个树包含回路，则删除回路的一边，所得的图仍是连通的。但是，边数将减少1。于是将得到一个具有n_v个顶点和n_v-2条边的连通图。短路一个连通图的一条边，得到少一个顶点的连通图。用逐次短路边的办法，我们将得到一个至少有

两个顶点而没有边的连通图，这是不可能的。因此树中不可能有回路。

（证毕）

根据定义3-2-2和定理3-2-2，树具有以下四个性质：

1.它是连通的。

2.它包含n_v个顶点。

3.它不包含回路。

4.它包含n_v-1条边。

我们可以很容易地说明，其中任意三个性质蕴涵了第四个性质。并且，这些性质中每两个就足以定义一个树，如以下定理所示。

定理3-2-3 对于有n_v个顶点的连通线图来说，一个包含n_v-1条边且不含回路的子图是树。

这个定理的证明留给读者。

以下定理给出了树的一些简单性质。

定理3-2-4 当且仅当一个线图的任两个顶点间恰有一条路径时，这个线图是一个树。

证明： 因为在线图G的任两个顶点间恰有一条路径，所以它是连通的，并且显然没有回路。因此，由树的定义，线图G是一个树。反过来也易证。（证毕）

定理3-2-5 在一个连通线图中至少存在一个树。

证明： 因为一个关联矩阵的非奇异大子阵是存在的，故据定理3-2-1，树的存在是显然的。（证毕）

定理3-2-6 在一个树中，至少存在两个度为1的顶点。

证明： 在第1—2节中，我们曾经说过，一个线图G中所有顶点的度数$d(v)$的和等于边数n_e的两倍，即

$$\sum_{v\in G} d(v)=2n_e \tag{3-2-3}$$

我们这里考虑的图G是树，据定义3-2-2，其边数为 n_v-1，其中n_v是G的顶点数．因此

$$\sum_{v\in G} d(v)=2(n_v-1) \tag{3-2-4}$$

假定G的每一顶点度都等于或大于2，则

$$\sum_{v\in G} d(v)\geqslant 2n_v \tag{3-2-5}$$

但式(3-2-4)表明，$\sum_{v\in G} d(v)$ 不能大于$2n_v-2$。因此必定有些顶点度小于2。假定只有一个顶点度为1（而其它所有顶点度至少是2），则

$$\sum_{v\in G} d(v)\geqslant 2(n_v-1)+1$$

仍大于$2n_v-2$。（证毕）

在第一章中，我们讨论过τ图，它是一个没有回路的子图。下面的定理说明一个τ图是树的条件。

定理3-2-7 对于一个有n_v个顶点的连通线图来说，一个包含n_v-1条边的τ图是树。

证明可用定理3-2-3来完成。

τ图不含回路这个性质说明，一个n_v阶连通线圈的每一个τ图最多只能有n_v-1条边。因此，如果我们知道了所有的τ图，应用定理3-2-7就可以很容易地求出所有的树。但是，要得到一个线图的所有τ图是不容易的，除非它们已经求出，所以这种方法是不实用的。求出所有树的其它方法，将在后面研究。

3-3 回路矩阵

正如关联矩阵表明了一个线图中每一条边的位置那样，一个

回路矩阵表示每一条边所属的回路。现在我们要来讨论回路矩阵的某些性质，特别是回路矩阵的秩，它等于一个线图的所有欧拉图的集体$\{E\}$中生成元的数目。我们还将研究另一个重要性质，根据这个性质，我们可以把一个回路矩阵变换成关联矩阵，反之亦然。首先，我们定义穷举回路矩阵如下。

定义3-3-1 一个线图的穷举回路矩阵用B_e表示，它的各行代表所有的回路和回路的无重边并（即欧拉图），它的各列代表边。穷举回路矩阵$B_e=[b_{pq}]$的元b_{pq}是

$$b_{pq}=\begin{cases}1 & \text{若边 } q \text{ 在回路（或回路的无重边并）} p \text{ 中}\\ 0 & \text{若边 } q \text{ 不在回路（或回路的无重边并）} p \text{ 中}\end{cases} \tag{3-3-1}$$

例如，图3-3-1所示线图的穷举回路矩阵B_e是

$$\begin{array}{r} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7=C_1\oplus C_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

因为B_e中每一行代表一个回路或回路的无重边并，故行与行的和（模 2 ）或为回路，或为回路的无重边并。例如，上例中B_e的前两行加起来就得到第四行。

设G是一个包含n_e条边和n_v个顶点的线图，A和B_e分别是G的关联矩阵和穷举回路矩阵，其中

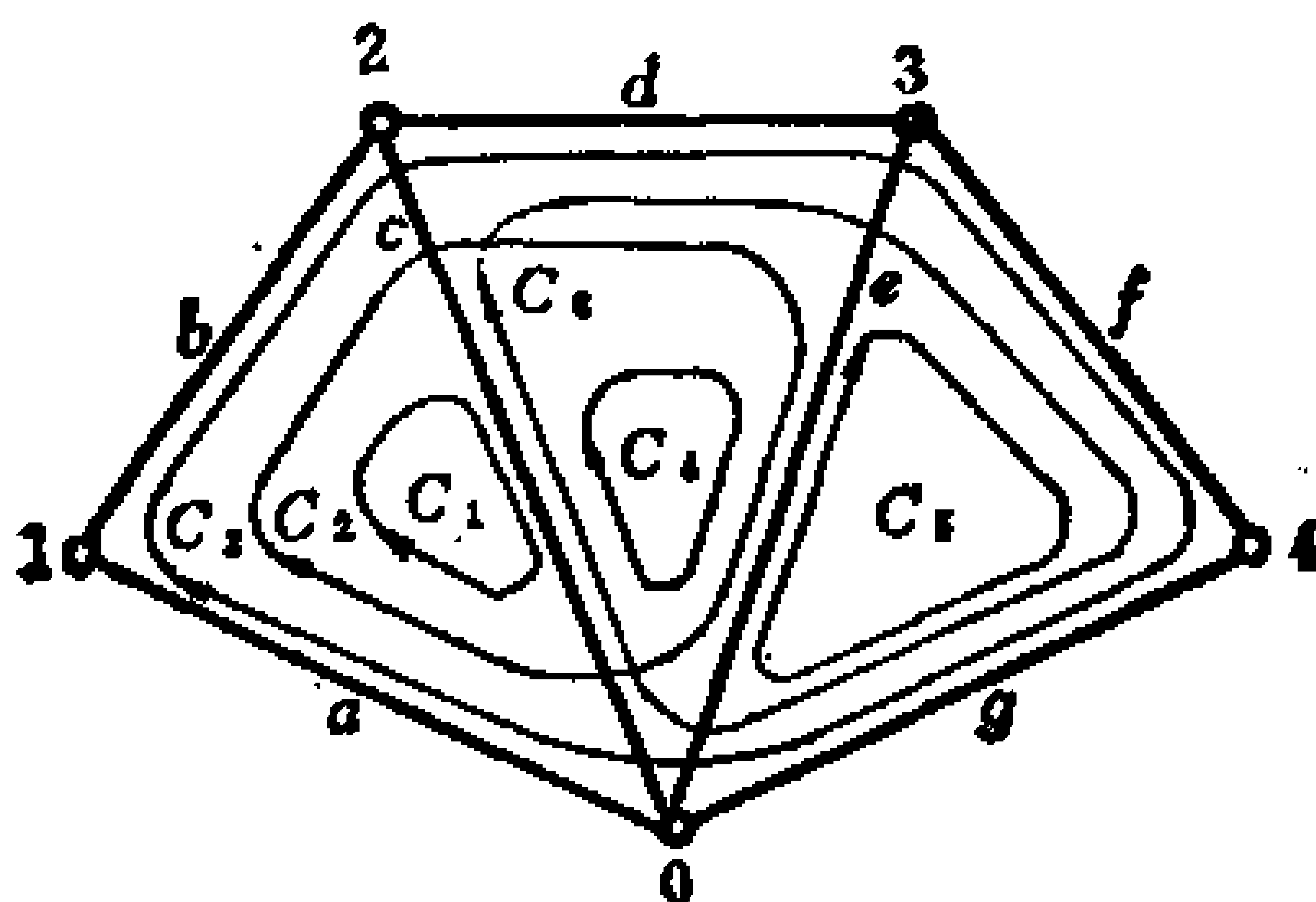


图3-3-1　一个线图

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_{n_v-1} \end{bmatrix} \tag{3-3-2}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_p \end{bmatrix} \tag{3-3-3}$$

调整A的列，使得对于$k=1,2,\cdots,n_e$，A和B_c的第k列表示同一条边。则

$$AB_c' = \begin{bmatrix} A_1B_1' & A_1B_2' & \cdots & A_1B_p' \\ A_2B_1' & A_2B_2' & \cdots & A_2B_p' \\ A_{n_v-1}B_1' & A_{n_v-1}B_2' & \cdots & A_{n_v-1}B_p' \end{bmatrix} \tag{3-3-4}$$

其中上标 t 表示矩阵的"转置"，且

$$A_iB_j^t=\sum_{k=1}^{n_e}a_{ik}b_{jk} \tag{3-3-5}$$

注意$a_{ik}=1$意味着边k与顶点 i 关联，$b_{jk}=1$ 意味着边 k 在B_e的第 j 行所代表的回路（或回路的无重边并）中。于是式(3-3-5)中非零项的数目就是这样的边的数目：其中每一条边与顶点 i 关联，同时在回路 j（或由B_e的第 j 行所代表的回路的无重边并）中。由于一个回路或回路的无重边并中每一个顶点的度都是偶数，所以式(3-3-5)中非零项的数目是偶数。又因每一个非零项为 1，而我们采用的是模 2 加法，故对所有的 i 和 j，

$$A_iB_j^t=0 \tag{3-3-6}$$

定理3-3-1 设A和B_e是一个线图的关联矩阵和穷举回路矩阵，则

$$AB_e^t=0^* \tag{3-3-7}$$

类似地有

$$B_eA^t=0 \tag{3-3-8}$$

例3-3-1 图3-3-1中线图的AB_e^t是

$$AB_e^t=\begin{matrix} & a & b & c & d & e & f & g \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

* 这里 0 表示所有元素均为零的矩阵。

$$
\begin{array}{c}
\begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & C_7 \end{matrix} \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{matrix} = 0
$$

定义3-3-2 对于线图G的一个树（或林）t，不在t中的边称为弦。G的不在t中的所有边的集合叫做关于树（或林）t的弦集。

我们已经知道，对于有n_v个顶点的连通线图，一个树包含n_v-1条边，因此，一个弦集包含n_e-n_v+1条边，这里n_e是线图中边的数目。

例如，边集(a,c,e,g)是图3-3-1所示线图的一个树，则边集(b,d,f)是关于树(a,c,e,g)的弦集。注意图3-3-1中线图的边数和顶点数分别为$n_e=7,n_v=5$。因此弦集包含$n_e-n_v+1=3$条边。

如果将一条弦d添加到树t中，所得的图$(d)\cup t$正好包含一个回路。根据定理3-2-4，我们知道，在一个树中任两个顶点之间恰有一条路径，所以这点是容易看出的。因为每添加一条弦到树中，可得到一个回路，我们有n_e-n_v+1条弦，可以得到n_e-n_v+1个回路，其中每一个正好包含关于树t的弦集中的一条弦。这些回路的集合称为关于树t的基本回路集合。

定义3-3-3 设$(e_1,e_2,\cdots,e_{n_e-n_v+1})$是一个连通线图关于树$t$的弦集，又设$C_i$是$t\cup(e_i)$中的回路，$i=1,2,\cdots,n_e-n_v+1$。则回路集体$C_1,C_2,\cdots,C_{n_e-n_v+1}$称为关于树$t$的基本回路集合。

从这个定义可看出，关于树t的弦集中每一条弦恰在关于树t的基本回路集合中一个回路里。因此在这些基本回路中，任取

几个作环和都不会成为空集。也就是说，这些基本回路是线性无关的。例如，对于图3-3-1中线图的树$t=(a,c,e,g)$，一个基本回路集合由(a,b,c)，(c,d,e)和(e,f,g)组成。显然，它们是线性无关的。

调整一个穷举回路矩阵B_e的列，使它的前n_e-n_v+1列对应关于树t的所有弦，前n_e-n_v+1行表示关于树t的基本回路矩阵集合中的回路，便得到以下形式的矩阵：

$$
B_e=\begin{array}{c}
 \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ C_{n_e-n_v+1} \\ \vdots \\ \vdots
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc|c} e_1 & e_2 & \cdots & & e_{n_e-n_v+1} & e_1' \cdots e_{n_v-1}' \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & & & 0 & \cdots \\
0 & 1 & & & 0 & \cdots \\
0 & 0 & & & 0 & \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \\
 & & & & 0 & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots \\
\hline
 & & \cdots & & & \cdots \\
 & & \cdots & & & \cdots
\end{array}\right]
\end{array}
\qquad (3\text{-}3\text{-}9)
$$

可以看出，在B_e的左上角有一个单位矩阵。这是因为，每一条弦恰在关于树t的基本回路集合的一个回路中。

取出式(3-3-9)中B_e的前n_e-n_v+1行得到的子矩阵，称为基本回路矩阵，记为B_f。

定义3-3-4 一个线图的包含$n_e-n_v+\rho$行，且具有以下形式的回路矩阵*，称为基本回路矩阵：

$$B_f=[U B_{f_{12}}] \qquad (3\text{-}3\text{-}10)$$

其中ρ是此线图的最大连通子图的数目，U是一个单位矩阵。

例如，在图3-3-1所示的线图中，如果我们取树$t=(a,c,e,g)$，

* 关于回路矩阵的定义，见定义3-3-5。——译注

则关于树(a,c,e,g)的基本回路集合是

$$C_1=(b,a,e)$$
$$C_2=(d,c,e)$$
$$C_3=(f,e,g)$$

注意其中b，d，f是弦。关于树$t=(a, c, e, g)$的基本回路矩阵是

$$B_f=\begin{matrix} & b & d & f & a & c & e & g \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

取不同的树，我们就得到不同的基本回路矩阵。

定理3-3-2 在一个连通线图的基本回路矩阵$[UB_{f_{12}}]$中，与$B_{f_{12}}$的列对应的边组成一个树。

证明： 设一个连通图的关联矩阵是

$$A=[A_{11}A_{12}]$$

其中，A的第i列和基本回路矩阵$B_f=[UB_{f_{12}}]$的第i列代表同一条边，$i=1, 2, \cdots, n_e$。由定理3-3-1，

$$AB_f^t=A_{11}+A_{12}B_{f_{12}}^t=0$$

或

$$A_{11}=A_{12}B_{f_{12}}^t$$

因此

$$A=[A_{12}B_{f_{12}}^t \ A_{12}]=A_{12}[B_{f_{12}}^t \ U]$$

因为A的秩与A的行数相同，A_{12}必为非奇异的。故据定理3-2-1，与A_{12}的列对应的边构成树。而A_{12}的列与$B_{f_{12}}$的列都对应于相同的边。因此，与$B_{f_{12}}$对应的边构成树。 （证毕）

对于由p个最大连通子图G_1，G_2，…，G_p组成的分离线图G，基本回路矩阵可分块为

$$B_f=\begin{bmatrix} B_{f1} & & & 0 \\ & B_{f2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_{f\rho} \end{bmatrix} \tag{3-3-11}$$

其中，每一个B_{fp}是G_p的基本回路矩阵，这是因为，对于$1\leqslant p<q\leqslant\rho$，$G_p$中的任一边不可能在$G_q$的回路中。由于每一个$B_{fp}$的形式为$[U_pB_{fp_{12}}]$，我们可以将$B_f$调整为

$$B_f=\left[\begin{array}{cccc|cccc} U_1 & & & 0 & B_{f1_{12}} & & & 0 \\ & U_2 & & & & B_{f2_{12}} & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ 0 & & & U_\rho & 0 & & & B_{f\rho_{12}} \end{array}\right]=[UB_{f_{12}}] \tag{3-3-12}$$

因此，要得到一个分离图的基本回路矩阵B_f，可用林来代替树。首先选取给定分离图的一个林，譬如说t_f。然后我们调整B_f的列，使它的前$n_e-n_v+\rho$列代表不在林t_f中的边。现在，我们把第一列所代表的边e_1，加入林t_f，所得的图$t_f\cup(e_1)$恰有一个回路，显然它包含e_1。我们用B_f的第一行来表示这个回路。于是在B_f的(1，1)处是1，接下来至少有$n_e-n_v+\rho-1$个零。然后我们把B_f的第二列代表的边e_2加入林t_f，所得的图$t_f\cup(e_2)$也恰含一个回路，这个回路由B_f的第二行来表示，如此类推，最后得到的矩阵B_f具有$[UB_{f_{12}}]$的形式。这个矩阵叫做关于一个林的基本回路矩阵。

定理3-3-2给出了连通图基本回路矩阵的一个性质。分离线图的基本回路矩阵$B_f=[UB_{f_{12}}]$也有同样的性质。

定理3-3-3 在一个分离线图的基本回路矩阵$B_f=[UB_{f_{12}}]$

中，与$B_{f_{12}}$的列对应的边构成一个林。

证明留给读者。

由于在基本回路矩阵中有一个单位矩阵，而基本回路矩阵是穷举回路矩阵B_e的子矩阵，所以，在一个线图中，穷举回路矩阵B_e的秩至少是$n_e - n_v + \rho$。这里n_e是边数，n_v是顶点数，ρ是最大连通子图的数目。

现在，我们要利用西勒维斯特（Sylvester）零度定理，证明B_e的秩是$n_e - n_v + \rho$。

定理3-3-4（西勒维斯特定理） 设$H = [h_{ij}]_{p,e}$和$K = [k_{ij}]_{e,q}$是两个矩阵，其中$p \leqslant e$，$q \leqslant e$，且H的秩是p。假定

$$HK = 0 \qquad (3\text{-}3\text{-}13)$$

则K的秩不超过$e - p$。

证明： 不失一般性，设

$$H = [H_{11} \ U] \qquad (3\text{-}3\text{-}14)$$

其中U是一个p阶单位阵。将K分块为

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{12} \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}3\text{-}15)$$

我们有
$$HK = H_{11}K_{11} + K_{12} = 0 \qquad (3\text{-}3\text{-}16)$$

$$K_{12} = -H_{11}K_{11} \qquad (3\text{-}3\text{-}17)$$

此式说明，K_{12}的任一行可由K_{11}的行的线性组合得到。这个组合是由$-H_{11}$的一行给出的。于是K的秩最多等于K_{11}的行数，因为H_{11}是$p \times (e-p)$矩阵，K_{11}必为$(e-p) \times q$矩阵。故K的秩不可能大于$e-p$。（证毕）

设有一个由ρ个最大连通子图组成的线图，A和B_e分别是它的关联矩阵和穷举回路矩阵。由定理3-3-1，我们知道：

$$AB_e^t = 0 \qquad (3\text{-}3\text{-}18)$$

又由定理3-1-2，A的秩是$n_v - \rho$。故由西勒维斯特定理，B_e的秩不能大于$n_e - n_v + \rho$。然而，我们已经知道，B_e的秩至少是$n_e -$

$n_v+\rho$。因此有以下定理。

定理3-3-5 由ρ个最大连通子图组成的线图的穷举回路矩阵的秩是$n_e-n_v+\rho$，其中n_e是线图的边数，n_v是顶点数。

由于穷举回路矩阵B_e的秩是$n_e-n_v+\rho$，所以B_e的一个秩为$n_e-n_v+\rho$的子矩阵就能表出一个线图的所有回路。

定义3-3-5 设B是由穷举回路矩阵B_e中$n_e-n_v+\rho$行组成的子矩阵，如果B的秩是$n_e-n_v+\rho$，则称B是回路矩阵。

注意一个基本回路矩阵包含$n_e-n_v+\rho$个线性无关的行，显然它是穷举回路矩阵B_e的一个子矩阵。并且线图中的所有边都由基本回路矩阵的列表示。因此，基本回路矩阵是线图的一个回路矩阵。另外，如果一个线图中，有$n_e-n_v+\rho$个回路是线性无关的（见定义2-4-1），则穷举回路中代表这些回路的行所组成的子矩阵是回路矩阵。在第1—3节中，我们已经看到，存在一个生成元的集合，它能产生$\{E\}$中的全部元素。这里$\{E\}$是所有可能的回路、回路的无重边并和空集的集体。因为一个穷举回路矩阵的行代表$\{E\}$中除空集外的所有元素，所以由一个回路矩阵的行所代表的回路，将组成一个生成元集合，它能产生$\{E\}$中所有的元素。

设B_{11}是回路矩阵B的一个非奇异大子阵，则我们可以将B表为

$$B=[B_{11}B_{12}] \qquad (3\text{-}3\text{-}19)$$

因为B_{11}是非奇异的，故存在逆矩阵。设B_{11}^{-1}是B_{11}的逆，则用B_{11}^{-1}左乘式（3-3-19），可得

$$B_{11}^{-1}B=[U \quad B_{11}^{-1}B_{12}] \qquad (3\text{-}3\text{-}20)$$

由定义3-3-4，一个基本回路矩阵B_f是一个能表为

$$B_f=[U \quad B_{f_{12}}] \qquad (3\text{-}3\text{-}21)$$

的回路矩阵。故$B_{11}^{-1}B$是一个基本回路矩阵。并且，对于我们所选取的任一非奇异大子阵，都可以用左乘此大子阵的逆的办法，使B变成基本回路矩阵。因此B的任一非奇异大子阵的列可以变

成基本回路矩阵中U的列。由定理3-3-2和3-3-3，我们知道，一个基本回路矩阵中U的列代表的边构成一个弦集，故与B的任何非奇异大子阵对应的边构成关于一个林的弦集。

这个结论反过来也是对的。这就是说，对于我们所选定的任一林，可以构成一个基本回路矩阵，其中单位矩阵的列代表关于此林的所有弦。因为一个穷举回路矩阵B_e的任一行，可以由基本回路矩阵诸行的线性组合得到，而回路矩阵B是B_e的一个子矩阵，所以在B中与有关林的弦相对应的那些列，必然要变成关于此林的基本回路矩阵中的单位矩阵。因此，B中与关于任一林的弦相对应的那些列，就构成了一个非奇异大子阵。

定理3-3-6 回路矩阵的一个大子阵是非奇异的，当且仅当它的列都与关于一个林的所有弦相对应。当$\rho=1$时，回路矩阵的一个大子阵是非奇异的，当且仅当它的列都与关于一个树的所有弦相对应。

作为一个例子，表3-3-1表明了图3-2-1所示线图中B的非奇异大子阵及其对应的弦集。这里

$$B=\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

为了方便，我们定义“枝”如下。

定义3-3-6 一个选定的树（或当$\rho>1$时一个选定的林）中的各边称为树枝（林枝），或简称枝。

因为定理3-3-1给出了关联矩阵和回路矩阵之间的关系，我们可以从一个关联矩阵得到回路矩阵。为此，假定t是线图G的一个林（当$\rho=1$时是树）。我们调整G的关联矩阵A的列，就可以将A分块为：

表3-3-1　非奇异大子阵

	非奇异大子阵	弦集
t_1	$\begin{matrix} a & c \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	a　c
t_2	$\begin{matrix} a & d \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	a　d
t_3	$\begin{matrix} a & e \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	a　e
t_4	$\begin{matrix} b & c \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	b　c
t_5	$\begin{matrix} b & d \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	b　d
t_6	$\begin{matrix} b & e \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	b　e
t_7	$\begin{matrix} c & d \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	c　d
t_8	$\begin{matrix} c & e \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	c　e

$$A=[A_{11}A_{12}] \tag{3-3-22}$$

其中A_{11}的列与关于t的弦相对应．因此A_{12}的列代表t的所有枝。我们再调整关于t的基本回路矩阵B_f的列，使得对$i=1,2,\cdots,n_e$，A和B_f的第i列都表示同一条边，设此基本回路矩阵是

$$B_{f_{12}}=[U\ \ B_{f_{12}}] \tag{3-3-23}$$

因为

$$B_fA^t=[U\ \ B_{f_{12}}]\begin{bmatrix}A_{11}{}^t\\ A_{12}{}^t\end{bmatrix}=0 \tag{3-3-24}$$

所以有

$$A_{11}{}^t+B_{f_{12}}A_{12}{}^t=0 \tag{3-3-25}$$

或

$$B_{f_{12}}=A_{11}{}^t[A_{12}{}^t]^{-1} \tag{3-3-26}$$

注意A_{12}是由与林（或树）t的边对应的列组成的。因此A_{12}是非奇异的。于是A_{12}^t有逆$[A_{12}^t]^{-1}$。

由式（3-2-26）可以看出，知道了一个关联矩阵则基本回路矩阵可由

$$B_f=[U\ \ A_{11}{}^t[A_{12}{}^t]^{-1}] \tag{3-3-27}$$

得到。例如，在图3-2-1所示的线图中，关于树$t=(a,b,d)$的基本回路矩阵可以由一个关联矩阵得出如下。

$$A=[A_{11}\ \ A_{12}]=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix}c & e & a & b & d\end{matrix}\\\left[\begin{array}{cc:ccc}0&0&1&1&0\\1&0&0&1&1\\0&1&0&0&1\end{array}\right]\end{array}$$

A_{12}^t是

$$A_{12}{}^t=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

因此，$[A_{12}']^{-1}$是

$$[A_{12}']^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

现在$A_{11}'[A_{12}']^{-1}$可简化为

$$A_{11}'[A_{12}']^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

于是

$$B_f=\begin{array}{c}\\ \\ \end{array}\begin{bmatrix}\overset{c}{1}&\overset{e}{0}&\vdots&\overset{a}{1}&\overset{b}{1}&\overset{d}{0}\\0&1&\vdots&1&1&1\end{bmatrix}$$

3-4 割集矩阵

考虑一个关联矩阵A。假定我们把A的一行加（模2）到另一行上去，一般说，所得的行将不再表示一个关联集，而是表示一个割集或割集的无重边并。因此，把A的各行互加，可以得到一种叫做“割集矩阵”的矩阵。事实上，在一个割集矩阵中，每一行代表一个割集，或者割集的无重边并。

定义3-4-1 穷举割集矩阵记为Q_e，它的行表示一个线图中所有割集和割集的无重边并。Q_e的每一个元素q_{ij}是

$$q_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若边 } j \text{ 在割集（或割集的无重边并）} i \text{ 中}\\ 0 & \text{若边 } j \text{ 不在 } i \text{ 中}\end{cases} \qquad (3\text{-}4\text{-}1)$$

因为一个关联集或为割集，或为割集的无重边并，所以关联矩阵是Q_e的一个子矩阵。因此Q_e的秩至少是$n_v-\rho$。

由定理2-4-1，我们知道，任一割集可由关联集的环和得

到。并且，行与行的加法（模 2）与对应于这些行的集合的环和相同。

定理3-4-1 一个穷举割集矩阵Q_e的秩等于$n_v-\rho$。

这一定理导出了下面的定义。

定义3-4-2 由穷举割集矩阵的$n_v-\rho$行构成的一个子矩阵Q，如其秩为$n_v-\rho$，则称Q为割集矩阵。

例如，图3-2-1所示线图的穷举割集矩阵Q_e是

$$Q_e=\begin{matrix} S(1) \\ S(2) \\ S(3) \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{matrix}\overset{\begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

其中割集S_4,S_5,S_6,S_7分别为

$$S_4=S(1)\oplus S(2)$$
$$S_5=S(1)\oplus S(3)$$
$$S_6=S(2)\oplus S(3)$$
$$S_7=S(1)\oplus S(2)\oplus S(3)$$

取出行4,5,7,就得到

$$Q=\begin{matrix} S_4 \\ S_5 \\ S_7 \end{matrix}\overset{\begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

这是一个割集矩阵，因为Q的秩等于Q_e的秩。注意其中S_5是割集的无重边并。

根据割集矩阵的定义，任一关联矩阵A是一个割集矩阵。因此任一割集矩阵Q可表示为

$$Q=DA \tag{3-4-2}$$

其中D是一个$n_v-\rho$阶的非奇异矩阵。（当我们说一个矩阵的秩是$n_v-\rho$时，我们总是把由ρ个最大连通子图构成的线图看作包括$\rho=1$的情况）。

由式（3-3-7），我们知道

$$AB_e'=0 \tag{3-4-3}$$

左乘一个非奇异矩阵D，由式（3-4-2），有

$$DAB_e'=QB_e'=0 \tag{3-4-4}$$

并且对任一割集矩阵，总存在一个非奇异矩阵D，使得DA等于这个割集矩阵。因此，式（3-4-4）可以写作

$$Q_eB_e'=0 \tag{3-4-5}$$

当我们用割集矩阵Q和回路矩阵B来替换Q_e和B_e时，上式也成立。

定理3-4-2 设Q和B分别为一个线图的割集矩阵和回路矩阵，对于所有的p，Q和B的列p对应同一条边，则

$$QB'=0 \tag{3-4-6}$$

且

$$BQ'=0 \tag{3-4-7}$$

可以证明，割集矩阵的非奇异大子阵的列对应林的枝。为此，我们考虑一个关于林t的基本回路矩阵（注意当$\rho=1$时，t是树）。

$$B_f=[U \quad B_{f_{12}}] \tag{3-4-8}$$

调整割集矩阵Q的列，使得对所有的p，Q的第p列与B_f的第p列表示同一条边。将Q分块为

$$Q=[Q_{11}Q_{12}] \tag{3-4-9}$$

由式(3-4-5)

$$QB_f^t=[Q_{11}Q_{12}]\begin{bmatrix}U\\B_{f_{12}}^t\end{bmatrix}=Q_{11}+Q_{12}B_{f_{12}}^t=0 \tag{3-4-10}$$

因此

$$Q_{11}=Q_{12}B_{f_{12}}^t \tag{3-4-11}$$

或

$$Q=[Q_{12}B_{f_{12}}^t\ \ Q_{12}]=Q_{12}[B_{f_{12}}^t\ \ U] \tag{3-4-12}$$

因为Q的秩是$n_t-\rho$，Q的行数也是$n_t-\rho$，要使Q中存在非奇异的大子阵，Q_{12}必为非奇异的。因为与$B_{f_{12}}$的列对应的边构成一个林，故与Q_{12}的列对应的边必然也构成一个林。

定理3-4-3 如果割集矩阵的一个大子阵的列对应于一个林的枝，则它是非奇异的。

考虑一个割集矩阵Q，将它分块为

$$Q=[Q_{11}Q_{12}] \tag{3-4-13}$$

假定Q_{12}是非奇异的，上式左乘其逆Q_{12}^{-1}就变成

$$Q_{12}^{-1}Q=[Q_{12}^{-1}Q_{11}\ \ U] \tag{3-4-14}$$

因为Q_{12}^{-1}是非奇异矩阵，所以$Q_{12}^{-1}Q$是另一个割集矩阵。设这个割集矩阵是Q'，也就是

$$Q'=Q_{12}^{-1}Q=[Q_{11}'\ \ U] \tag{3-4-15}$$

将一个回路矩阵B分块为

$$B=[B_{11}\ \ B_{12}] \tag{3-4-16}$$

其中，对所有的i，B的第i列和Q'的第i列表示同一条边，则

$$BQ'^t=B_{11}Q_{11}'^t+B_{12}=0 \tag{3-4-17}$$

因此

$$B_{12}=B_{11}Q_{11}'^t \tag{3-4-18}$$

或

$$B=[B_{11}\ \ B_{11}Q_{11}'^t]=B_{11}[U\ \ Q_{11}'^t] \tag{3-4-19}$$

B是一个回路矩阵，故B的行数等于B的秩。这就意味着B_{11}必为

非奇异的。由定理3-3-6，与$\overline{B}_{11}$的列对应的边，形成了关于一个林的弦集。因此，与B_{12}的列对应的边构成一个林。我们已经调整B，使B_{12}和Q_{12}的各列对应相同的边，故与Q_{12}的列对应的边构成一个林。由定理3-4-3，我们有以下定理。

定理3-4-4 一个割集矩阵Q的大子阵是非奇异的，当且仅当它的列对应于一个林的枝。当$\rho=1$时，Q的大子阵是非奇异的，当且仅当大子阵的列对应于一个树的枝。

如同前面定义基本回路矩阵一样，我们来定义基本割集矩阵。

定义3-4-3 一个形为

$$Q_f=[Q_{f_{11}}\ \ U] \tag{3-4-20}$$

的割集矩阵称为基本割集矩阵。

注意与U的列对应的边构成一个林（当$\rho=1$时是一个树）。

与基本割集矩阵的行对应的割集称为基本割集。

定义3-4-4 设Q_f是关于林t（当$\rho=1$时是树）的基本割集矩阵。则由Q_f的行表示的割集集合，称为关于t的基本割集集合。

下面我们将导出一种方法，用这种方法，可以直接从线图来得到关于一个林的基本割集集合。设t是一个林，式(3-4-20)中的基本割集矩阵是由它得到的。又设

$$B_f=[U\ \ B_{f_{12}}] \tag{3-4-21}$$

是关于同一个林t的基本回路矩阵，它的列经过调整，使得对$i=1,2,\cdots,n_e$，B_f的第i列和式(3-4-20)中Q_f的第i列表示同一条边。则

$$Q_fB_f^t=Q_{f_{11}}+B_{f_{12}}^t=0 \tag{3-4-22}$$

因此

$$Q_{f_{11}}=B_{f_{12}}^t \tag{3-4-23}$$

或

$$Q_f=[B_{f_{12}}^t\ \ U] \tag{3-4-24}$$

设对$i=1,2,\cdots,n_e-n_v+\rho$，$Q_f$的第$i$列表示边$e'_i$，而$Q_f$的第$(n_e-n_v+\rho+p)$列表示边$e_p$，$p=1,2,\cdots,n_v-\rho$，如下所示：

$$
Q_f=\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} e'_1e'_2\cdots e'_{n_e-n_v+\rho} & e_1e_2\cdots e_{n_v-\rho} \end{array}\\
\left[\begin{array}{c:cccc}
 & 1 & & & \\
 & & 1 & & \\
B^t_{f12} & & & \ddots & 0\\
 & & 0 & & 1
\end{array}\right]
\end{array} \qquad (3\text{-}4\text{-}25)
$$

因此弦集由$e'_1,e'_2,\cdots,e'_{n_e-n_v+\rho}$组成，而$t$的枝是$e_1,e_2,\cdots,e_{n_v-\rho}$。可以看出，由$Q_f$的行$j$表示的割集$S_j$包含一个枝$e_j$，以及与$B^t_{f12}$中在第$j$行为1的那些列所对应的弦。$B^t_{f12}$的行$j$是$B_f$中对应于枝$e_j$的列，如下式所示：

$$
B_f=\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} e'_1e'_2\cdots e'_{n_e-n_v+\rho} & e_1e_2\cdots e_j\cdots e_{n_v-\rho} \end{array}\\
\left[\begin{array}{cccc:c}
1 & & & & \\
 & 1 & & 0 & \\
 & & \ddots & & B_{f12}\\
 & 0 & & 1 &
\end{array}\right]
\end{array} \qquad (3\text{-}4\text{-}26)
$$

假定B_{f12}的第r行在第j列为1。注意B_{f12}的列j对应枝e_j，而1在第r行说明，在第r行所代表的基本回路C_r中，含有枝e_j。我们把弦e'_r添加到林t中，得到回路C_r。显然C_r包含弦e'_r.因此，在B_{f12}的第r行和列j交叉处为1，说明基本回路C_r既包含e'_r又包含e_j。

另一方面，B_{f12}的第r行和列j的交叉处为1，说明B^t_{f12}的第r列在行j处为1。于是由式(3-4-25)知，行j所代表的基本割集S_j包含边e'_r。注意，由于Q_f中有单位矩阵，故基本割集S_j也包含边e_j。因此e'_r和e_j都在S_j中。

假定$B_{j_{12}}$的第r行在列j处是0，则可看出，B_j的第r行所代表的基本回路C_r不包含边e_j。另一方面，如果$B'_{j_{12}}$的行j在第r列为0，则Q_j的行j所代表的基本割集S_j不包含边e'_r。

定理3-4-5 弦e'_r在包含枝e_j的基本割集S_j中，当且仅当枝e_j是在包含弦e'_r的基本回路C_r中。

由这个定理，可以用以下方法求出基本割集集合.设t是线图中的一个林.又设S_j是关于t的一个基本割集。假定枝e_j在S_j中.为了得到S_j中所有的弦，我们把每一条弦e'_p一个一个地加到t中，构成线图$(e'_p)\cup t$。如果$(e'_p)\cup t$的回路中包含枝e_j，则e'_p在S_j中。否则弦e'_p不在S_j中。

例3-4-1 对于图3-3-1所示的线图，假定我们选取一个树$t=(a,c,e,g)$，则基本割集S_a, S_c, S_e, S_g可以用以下方法得到。这里$a\in S_a$，$c\in S_c$，$e\in S_e$，$g\in S_g$。

对于S_a，首先我们把边b（一条弦）加到树t中，如图3-4-1所示。因为所得图的回路中包含枝a和弦b，所以弦b在S_a中。我们把弦d加到t中，如图3-4-2所示。所得图的回路不同时包含枝a和弦d。因此弦d不在S_a中。同样，我们把弦f加到t中，如图3-4-3所示，所得图中的回路不同时包含枝a和弦f，因此弦f不在S_a中。这样，我们可以断定，基本割集S_a是

$$S_a=(a,\ b)$$

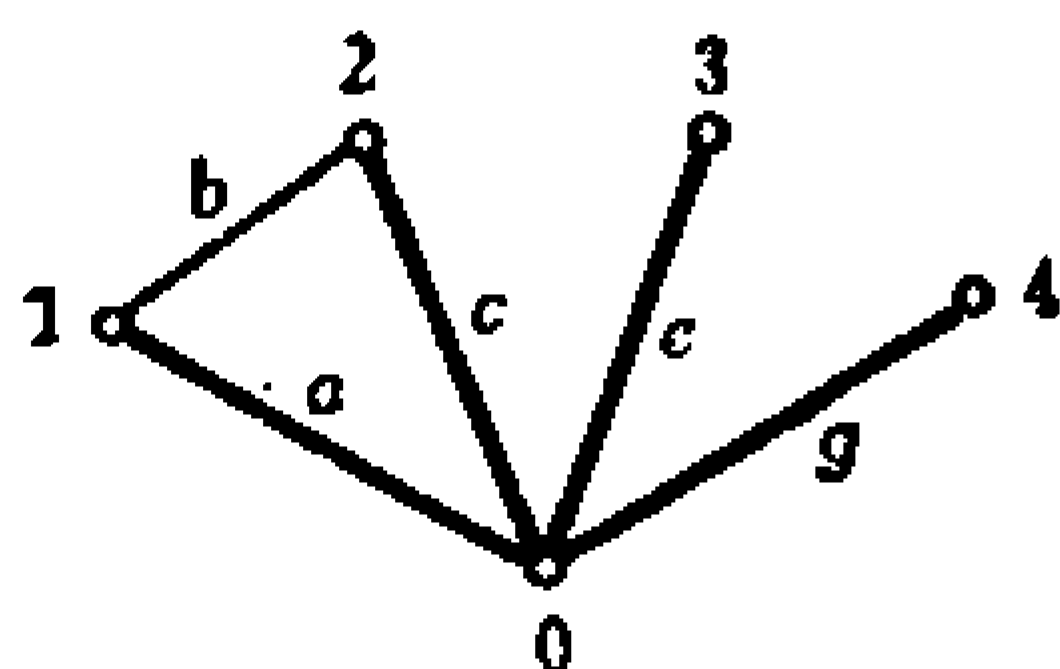


图3-4-1 树t和弦b

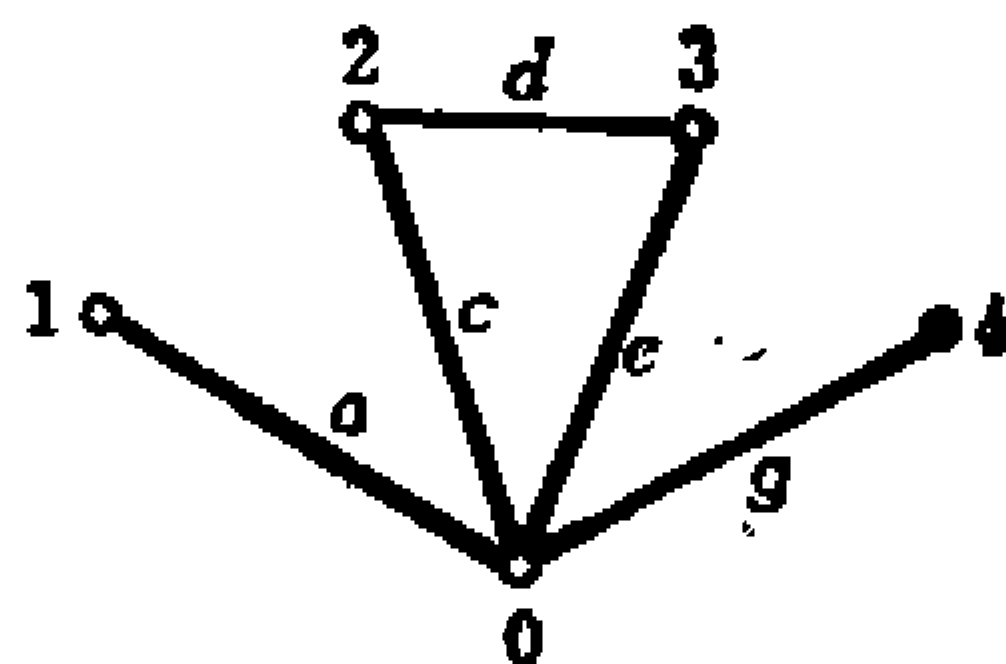


图3-4-2 树t和弦d

对于S_c，在t中加入弦b，得到一个同时包含弦b和枝c的回路。因此弦b在S_c中。同样，弦d在S_c中但弦f不在S_c中，因为将弦f加到树t中不会产生一个同时包含弦f和枝c的回路。所以

$$S_c = (b, c, d)$$

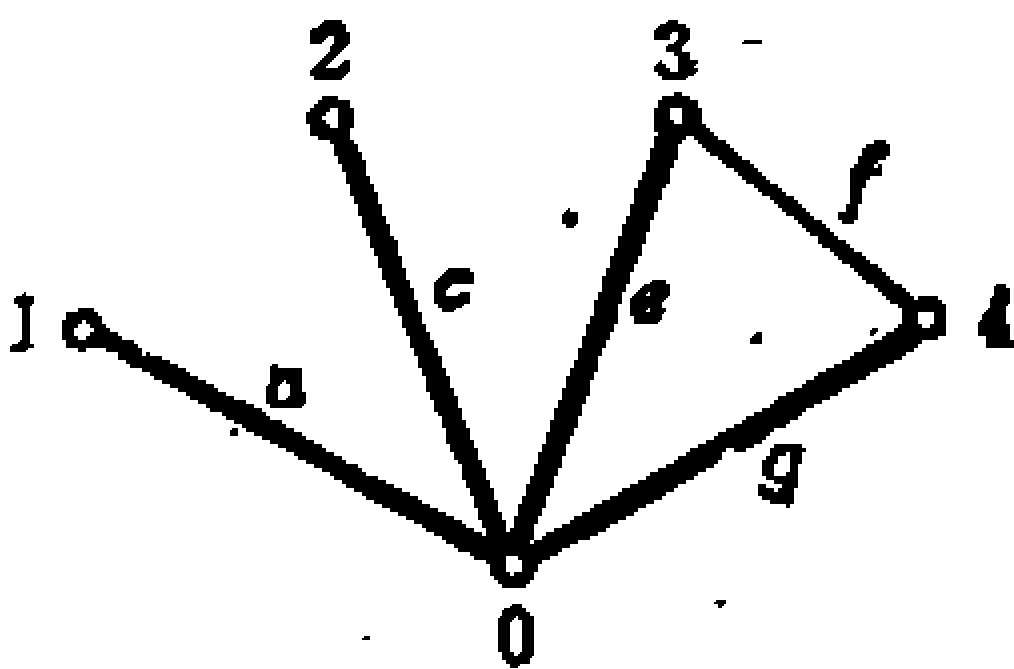


图3-4-3 树t和弦f

类似地，我们有

$$S_e = (d, e, f)$$

和

$$S_g = (f, g)$$

于是

$$Q_f = \begin{array}{c} \\ S_a \\ S_c \\ S_e \\ S_g \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} b & d & f & a & c & e & g \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

为了从基本割集矩阵Q_f得到基本回路矩阵，我们注意，由式(3-4-23)，$Q_{f_{11}}$就是$B_{f_{12}}^t$。故由式（3-4-21），基本回路矩阵B_f可以表示为

$$B_f = [U \ \ Q_{f_{11}}^t] \tag{3-4-27}$$

例如，上例中的$Q_{f_{11}}$是

$$Q_{f_{11}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b & d & f \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

因此，B_f是

$$B_f=[U\ Q^t_{f11}]=\begin{array}{c} \begin{matrix} b & d & f & a & c & e & g \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

这是与上例中的Q_f对应于同一个树

$$t=(a,c,e,g)$$

的基本回路矩阵。

3-5　割集矩阵的可实现性（Ⅰ）

我们已经知道，回路矩阵和割集矩阵的元素是0和1。这里我们将看到，并非任何一个元素为0和1的矩阵都是某一个线图的割集矩阵或回路矩阵。换句话说，要使一个矩阵成为一个线图的割集矩阵或回路矩阵，应当满足一定的条件。为了方便，我们采用下面的术语。

定义3-5-1　如果存在一个线图，其割集（回路）矩阵是R，则说矩阵R是可实现为一割集（回路）矩阵的。

因为应用式(3-4-19)，我们可以由一个割集矩阵得到回路矩阵，所以，没有必要研究回路矩阵可实现的条件。并且，一个割集矩阵总可以由一个基本割集矩阵表示出来。因此，只要找出一个形为$[R_{11}U]$的矩阵是基本割集矩阵的条件即可。

首先，我们假定存在一个线图，它的割集矩阵是$[R_{11}\ U]$。在这样的假设下，我们来研究矩阵$[R_{11}\ U]$的一种特殊子阵的性质。这种特殊子阵称为H子阵。

定义3-5-2　设R形为$[R_{11}\ U]$。对R作如下运算：(1)删除在行i有非零元的各列；(2)删除行i。则所得的子矩阵称为R关于行i的H子阵，记为$H_{(i)}$。

例如，假定R是

$$R=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix} b & d & f & a & c & e & g\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&1\end{bmatrix}\end{array}$$

则我们先删除列b,a,再删除行1，就得到关于行1的H子阵$H_{(1)}$：

$$H_{(1)}=\begin{array}{c} \\ 2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix} d & f & c & e & g\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0\\0&1&0&0&1\end{bmatrix}\end{array}$$

类似地，$H_{(2)}$是

$$H_{(2)}=\begin{array}{c} \\ 1\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix} f & a & e & g\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}\end{array}$$

基本割集矩阵Q_f关于行i的H子阵$H_{(i)}$是一个特殊子图的割集矩阵。为了说明这一点，我们要研究从线图中删除一个割集对其余割集的影响。设在线图G的一个基本割集矩阵Q_f中，S_i是行i所代表的基本割集，则删除所有在行i处为1的列，相当于从G中删除所有属于割集S_i的边。正如式(2-2-5)所示，S_i可表示为

$$\mathscr{E}(\Omega\times\Omega)-S_i=\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_i)\cup\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i\times\bar{\Omega}_i) \qquad (3\text{-}5\text{-}1)$$

其中Ω是G中所有顶点的集合，而割集$S_i=\mathscr{E}(\Omega_i\times\bar{\Omega}_i)$。于是，删除$S_i$的所有边，就得到两个子图$\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_i)$和$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i\times\bar{\Omega}_i)$，如图3-5-1所示。

设S_i和S_j是线图G的两个基本割集。当S_i中所有边被删除时，显然S_j不一定是所得的图G_i的基本割集。假定S_i和S_j的公共边是$e_1,e_2,\cdots,e_k$，那么集合$S_j-(e_1e_2\cdots e_k)$是不是G_i的一个基本

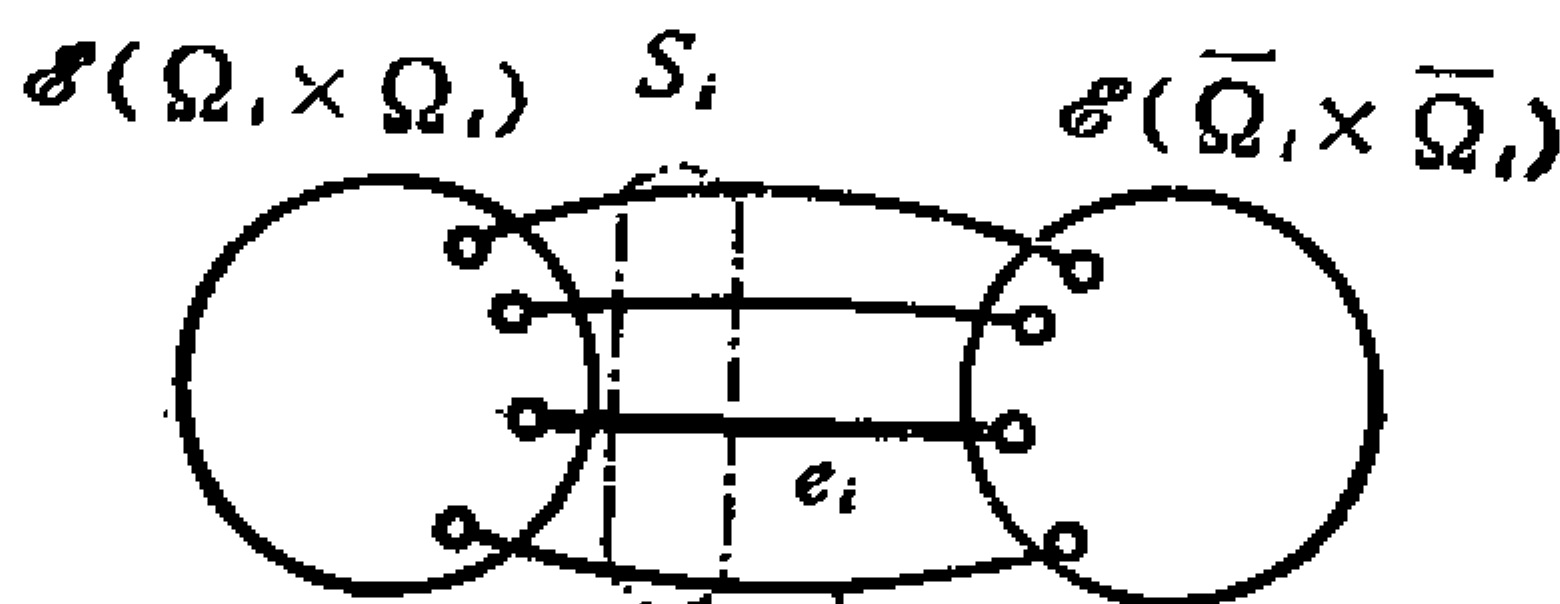


图3-5-1　线图G和两个子图

割集呢？注意，$H_{(i)}$的每一行就代表这样一个集合。这个问题的答案由以下定理给出。

定理3-5-1　设$S_i = \mathscr{E}(\Omega_i \times \bar{\Omega}_i)$是线图$G$中关于树（或林）$t$的一个基本割集，而枝$e_i$在$S_i$中．设$S_j$是关于$t$的另一个基本割集，枝$e_j$在$S_j$中。假定枝$e_j$在子图$\mathscr{E}(\Omega_i \times \Omega_i)$里，则在包含枝$e_j$的线图$\mathscr{E}(\Omega_i \times \Omega_i)$中，关于树$t_1 = t \cap \mathscr{E}(\Omega_i \times \Omega_i)$的基本割集$S'_j$是

$$S'_j = S_j - S_i \qquad (3\text{-}5\text{-}2)$$

注意，枝都是树中的边（见定义3-3-6)，而$t \cap \mathscr{E}(\Omega_i \times \Omega_i)$是树$t$在子图$\mathscr{E}(\Omega_i \times \Omega_i)$中的部分。

证明：　显然线图$\mathscr{E}(\Omega_i \times \Omega_i) \cup \mathscr{E}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$是分离的．因此，添加子图$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$的任一条弦到树$t$中，将产生一个仅由$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$中的边组成的回路$C$。这就说明枝$e_j$不在回路$C$中。故割集$S_j$不包括$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$的任一条弦．由基本割集的定义，显然$S_j$不包含$t$中任何属于$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$的枝。因此，$S_j$不包含$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$的任一条边。

我们知道，当且仅当$\mathscr{E}(\Omega_i \times \Omega_i)$中的弦$e_p$和树$t_1$产生一个包含枝$e_j$的回路时，弦$e_p$才在$S_j'$中。然而，弦$e_p$和树$t_1$产生的回路与弦$e_p$和树$t$产生的回路是相同的，因此，若弦$e_p$在$S'_j$中，则它也在$S_j$中，或者说$S'_j \subset S_j$。

因为S_j不包含$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$中的任一条边，故任何在$S_j$中但不在$S'_j$中的弦必为$S_i$中的弦。于是$S'_j = S_j - S_i$. 这一论证在$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i \times$

$\bar{\Omega}_i$)为空集时显然成立。　　　　　　　　　　　　　　　　　　（证毕）

例3-5-1　考虑图3-5-2所示的线图。假定我们选取树 $t=(a, c, e, g)$，基本割集 $S_i=\mathscr{E}(\Omega_i\times\bar{\Omega}_i)=(d, e, f)$，其中 $\Omega_i=(1, 2, 5)$，$\bar{\Omega}_i=(3, 4)$。线图 $\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_i)\cup\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i\times\bar{\Omega}_i)$ 是由G删除S_i中的所有边得到的，如图3-5-3所示。我们可以看到，$t_1=t\cap\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_i)=(a, c)$ 是子图$\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_i)$的树。

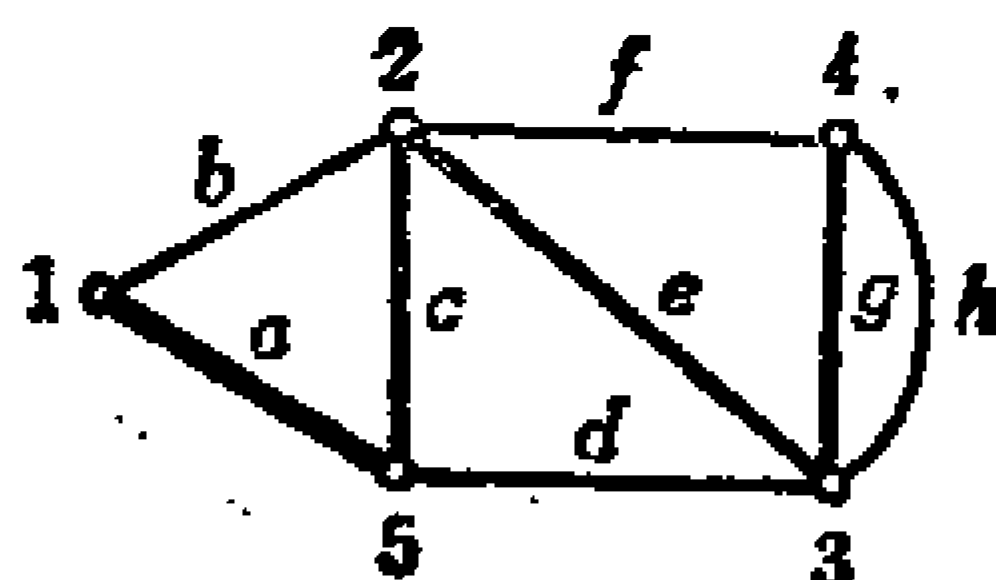


图3-5-2　线图G

设$S_j=\mathscr{E}(\Omega_j\times\bar{\Omega}_j)=(b, c, d)$，这里$\Omega_j=(1, 5)$，$\bar{\Omega}_j=(2, 3, 4)$。注意$t$的枝$c$在$S_j$里。在$\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_i)$中，关于树$t_1$的弦只有一条。这条弦$b$连同$t_1$，将产生一个包含枝$c$的回路$C=(a, b, c)$，因此，在$\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_i)$中，关于树$t_1$且包含枝$c$的基本割集$S'_j=(b, c)$，可以看出$S'_j=S_j-S_i$。现在容易证明，$H$子阵$H_{(i)}$是子图$\mathscr{E}=(\Omega_i\times\Omega_i)\cup\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i\times\bar{\Omega}_i)$的基本割集矩阵。

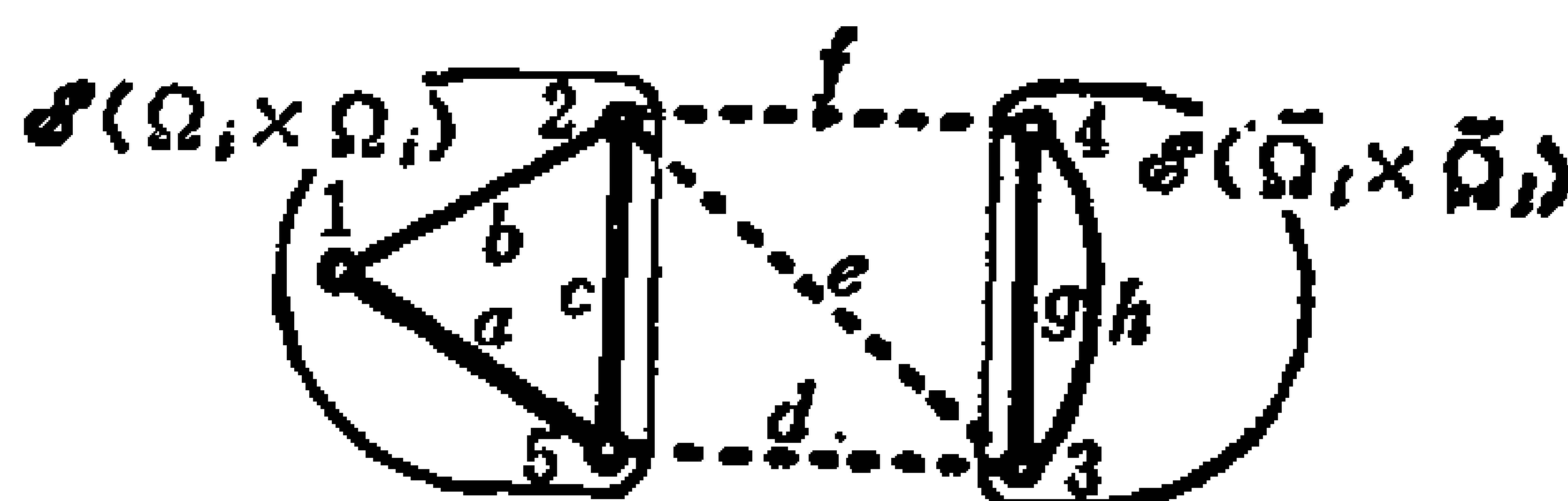


图3-5-3　线图$\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_i)\cup\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i\times\bar{\Omega}_i)$

定理3-5-2　设Q_f是线图G关于树t的基本割集矩阵。设Q_f的行i表示基本割集$S_i=\mathscr{E}(\Omega_i\times\bar{\Omega}_i)$。则$Q_f$关于行$i$的$H$子阵$H_{(i)}$是线图$\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_i)\cup\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i\times\bar{\Omega}_i)$关于林$t_1\cup t_2$的基本割集矩阵，其中$t_1=t\cap\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_i)$，$t_2=t\cap\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i\times\bar{\Omega}_i)$。

证明：　由定理3-5-1，$\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_i)$中关于树$t_1$的每一个基本

割集S'_j可表示为$S_j - S_i$。同样，$\mathscr{G}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$中关于树$t_2$的每一个基本割集$S'_k$可写作$S'_k = S_k - S_i$. Q_f关于行 i 的H子阵$H_{(i)}$是由Q_f先删除对应于S_i中各边的列，再删除对应于S_i中枝的行 i 得到的，故$H_{(i)}$的每一行表示$S_k - S_i$，而Q_f除行 i 外的每一行都在$H_{(i)}$中。

（证毕）

例3-5-2 图3-5-2所示线图G关于树$t = (a, c, e, g)$的基本割集矩阵Q_f是

$$
Q_f = \begin{array}{c} \\ i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} b & d & f & h & e & c & a & g \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc:cccc}
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] \end{array}
$$

Q_f关于行 i 的H子阵$H_{(i)}$是

$$
H_{(i)} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b & h & c & a & g \end{array} \\
\left[\begin{array}{cc:ccc}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] \end{array}
$$

它是图3-5-3中线图$\mathscr{G}(\Omega_i \times \Omega_i) \cup \mathscr{G}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$关于林$t_1 \cup t_2 = (c, a, g)$的基本割集矩阵。

假定$\mathscr{G}(\Omega_i \times \Omega_i)$和$\mathscr{G}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$都不是空集，则因为线图$\mathscr{G}(\Omega_i \times \Omega_i) \cup \mathscr{G}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$是分离的，所以$\mathscr{G}(\Omega_i \times \Omega_i) \cup \mathscr{G}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$关于林$t_1 \cup t_2$的基本割集可以分成两个集体，其中一个由关于$t_1$的全部基本割集组成，另一个由关于$t_2$的全部基本割集组成。可以看出，一个集体中的基本割集和另一个集体中的任一个基本割集之间没有公共边。于是H子阵$H_{(i)}$（它的行表示这些基本割集）可分块为

$$
H_{(i)} = \left[\begin{array}{c:c} H_{(i)1} & 0 \\ \hdashline 0 & H_{(i)2} \end{array}\right] \qquad (3\text{-}5\text{-}3)
$$

其中$H_{(i)1}$代表线图$\mathscr{G}(\Omega_i\times\Omega_i)$的基本割集矩阵，而$H_{(i)2}$是线图$\mathscr{G}(\bar{\Omega}_i\times\bar{\Omega}_i)$中的基本割集矩阵。当$\mathscr{G}(\bar{\Omega}_i\times\bar{\Omega}_i)$是空集时，$H_{(i)2}$也是空的。

另一方面，若把$H_{(i)}$随意分划为式（3-5-3）的形式，则不一定能使$H_{(i)1}$和$H_{(i)2}$这两部分，分别表示子图$\mathscr{G}(\Omega_i\times\Omega_i)$和$\mathscr{G}(\bar{\Omega}_i\times\bar{\Omega}_i)$的基本割集矩阵。

例3-5-3 图3-5-4所示线图G关于树$t=(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$的基本割集矩阵$Q_f$是

$$
Q_f=\begin{array}{c}\\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc} a & b & c & d & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]\end{array}
$$

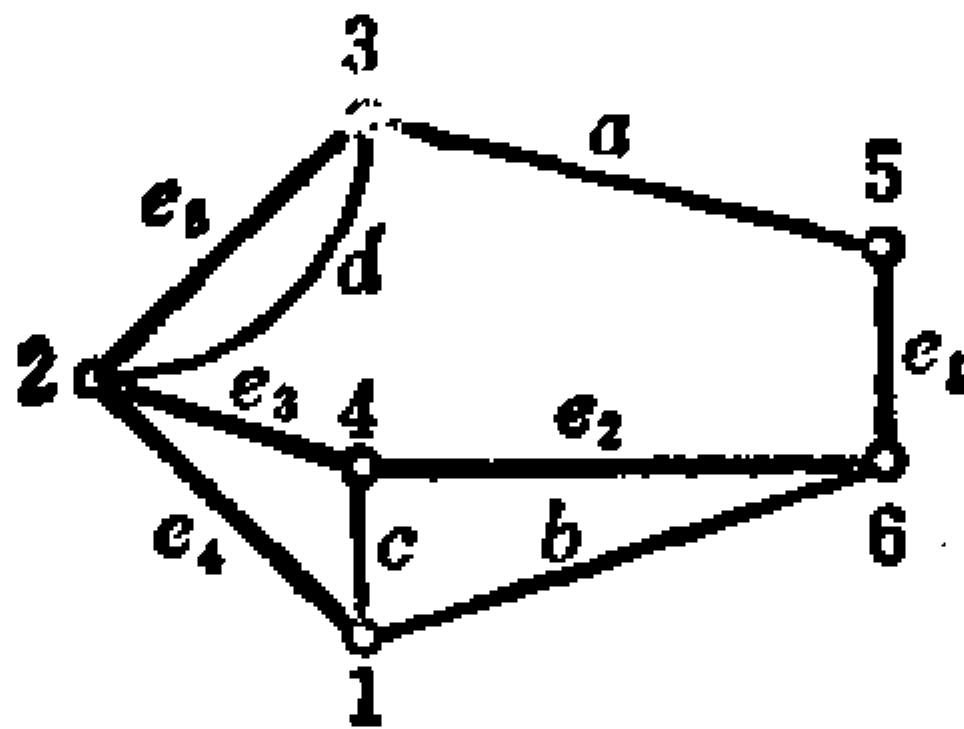


图3-5-4 一个线图

它的一个H子阵$H_{(2)}$是

$$
H_{(2)}=\begin{array}{c}\\ 1\\ 3\\ 4\\ 5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} c & d & e_1 & e_3 & e_4 & e_5\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]\end{array}
$$

从G中删除基本割集$S_2=(a,\ b,e_2)$的全部边所得的线图$\mathscr{G}(\Omega_2\times\Omega_2)\cup\mathscr{G}(\bar{\Omega}_2\times\bar{\Omega}_2)$，如图3-5-5所示，这里$\Omega_2=(1,\ 2,\ 3,\ 4)$，$\bar{\Omega}_2=(5,6)$。

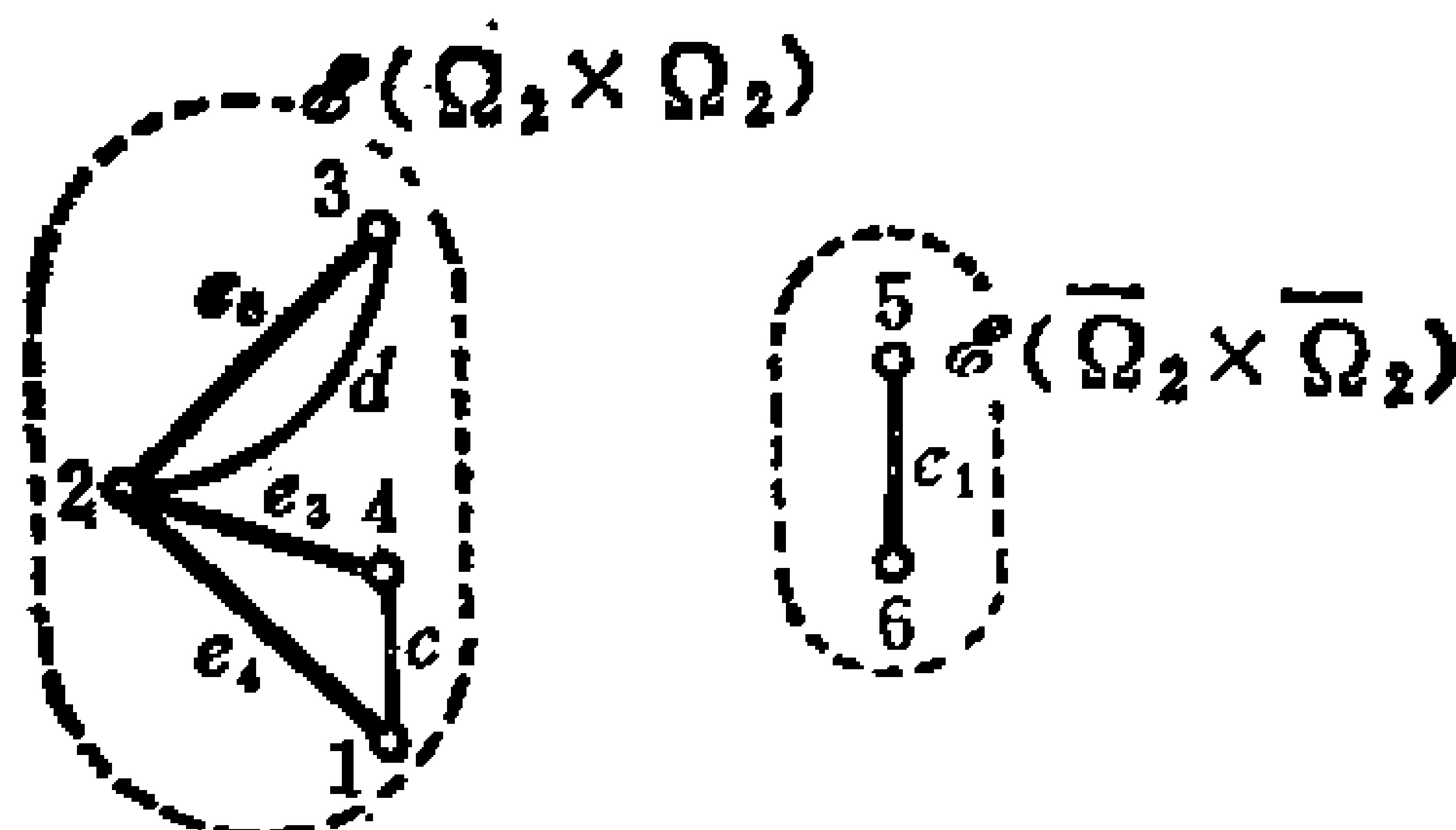


图3-5-5 子图$\mathscr{G}(\Omega_2\times\Omega_2)\cup\mathscr{G}(\bar{\Omega}_2\times\bar{\Omega}_2)$

把$H_{(2)}$分块为

$$H_{(2)}=\begin{array}{c}\\3\\4\\5\\1\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}c&d&e_3&e_4&e_5&e_1\end{array}\\\left[\begin{array}{ccccc|c}1&0&1&0&0&\\1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&\\\hline&&0&&&1\end{array}\right]\end{array}=\left[\begin{array}{c|c}H_{(2)1}&0\\\hline 0&H_{(2)2}\end{array}\right]$$

可以看出，$H_{(2)1}$是$\mathscr{G}(\Omega_2\times\Omega_2)$关于树$t_1=(e_3,e_4,e_5)$的基本割集矩阵，$H_{(2)2}$是$\mathscr{G}(\bar{\Omega}_2\times\bar{\Omega}_2)$关于树$t_2=(e_1)$的基本割集矩阵。另一方面，我们也可以将$H_{(2)}$分块为

$$H_{(2)}=\begin{array}{c}\\5\\1\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}d&e_5&c&e_1&e_3&e_4\end{array}\\\left[\begin{array}{cc|cccc}1&1&&0&&\\\hline&&0&1&0&0\\&0&1&0&1&0\\&&1&0&0&1\end{array}\right]\end{array}=\left[\begin{array}{c|c}H_{(2)1}&0\\\hline 0&H_{(2)2}\end{array}\right]$$

但是在上述分块中，$H_{(2)1}$和$H_{(2)2}$都不是$\mathscr{E}(\Omega_2\times\Omega_2)$关于树$t_1=(e_3, e_4, e_5)$的基本割集矩阵。

下面我们来考虑，短路树t的一个枝，对关于树t的基本割集矩阵有何影响。我们很快就会看到，这一结果的推广以及H子阵的性质一起，给出了一种判断矩阵可实现性的算法。

定理3-5-3 设Q_t是线图G关于树t的基本割集矩阵。设S_i是由Q_t的行i所代表的一个基本割集。e_i是S_i中的枝。又设$Q(\bar{i})_t$是Q_t的一个子矩阵，它是从Q_t中先删除行i，再删除所有的零列得到的。则$Q(\bar{i})_t$是由G短路枝e_i得到的图$G(\bar{e}_i)$的基本割集矩阵。

证明： 显然$t-(e_i)$是$G(\bar{e}_i)$的树。设e_j是t中异于e_i的一个枝。假定添加一条弦到t中，产生一个包含e_j的回路C。当我们短路e_i时，这个回路仍然是一个包含e_j的回路。因此在短路e_i时，除S_i外，G中所有关于树t的基本割集也都是关于树$t-(e_i)$的基本割集。（证毕）

图3-5-6所示线图G'，是由图3-5-1中的G将子图$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i\times\bar{\Omega}_i)$的所有顶点合并得到的。假定我们打算求出$G'$的一个基本割集矩阵$M$。前面说过，从线图$G$中删除关于树$t$的一个基本割集$S_i=\mathscr{E}(\Omega_i\times\bar{\Omega}_i)$的所有边，得到两个最大连通子图。$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i\times\bar{\Omega}_i)$是这两个最大连通子图之一。我们还知道，$t_2=t\cap\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i\times\bar{\Omega}_i)$是线图$(\bar{\Omega}_i\times\bar{\Omega}_i)$的树。因为$t_2$包含$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i\times\bar{\Omega}_i)$的所有顶点，故短路$t_2$的所有枝就可以把$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i\times\bar{\Omega}_i)$的所有顶点合并在一起。因此据定理3-5-3，线图$G'$关于树$t-t_2$的基本割集矩阵$M$，可以用这样的方法来得到：从基本割集矩阵$Q_t$中，先删除所有那些代表包含$t_2$的枝的基本割集的行，然后删除所有的零列。

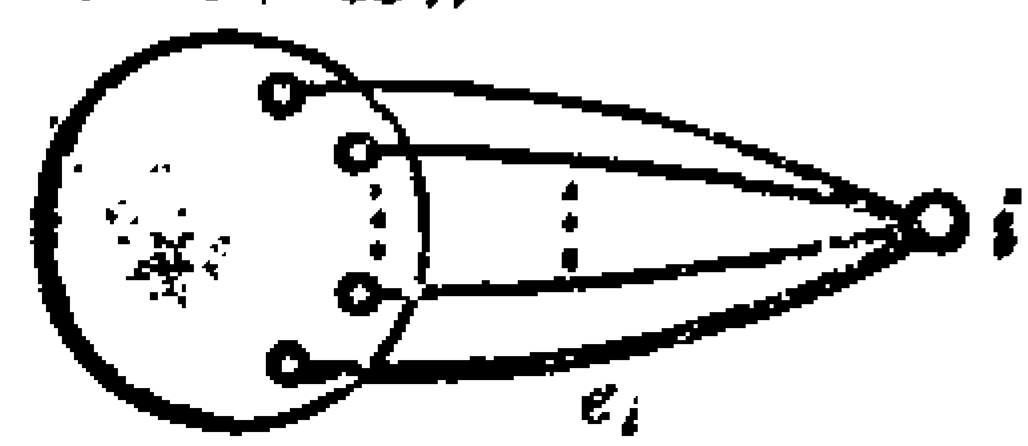


图3-5-6 线图G'

例3-5-4 考虑图3-5-7所示的线图G。这个线图关于树$t=$

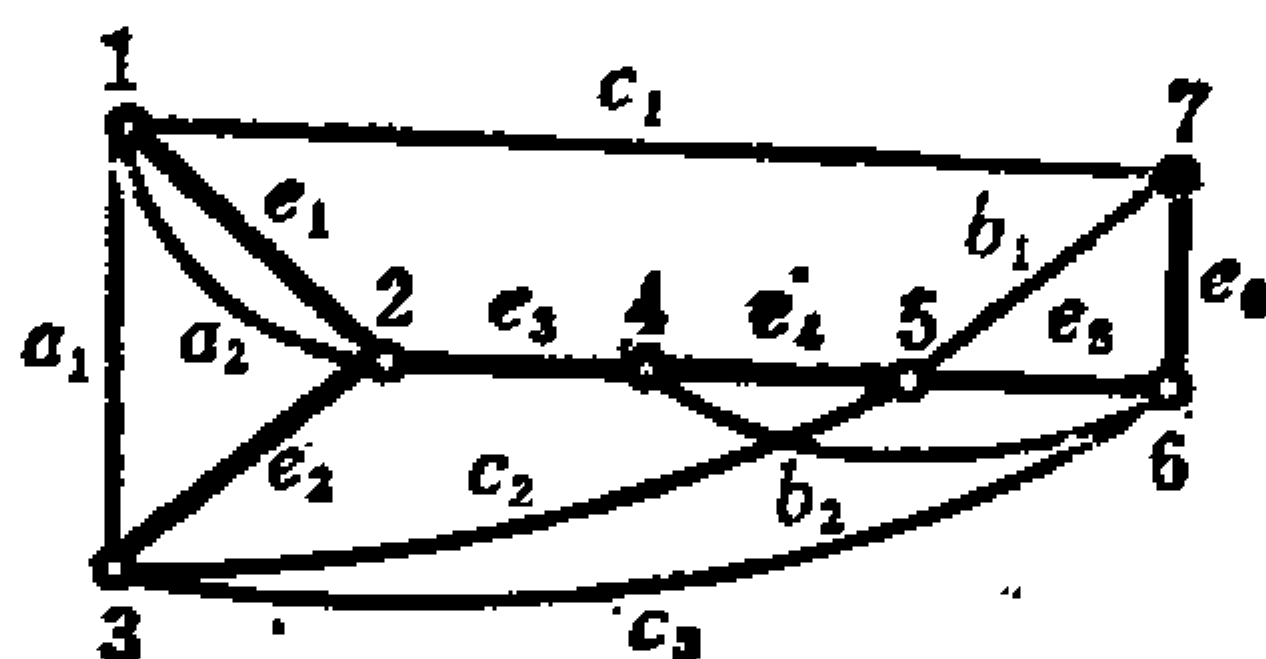


图3-5-7 线图G

$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$的基本割集矩阵 Q_f 是

$$
Q_f=\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc|cccccc}
a_1 & a_2 & c_1 & c_2 & c_3 & b_1 & b_2 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6
\end{array}\\
\left[\begin{array}{ccccccc|cccccc}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Q_f的行代表关于树t的基本割集$S_{e_1}, S_{e_2}, S_{e_3}, S_{e_4}, S_{e_5}, S_{e_6}$ 的集合。

设S_i是$S_{e_3}=\mathscr{E}(\Omega_i\times\bar{\Omega}_i)=(c_1, c_2, c_3, e_3)$，则$\Omega_i=(1, 2, 3)$，$\bar{\Omega}_i=(4,5,6,7)$。与$S_{e_3}$对应的子图$\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_i)$和$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i\times\bar{\Omega}_i)$如图3-5-8所示。由此子图可以看出，$t_1=(e_1, e_2)$是$\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_i)$的树，$t_2=(e_4, e_5, e_6)$是$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i\times\bar{\Omega}_i)$的树。

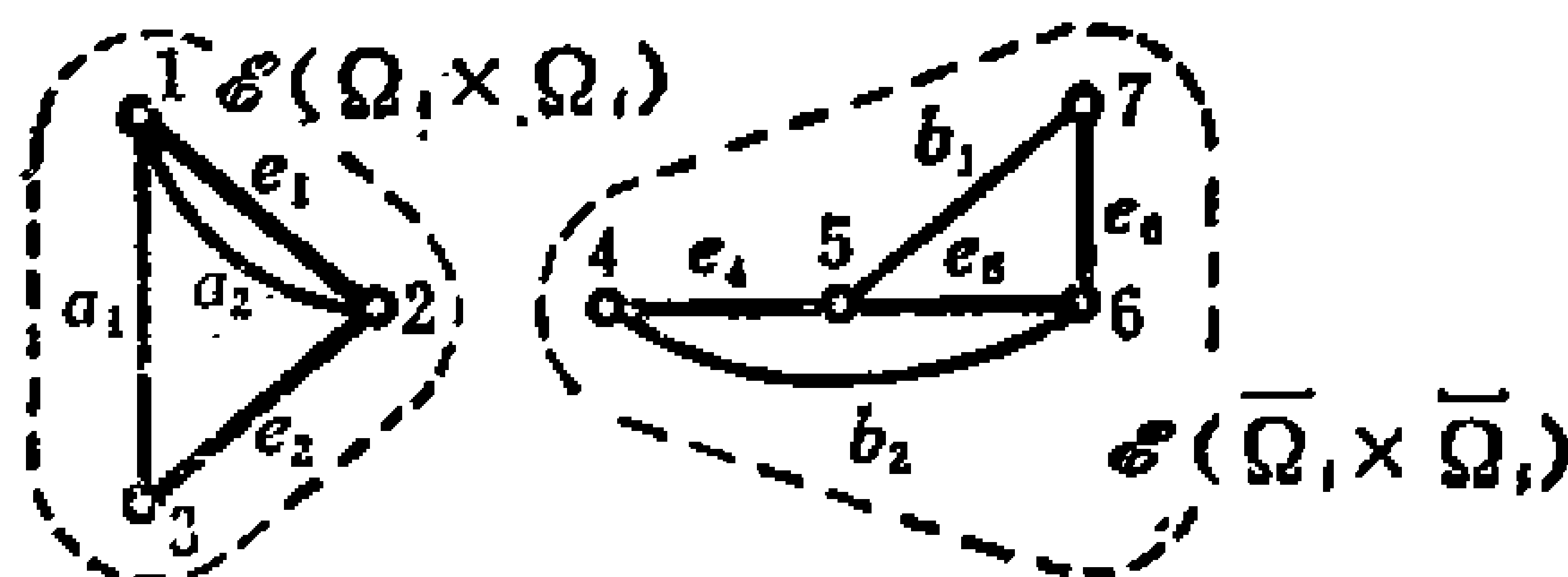


图3-5-8 子图$\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_i)$和$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i\times\bar{\Omega}_i)$

在线图G中，把$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i\times\bar{\Omega}_i)$的所有顶点合并，得到线图$G'$，如图3-5-9所示。可以看出，$t-t_2=(e_1, e_2, e_3)$是$G'$的树，而关于树$t-t_2$的基本割集是$S_{e_1}$，$S_{e_2}$和$S_{e_3}$。

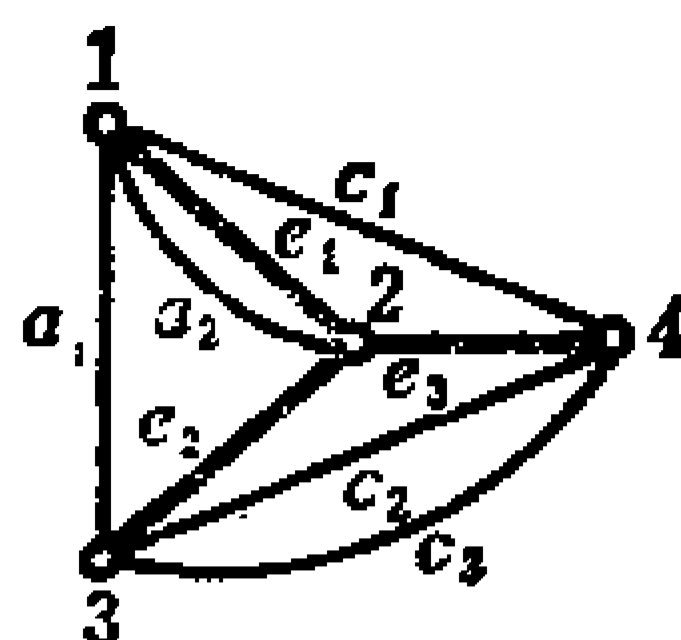


图3-5-9　线图G'

为了从Q_f得到G'关于树$t-t_2$的基本割集矩阵M，我们首先删除对应于基本割集S_{e_4}，S_{e_5}和S_{e_6}的行。所得的矩阵是

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} a_1 & a_2 & c_1 & c_2 & c_3 & b_1 & b_2 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{array}$$

从这个矩阵中删去所有的零列，就得到G'关于$t-t_2$的基本割集矩阵M：

$$M=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} a_1 & a_2 & c_1 & c_2 & c_3 & e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\end{array}$$

由例3-5-4，显然可以用下面的方法得到G'的基本割集矩阵M：(1) 先删除所有对应于基本割集$S_{e'_1}$，$S_{e'_2}\cdots$，$S_{e'_k}$的行，其中e'_1，e'_2，…，e'_k是子图$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i\times\bar{\Omega}_i)$的树$t_2=t\cap\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i\times\bar{\Omega}_i)$的枝；(2)然后删除所有的零列。因此，我们只需要知道Q_f的哪些行对应于割集$S_{e'_1}$，$S_{e'_2}$，…，$S_{e'_k}$即可。现在，我们可以应用H子阵的性质了。前面说过，$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i\times\bar{\Omega}_i)$的基本割集矩阵，就是式(3-5-3)所示分块中的$H_{(i)2}$。如果有几种不同的分块方法，都能使$H_{(i)}$成为式(3-5-3)的形式，则其中必有一种分块，将给出与$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i\times\bar{\Omega}_i)$

的基本割集矩阵对应的$H_{(i)2}$。这样，为得到G'的基本割集矩阵所要删除的行，就是$H_{(i)2}$的各行。由于删除这些行而产生的零列，显然对应于$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$的边。于是，我们可以说，$G'$的基本割集矩阵$M$，可以由$Q_f$删除$H_{(i)2}$的所有行和列得到。

类似地，在图3-5-1的线图G中，合并$\mathscr{E}(\Omega_i \times \Omega_i)$的所有顶点，得到如图3-5-10所示的线图$G''$。$G''$关于树$t-t_1$的基本割集矩阵，可以由$Q_f$删除$H_{(i)1}$的行和列得到。$G'$和$G''$的这两个基本割集矩阵，叫做$M$子阵对。

定义3-5-3 设矩阵R形如$[R_{11}\ U]$。如式(3-5-3)所示，R是关于行i的H子阵$H(i)$的一个固定的分块，设$M(i)_1$是从R中删除$H_{(i)2}$的所有行和列得到的子阵，$M(i)_2$是从R中删除属于$H_{(i)1}$的所有行和列得到的子阵，则称这一对子阵$M(i)_1$和$M(i)_2$是R的M子阵对(*pair of M-submatrices*)。

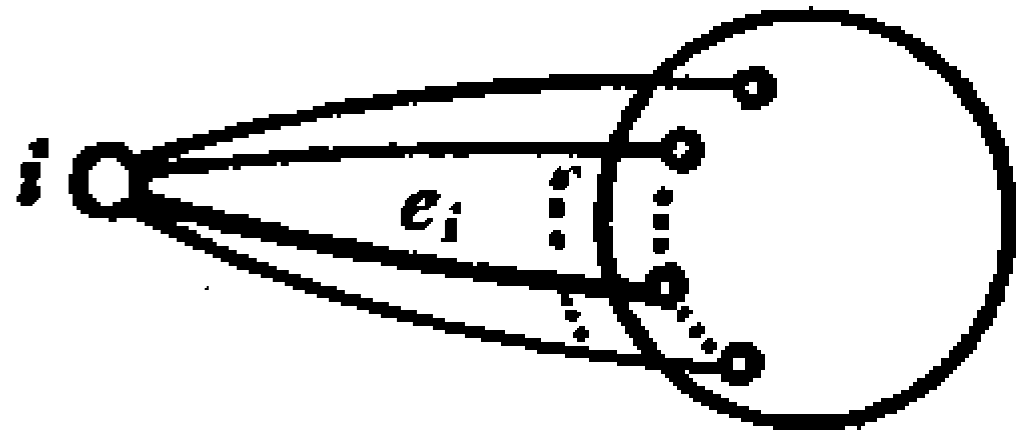


图3-5-10 线图G'

注意，当$H_{(i)1}$是空的时，$M(i)_2$就等于R。同样，若$H_{(i)2}$是空的，则$M(i)_1 = R$。

例3-5-5 在例3-5-3中，可以求得$H_{(2)1}$和$H_{(2)2}$分别为

$$H_{(2)1} = \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \overset{\begin{matrix} c & d & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

和

$$H_{(2)2} = 1 \overset{e_1}{[1]}$$

Q_f关于行2的M子阵对$M(2)_1$和$M(2)_2$，可以由下面的步骤得

到。为了求得$M(2)_1$，我们从Q_f中删除行1和列e_1（即$H_{(2)2}$对应的行和列），得到

$$M(2)_1=\begin{array}{c} \\ 2\\3\\4\\5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc}a&b&c&d&e_2&e_3&e_4&e_5\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccccccc}1&1&0&0&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&0&0&1&0\\1&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\end{array}$$

由于$H_{(2)1}$是由行3，4，5和列c,d,e_3,e_4,e_5组成的，删除这些行和列就得到$M(2)_2$：

$$M(2)_2=\begin{array}{c} \\ 1\\2\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}a&b&e_1&e_2\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc}1&0&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right]\end{array}$$

在这个例子里，

$$Q_f=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc}a&b&c&d&e_1&e_2&e_3&e_4&e_6\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccccc}1&0&0&0&1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&0&0&0&1&0\\1&0&0&1&0&0&0&0&1\end{array}\right]\end{array}$$

子图G'和G''如图3-5-11所示。

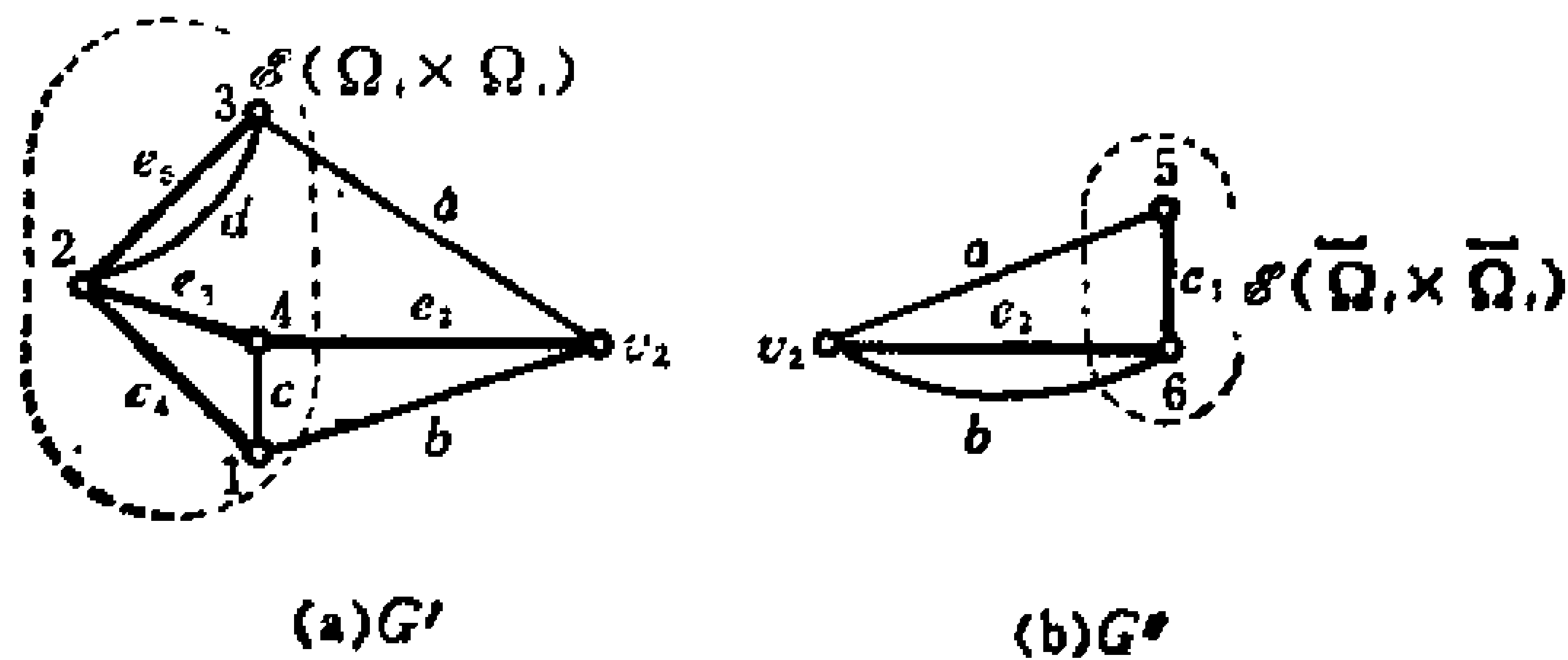


图3-5-11　子图G'和G''

我们可以看出，基本割集矩阵Q_f关于行 i 的M子阵对$M(i)_1$和$M(i)_2$具有以下性质：

1. $M(i)_1$和$M(i)_2$分别为某个线图的基本割集矩阵。

2. Q_f中除行 i 外的任何一行或者在$M(i)_1$中，或者在$M(i)_2$中，但不同时在$M(i)_1$和$M(i)_2$中。Q_f的行 i 既在$M(i)_1$中，又在$M(i)_2$中。

3. Q_f中除行 i 处为1的那些列外，其他列或者在$M(i)_1$中，或者在$M(i)_2$中，但不同时在$M(i)_1$和$M(i)_2$中。Q_f在行 i 处为1的所有列既在$M(i)_1$中，又在$M(i)_2$中。

4. 在线图G'[它是合并$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i\times\bar{\Omega}_i)$中的顶点得到的，其基本割集矩阵是$M(i)_1$]中，$M(i)_1$的行 i 所代表的基本割集是一个关联集。同样，在线图G''[由合并$\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_i)$的全部顶点得到]中，$M(i)_2$的行 i 代表的基本割集是一个关联集。

性质1，2，3可直接从由基本割集矩阵Q_f形成$M(i)_1$和$M(i)_2$的步骤中得到。至于性质4，由于我们前面说过，G'是合并$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i\times\bar{\Omega}_i)$中所有顶点得到的，因此$Q_f$的行 i 代表的基本割集变成G'的一个关联集。类似地，G''是合并$\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_i)$的所有顶点得到的，因此$Q_f$的行 i 代表的基本割集变成G''的一个关联集。

我们通过上面叙述的步骤，总可以由Q_f和对应的线图G'，G''得到一个M子阵对，于是有定理3-5-4。

定理3-5-4 如果Q_f是一个基本割集矩阵，则存在Q_f关于行 i 的一个M子阵对$M(i)_1$和$M(i)_2$，它们具有以下两个性质：

1. $M(i)_1$是一个线图的基本割集矩阵。并且$M(i)_1$的行 i 所代表的基本割集是此线图的一个关联集。

2. $M(i)_2$是一个线图的基本割集矩阵。在此线图中，$M(i)_2$的行 i 所代表的基本割集是一个关联集。

考虑图3-5-1所示的线图G，其中基本割集S_i由边e'_1，e'_2，…，e'_r组成。假定我们在S_i的每一条边的中间插入一个顶点，如图

3-5-12所示。插入顶点以后，假定我们把这些顶点又合并成一个顶点 i，如图3-5-13所示。注意顶点 i 是所得线图的一个割点。现在我们把顶点 i 切割成两个，使所得的线图分离开，如图3-5-14

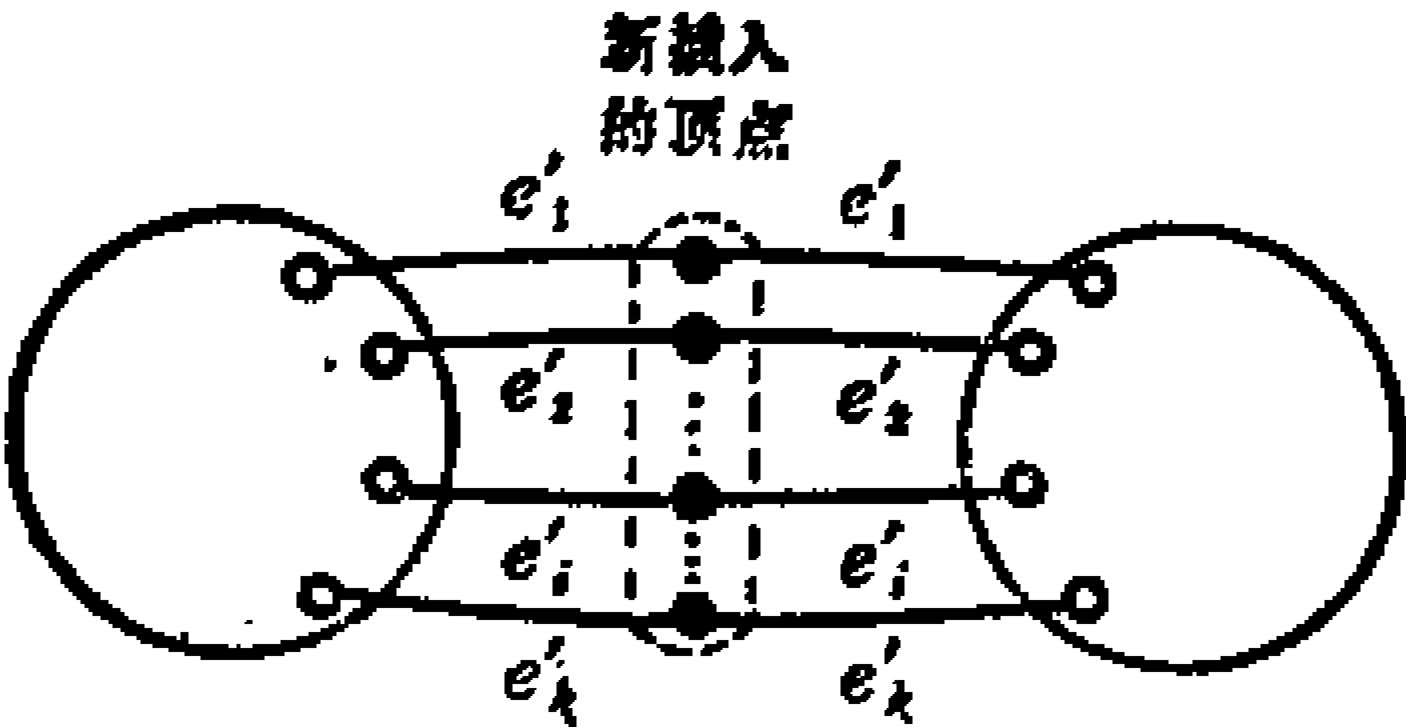


图3-5-12　顶点的插入

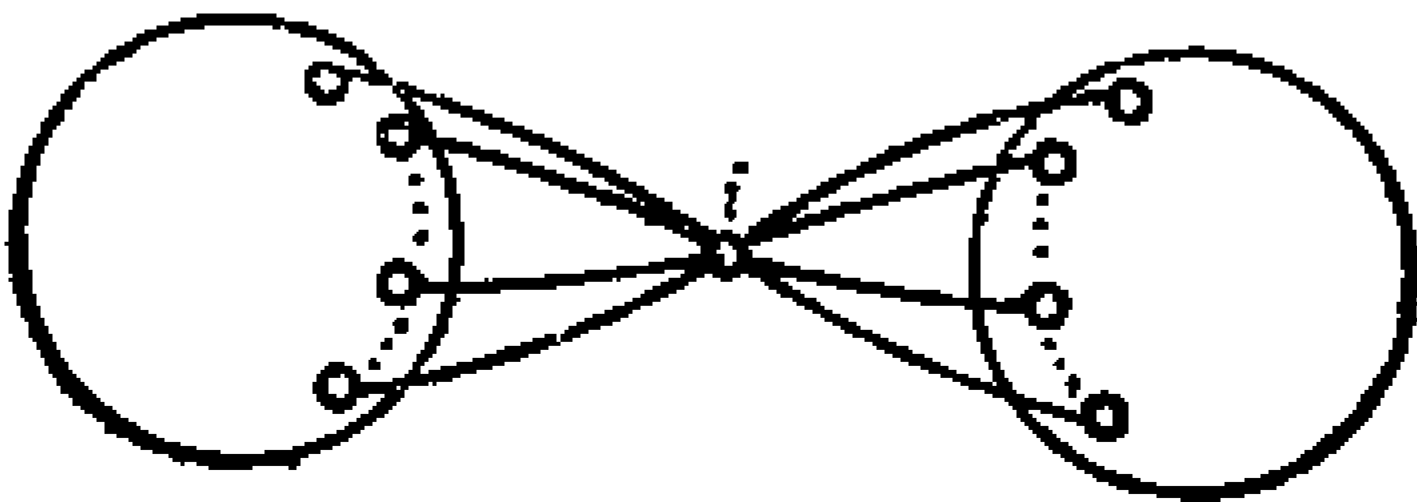


图3-5-13　割点i

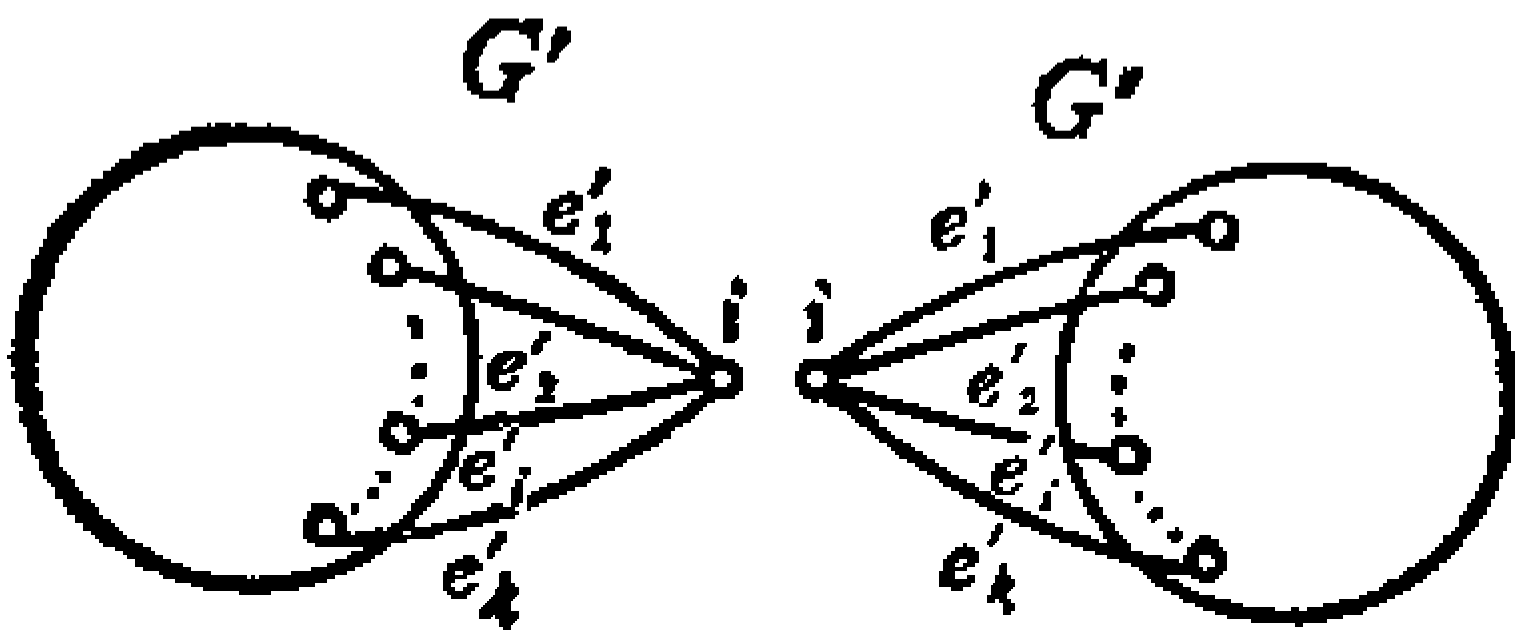


图3-5-14　割开顶点i形成G'和G''

所示。可以看出，这两个图G'和G''分别是合并$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$和$\mathscr{E}(\Omega_i \times \Omega_i)$的全部顶点得到的。

假定图3-5-14中的G'和G''是具有以下性质的任意线图：(1)

$M(i)_1$和$M(i)_2$分别是G'和G''的基本割集矩阵；（2）在G'中，$M(i)_1$的行i代表的基本割集是一个关联集，在G''中，$M(i)_2$的行i代表的基本割集是一个关联集．注意在这些条件下，那些既在G'中，又在G''中的边与同一个顶点相联，这个顶点对应于$M(i)_1$和$M(i)_2$中的行i所代表的关联集．设这个顶点是顶点i．也就是说，在G'中，顶点i是与$M(i)_1$的行i所代表的关联集对应的顶点，在G''中，顶点i是与$M(i)_2$的行i所代表的关联集对应的顶点．设在G'和G''中，与顶点i连接的边为e'_1，e'_2，…，e'_k．又设顶点v_{1p}是边e'_p在G'中的另一个端点，顶点v_{2p}是边e'_p在G''中的另一个端点，$p=1,2,\cdots,k$，如图3-5-15所示．则对所有的$p=1,$

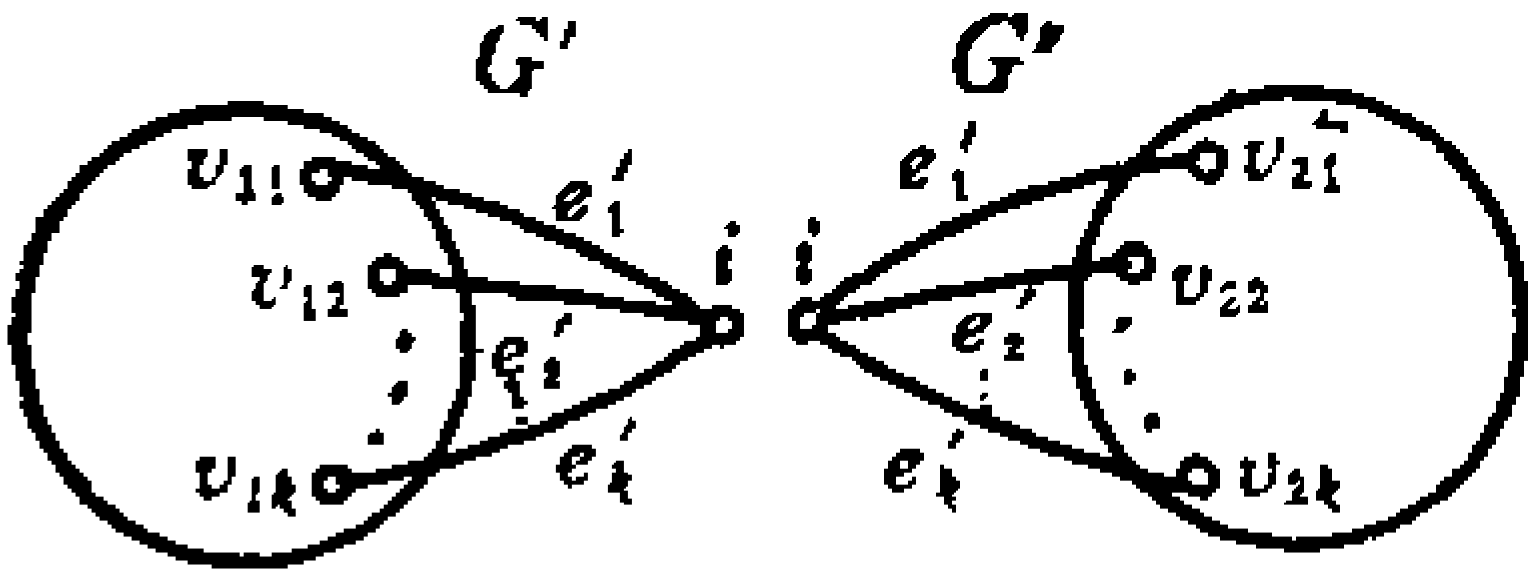


图3-5-15　两个线图G'和G''

$2,\cdots,k$，用一条连接顶点v_{1p}和v_{2p}的边来代替G'和G''中的两条e'_p，就得到一个线图G，如图3-5-16所示．可以看出，这个线图的基本割集矩阵是Q_f．因此，由定理3-5-3，我们得到定理3-5-5．

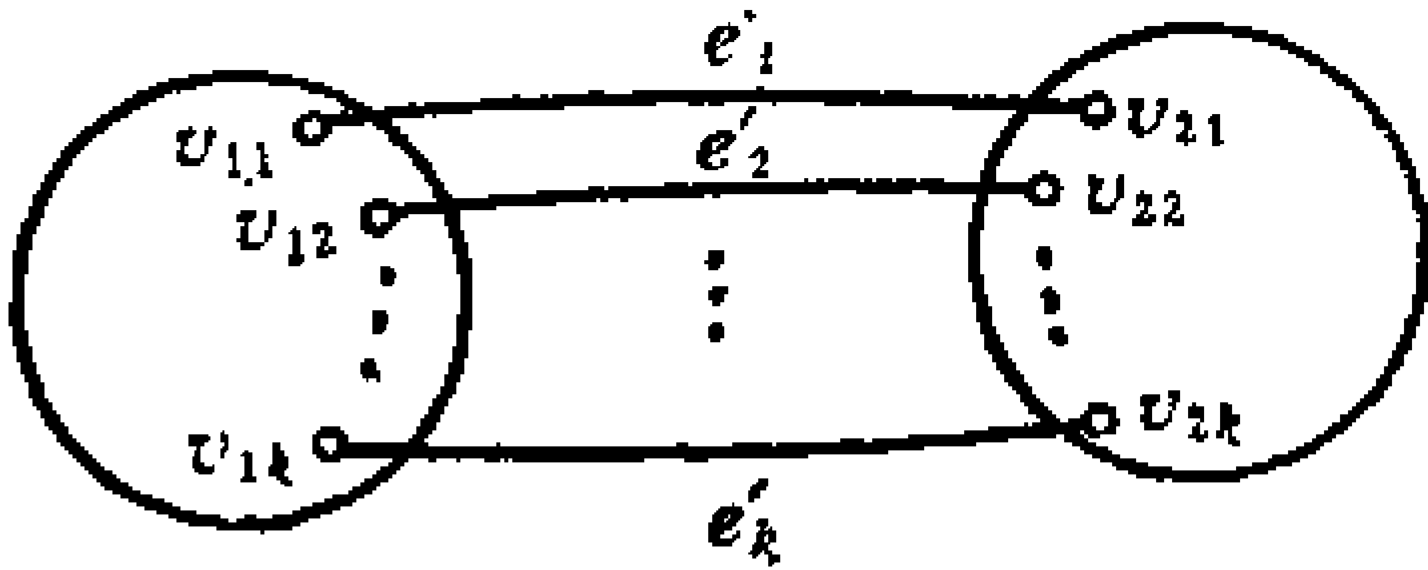


图3-5-16　由G'和G''得到的线图

定理3-5-5 矩阵Q_f可以实现为一个线图的基本割集矩阵，当且仅当Q_f关于行 i 的M子阵对$M(i)_1$和$M(i)_2$可以实现为线图G'和G''的基本割集矩阵，并且$M(i)_1$的行 i 和$M(i)_2$的行 i 分别代表G'和G''的关联集。

特别要注意的一点是H子阵和M子阵的行、列的名称，就是与所给矩阵Q_f的行、列对应的行和列的名称。例如，$M(i)_1$的行 i 就是由Q_f的行 i 得到的行。

正如我们通过检验矩阵Q_f的M子阵对$M(i)_1$和$M(i)_2$，判断Q_f是否基本割集矩阵一样，我们也可以通过检验$M(i)_1$的M子阵对，来判断$M(i)_1$是不是一个限定其行 i 代表一个关联集的基本割集矩阵。接下去，我们又可以取这一对矩阵中的一个，作为给定的矩阵，而形成另外一对M子阵，来判断它是不是以一个特定的行代表关联矩阵的基本割集矩阵。如此类推。为了便于过程中书写，我们用以下方法来表示那些代表关联集的行。

定义3-5-4 形如$M(j_1j_2\cdots j_k)$的M子阵，其圆括号内的元素所表示的行j_1，j_2，…，j_k代表关联集。

如上所述，在我们由两个线图G'和G''[其基本割集矩阵分别为$M(i)_1$和$M(i)_2$]出发来求出线图G的整个过程中，只替换了与顶点 i 相连的边$e'_p(p=1,2,\cdots,k)$，这些边组成行 i 所代表的关联集。因此，除行 i 外，$M(i)_1$或$M(i)_2$中其他任何一行所代表的关联集仍将保持原状。因此，我们有以下定理。

定理3-5-6 设$M(j_1\cdots j_ki)$和$M(j'_1\cdots j'_mi)$是矩阵Q_f的一个M子阵对，其中$j_1\neq\cdots\neq j_k\neq j'_1\neq\cdots\neq j'_m\neq i$[注意，只有 i 既在$M(j_1\cdots j_ki)$中，又在$M(j'_1\cdots j'_mi)$中]。当且仅当$M(j_1\cdots j_ki)$和$M(j'_1\cdots j'_mi)$可以实现为G'和G''的基本割集矩阵，并且使得：(1)G'中由行$j_1\cdots j_k$和 i 所代表的基本割集是关联集；(2)G''中由行$j'_1\cdots j'_m$和 i 所代表的基本割集是关联集时，Q_f可以实现为线图的基本割集矩阵，并且其中由行 $j_1,\cdots,j_k,j'_1,\cdots,j'_m$ 所代表的

基本割集是关联集。

设$M(i_1)$是一个基本割集矩阵关于行i_1的M子阵对中的一个，而$i_2(\neq i_1)$是$M(i_1)$中的一行。考虑$M(i_1)$关于行i_2的M子阵对。$M(i_1)$关于行i_2的这两个M子阵具有这样的性质：其中一个包含行i_1和行i_2，另一个只包含行i_2而不包含行i_1。既包含行i_1又包含行i_2的一个用$M(i_1i_2)$表示，而只包含行i_2不包含行i_1的那一个用$M(i_2)$表示。

一般说来，我们可以得到$M(i_1i_2\cdots i_k)$关于行i_{k+1}（它不是i_1，$i_2,\cdots,i_k$中的一个）的M子阵对。设这两个子阵之一包含行$i_1,i_2,\cdots,i_m(m\leqslant k)$当然还包含行$i_{k+1}$.我们用符号$M(i_1i_2\cdots i_mi_{k+1})$来表示这个子阵，则另一个子阵是$M(i_{m+1}\cdots i_ki_{k+1})$。于是，由定理3-5-6，当且仅当$M(i_1\cdots i_mi_{k+1})$和$M(i_{m+1}\cdots i_ki_{k+1})$都可以实现为基本割集矩阵，并且限定其行$i_1,i_2,\cdots i_m,i_{m+1},\cdots,i_k$和$i_{k+1}$代表关联集时，矩阵$M(i_1i_2\cdots i_m\cdots i_k)$可以实现为基本割集矩阵，并且其行$i_1,i_2,\cdots,i_m,\cdots$，$i_k$表示关联集。

只要一个M子阵$M(i_1\cdots i_n)$中还有一行p不在圆括号内，我们就可以继续构成$M(i_1\cdots i_n)$关于行p的M子阵对。当一个M子阵$M(i_1i_2\cdots i_n)$仅由行i_1，i_2，$\cdots$，i_n组成时，称此M子阵为最小M子阵。

定义3-5-5 一个M子阵$M(i_1i_2\cdots i_n)$是最小M子阵，如果$M(i_1i_2\cdots i_n)$仅由行$i_1,i_2,\cdots i_n$组成。

因为最小M子阵的每一行都在圆括号内，所以它的每一行必表示一个关联集。因此最小M子阵必为一个关联矩阵。

因为对于矩阵的每一行，我们都可以构成一个M子阵对，所以，从一个由n_v个顶点组成的连通线图的基本割集矩阵Q_f出发，我们可以得到n_v个最小M子阵.（注意，Q_f包含n_v-1行）．这n_v个最小M子阵组成一个集合，称为矩阵Q_f的最小M子阵集.

定理3-5-7 对于一个基本割集矩阵Q_f，存在Q_f的一个最小

子阵集，其中每一个最小M子阵是一个关联矩阵。

如果一个H子阵可分块为

$$H=\begin{bmatrix} H_1 & & & \\ & H_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \\ & & & H_p \end{bmatrix} \tag{3-5-4}$$

则有许多方法可构成M子阵对。因此，一个基本割集矩阵Q_f的最小M子阵集合可能不唯一。这就导出了以下定理。

定理3-5-8 当且仅当一个矩阵$R=[R_{11}\ \ U]$存在最小M子阵集合，使得集合中的每一个最小M子阵是一个关联矩阵时，矩阵R可以实现为线图的基本割集矩阵。

回顾过去所学，要判断一个矩阵是否为一个关联矩阵是很容易的，因为一个关联矩阵的每一列最多有两个1。如果一个矩阵的每一列最多有两个1，我们就可以构造一个线图，使此矩阵成为这个线图的关联矩阵。

例3-5-6 假定矩阵R为

$$R=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h & i \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

移去每一个在行1处为1的列，然后移去行1，得到H子阵$H_{(1)}$，它可以分块为

$$\begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} g & d & e & h & i \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

因此关于行 1 的M子阵对是

$$M(1)_1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & f & g \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

和

$$M(1)_2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & h & i \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$M(1)_1$的H子阵$H_{(2)}$是

$$1\begin{array}{c} \begin{array}{cc} b & f \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

于是，取$H_{(2)1} = 1\overset{b\ f}{[1\ \ 1]}$，$H_{(2)2}=\phi$，则 M 子 阵M (12) 可 由$M(1)_1$不删去任何行和列得到，或者说

$M(12) = M(1)_1$ （最小M子阵）

而M子阵$M(2)$由$M(1)_1$删除行 1 和列b，f得到，即

$M(2) = 2\overset{a\ c\ g}{[1\ \ 1\ \ 1]}$ （最小M子阵）

注意$M(12) = M(1)_1$意思是说矩阵$M(12)$的每一个 元 素 与 矩阵$M(1)_1$的对应元素相等。符号$M(12)$和$M(1)_1$ 指出不同的限制，即$M(12)$的行 1 和行 2 都必须代表关联集，但在$M(1)_1$中，只要求行 1 代表关联集。

$M(1)_2$的H子阵$H_{(3)}$是

$$\begin{matrix} a & b & f & i \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

它不能象式（3-5-4）那样分块而使两个子阵都不空。因此，取 $H(3)_2=\phi$，我们有

$$M(13)=M(1)_2$$

和

$$M(3)=3\begin{matrix} c & d & e & h \\ [1 & 1 & 1 & 1] \end{matrix}\quad\text{（最小}M\text{子阵）}$$

最后，由 $M(13)$ 删除在行 4 为 1 的所有列并移去行 4 所得到的 H 子阵 $H_{(4)}$ 可分块为

$$\begin{matrix} & a & f & d & h \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

故 $M(13)$ 关于行 4 的 M 子阵是

$$M(14)=\begin{matrix} & a & b & c & e & f & i \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}\quad\text{（最小}M\text{子阵）}$$

$$M(34)=\begin{matrix} & b & c & d & e & h & i \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}\quad\text{（最小}M\text{子阵）}$$

因为最小 M 子阵 $M(12)$，$M(2)$，$M(3)$，$M(14)$ 和 $M(34)$ 的集合满足定理3-5-8，故所给的矩阵 R 是一个线图的基本割集矩阵。

按照下面的步骤，我们可以构成一个以 Q_f 为基本割集矩阵的线图：

1.从关联矩阵分别为 $M(14)$ 和 $M(34)$ 的两个线图〔图3-5-17

(a)和(b)〕出发，构成一个基本割集矩阵为$M(13)$的线图，如图3-5-18所示。

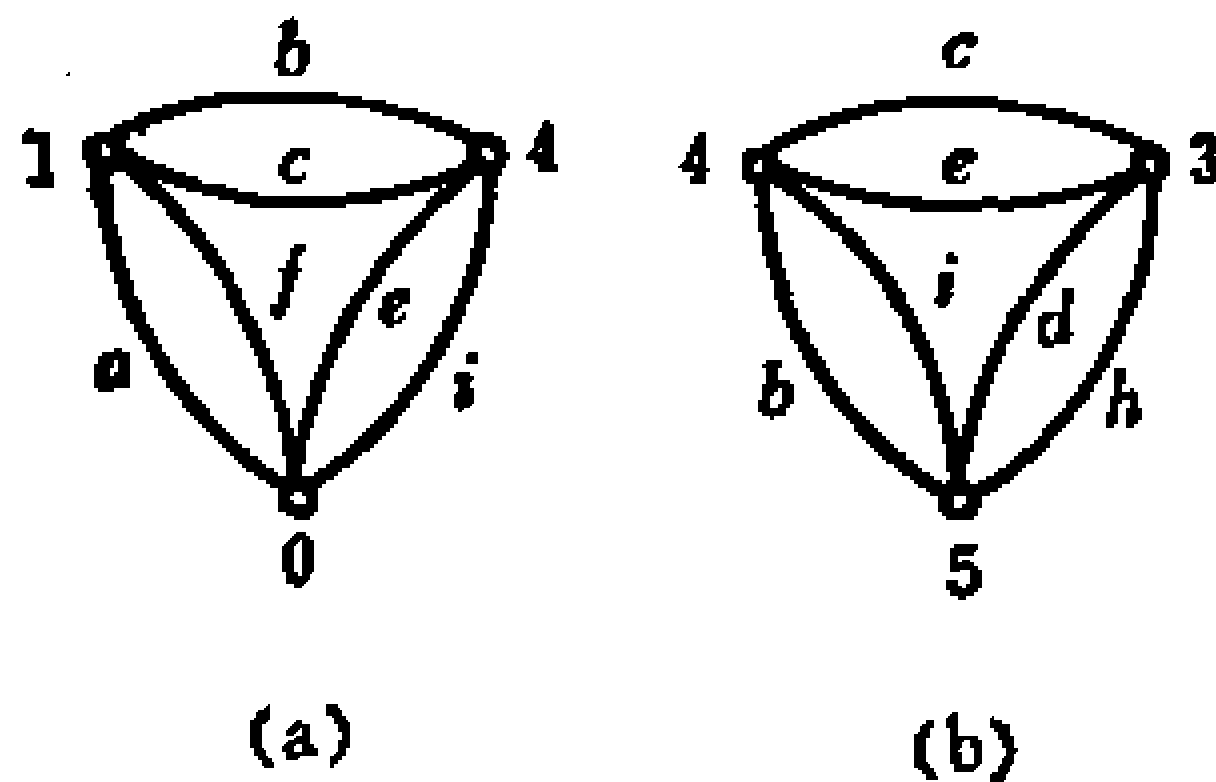


图3-5-17 线图

(a)对应于M(14)的G′，(b)对应于M(34)的G″

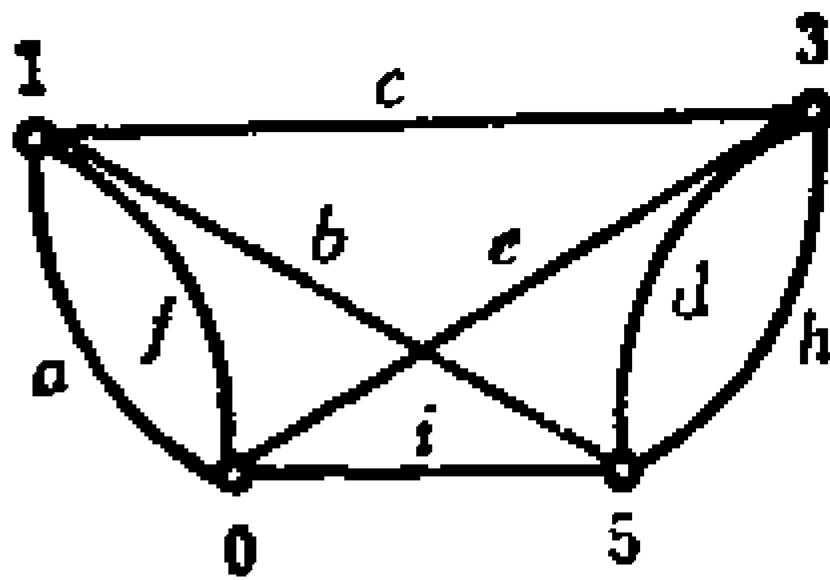


图3-5-18 对应于$M(13)$的线图

2.从两个线图出发，其中一个是由步骤1得到的，另一个如图3-5-19所示，其关联矩阵是$M(12)$，来构成以Q_f为基本割集矩阵的线图。所得的图如图3-5-20所示。

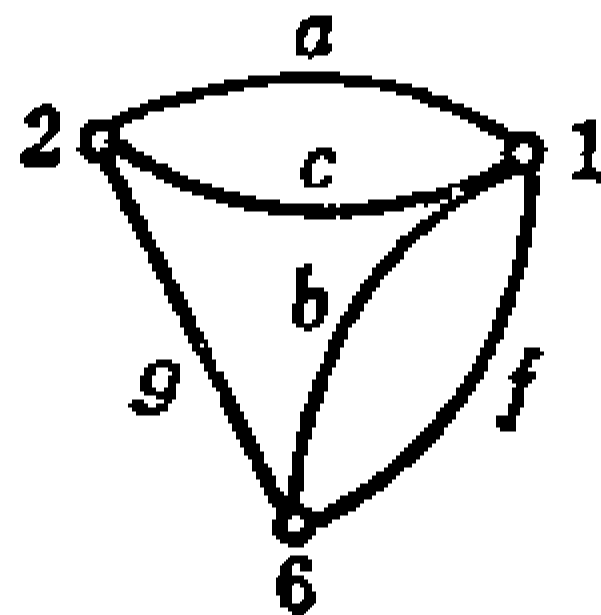


图3-5-19 对应于$M(12)$的线图

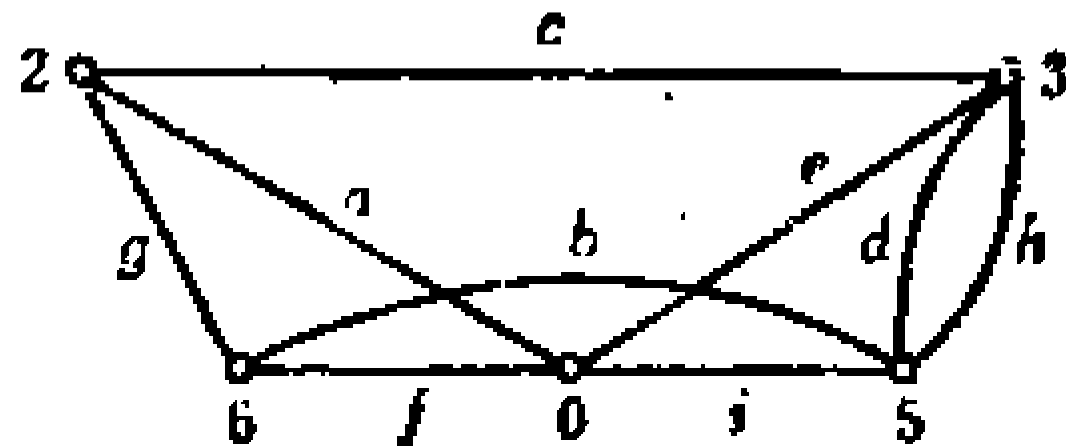


图3-5-20 对应于Q_f的线图

注意在用这些步骤来得到最终的线图时，不需要用到任何一个关联矩阵只有一行的线图。还必须注意，定理3-5-8对分离线图也适用。

在许多情况下，在得到一个最小M子阵集之前，就能获知所给的线图是不可能实现为一个基本割集矩阵的。以下定理给出这样一种情况。

定理3-5-9 设$M(i_1i_2\cdots i_p)$是一个M子阵。如果其中存在一个列，它在行$i_1,i_2,\cdots,i_p$处至少有三个1，则$M(i_1i_2\cdots i_p)$不可能实现为一个基本割集矩阵，而以其行$i_1,i_2,\cdots,i_p$代表关联集。

证明： 假定$M(i_1i_2\cdots i_p)$中除$i_1,i_2,\cdots,i_p$外没有其它的行，则$M(i_1i_2\cdots i_p)$显然不可能是一个关联矩阵。现在我们假设，对于所有形如$M(\cdots)$的矩阵，当它所包含的行中至多有k行$j_1,j_2,\cdots,j_k$不在圆括号内时，定理为真。注意所有在圆括号内的行一定表示关联集。然后，我们要证明，对于矩阵$M(i_1\cdots i_p)$，当它有$k+1$行$j_1,j_2,\cdots j_k,j_{k+1}$不在圆括号中时，定理为真。

不失一般性，假定$M(i_1\cdots i_p)$的列p具有的三个1，是在行i_1,i_2和i_3处。

情形1　假定行j_1在列p处为0，又假定我们用行j_1来构成$M(i_1\cdots i_p)$的H子阵。则当此H子阵如式(3-5-3)那样分块时，行i_1，i_2和i_3将一起在H_1中或在H_2中。于是关于行j_1的M子阵对之一将包含行i_1,i_2和i_3。所以它在列p与行i_1，i_2，i_3交叉处共有三个1。因为行i_1，i_2和i_3在圆括号内，又因为这个所得的矩阵最多有k行不在圆括号中，故定理在这个情形下为真。

情形2　假定行j_1在例p处为1，我们用行j_1来构成$M(i_1\cdots i_p)$的H子阵。则因为在构成H子阵时列p将被删除，在按式(3-5-3)将H子阵分块后，行i_1,i_2,i_3不一定都在H_1中。如果行i_1，i_2和i_3一起都在H_1或H_2中，则证明与情形1完全相同。假定行i_1在H_1中，行i_2和i_3在H_2中，则在这种分划下，关于行j_1的M子阵对中，有一个包含行i_2，i_3和j_1，它们在列p处都是1。因为在此M子阵中，最多有k行不在圆括号里，故由假设，定理为真。

（证毕）

上述定理可以用另一种方式来表达。

定理3-5-10 如果$M(i_1i_2\cdots i_p)$中由行$i_1,i_2,\cdots,i_p$组成的子矩阵不是一个关联矩阵，则$M(i_1i_2\cdots i_p)$不可能实现为基本割集矩

阵，而其行$i_1, i_2, \cdots, i_p$表示关联集。

例3-5-7 考虑下面的矩阵

$$R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

对于行1，它的H子阵$H_{(1)}$是

$$\begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} b & e_2 & e_3 & e_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

于是，M子阵对$M_1(1)$和$M_2(1)$是

$$M_1(1) = R$$

和

$$M_2(1) = 1 \begin{array}{c} \begin{matrix} a & c & d & e_1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

对于$M_1(1)$的行2，其H子阵是

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} c & e_1 & e_3 & e_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

于是，$M_1(1)$关于行2的M子阵对是

$$M_1(12) = R$$

和

$$M_1(2) = 2 \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & d & e_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

类似地，$M_1(12)$关于行3的M子阵对是

$$M_1(123)=R$$

和

$$M_1(3)=3\begin{matrix} & a & b & c & e_3 \\ & [1 & 1 & 1 & 1] \end{matrix}$$

因为$M_1(123)$包含子阵

$$\begin{matrix} & a & b & c & d & e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

其中每一行都在圆括号中（也就是说，每一行一定表示一个关联集），这个子矩阵应当是一个关联矩阵。然而，列a包含三个1．因此这个子矩阵不可能是一个关联矩阵。于是，由定理3-5-10，在这个M子阵集合下．R不可能是一个基本割集矩阵。又因为用行1，2，3得不到其他的M子阵集合，所以我们可以断定，R不是一个基本割集矩阵。

以下定理对于排除不可实现矩阵是很重要的。

定理3-5-11 对于一个给定的矩阵$R=[R_{11}\ U]$，如果存在一个子矩阵$R'=[R'_{11}U']$，它不可能实现为基本割集矩阵。则矩阵R亦不可能实现为基本割集矩阵．这里U'是一个单位矩阵。

证明： 假定$R=[R_{11}U]$是关于树t的基本割集矩阵．因为删除一些行相当于把t中一些枝短路，我们可以删除一些行，使剩余的矩阵R_s恰与R'有相同的行。注意$R_s=[R_{s11}\ U_s]$是一个线图的基本割集矩阵，这里U_s是单位矩阵。可以看出，删除R_{s11}的列等价于删除与这些列对应的弦。因此，我们用删除R_{s11}中不在R'_{11}内的列的办法，可以得到一个线图的基本割集矩阵R'。这与R'不是可实现的假设矛盾。所以R不是基本割集矩阵。（证毕）

例3-5-8 因为矩阵

$$\begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e_1 & e_2 & e_3 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

不可实现为基本割集矩阵（见例3-5-7），所以任何一个包含这个矩阵为其子矩阵而形如$[R_{11}U]$的矩阵R，是不可实现为基本割集矩阵的。

3-6 从割集矩阵到关联矩阵的变换

我们已经知道，一个线图的关联矩阵A是由穷举割集矩阵Q_e中的一些行组成的。一个基本割集矩阵Q_f也是由穷举割集矩阵Q_e的一些行组成的。并且，关联矩阵A的秩和基本割集矩阵Q^f的秩都等于穷举割集矩阵Q_e的秩。因此，存在一个非奇异矩阵D，使得

$$A = DQ_f \tag{3-6-1}$$

现在我们必须解决的问题，是怎样来得到满足式（3-6-1）的矩阵D。

设$\{M_j; j=1,2,\cdots,n_v-\rho+1\}$是我们在前面研究过的，矩阵$Q_f$的最小$M$子阵集合。又设$\{g_j;\ j=1,2,\cdots,n_v-\rho+1\}$是线图的集合，其中线图$g_j$的关联矩阵是$M_j$，$j=1,2,\cdots,n_v-\rho+1$。显然$g_j$有一个参考点$v_j$，它不对应关联矩阵$M_j$的任一行。注意，在$\{M_j;\ j=1,2,\cdots,n_v-\rho+1\}$中，矩阵$M_j$的行所表示的每一个顶点恰在$\{g_j;\ j=1,2,\cdots,n_v-\rho+1\}$中的两个线图里出现。并且，当我们把$\{g_j;\ j=1,2,\cdots,n_v-\rho+1\}$中的所有线图合在一起，得到一个以所给矩阵$Q_f$为基本割集矩阵的线图$G$时，所有由$\{M_j;\ j=1,2,\cdots,n_v-\rho+1\}$中任一$M_j$的行所表示的顶点都将被移去。换句话说，线图$G$不包含由$M_j\in\{M_j;\ j=1,2,\cdots,$

$n_v-\rho+1\}$的行所表示的顶点。又显然在从$g_j\in\{g_j;\ j=1,2,\cdots,n_v-\rho+1\}$形成$G$的过程中，不会产生任何新的顶点。因此$G$仅由$g_j$的参考点组成。

例3-6-1 考虑一个基本割集矩阵Q_f：

$$Q_f=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc}a&b&c&d&e&f&g&h&i\end{array}\\\left[\begin{array}{ccccccccc}1&1&1&0&0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&1&1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\end{array}$$

它与例3-5-6中的R相同。由例3-5-6的结果，Q_f的一个最小M子阵集合为

$$\{M_1,M_2,M_3,M_4,M_5\}$$

其中$M_1=M(12)$，$M_2=M(2)$，$M_3=M(3)$，$M_4=M(14)$，$M_5=M(34)$。线图$\{g_1,g_2,g_3,g_4,g_5\}$的集合如图3-6-1所示。注意g_j的

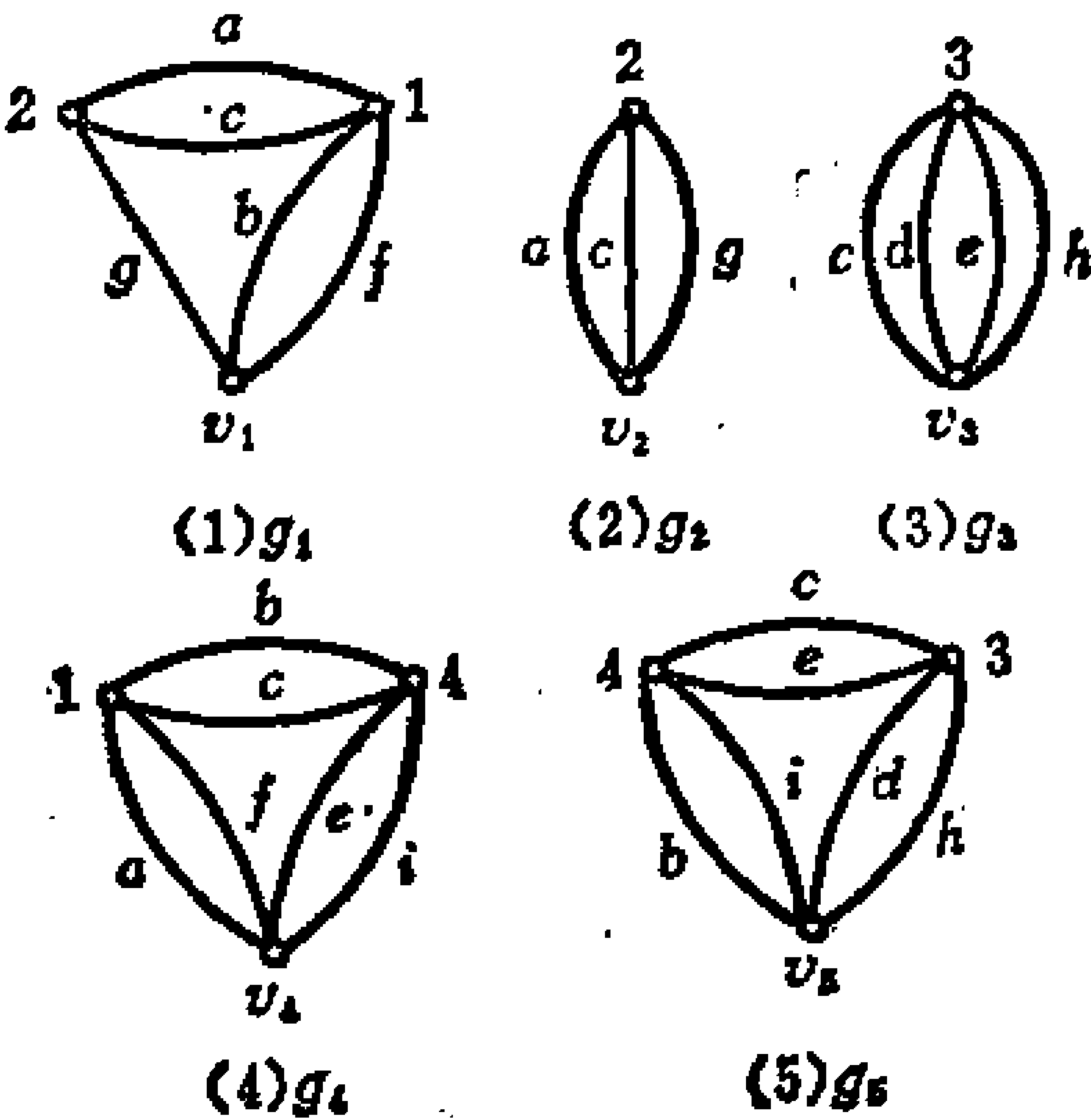


图3-6-1 集合$\{g_1,g_2,g_3,g_4,g_5\}$中的线图

参考点用符号 v_i表示。把这些线图全部合到一起，就得到图3-6-2所示的线图G，它的基本割集矩阵是Q_f。注意G的顶点是 g_1，g_2，g_3，g_4和g_5的参考点。

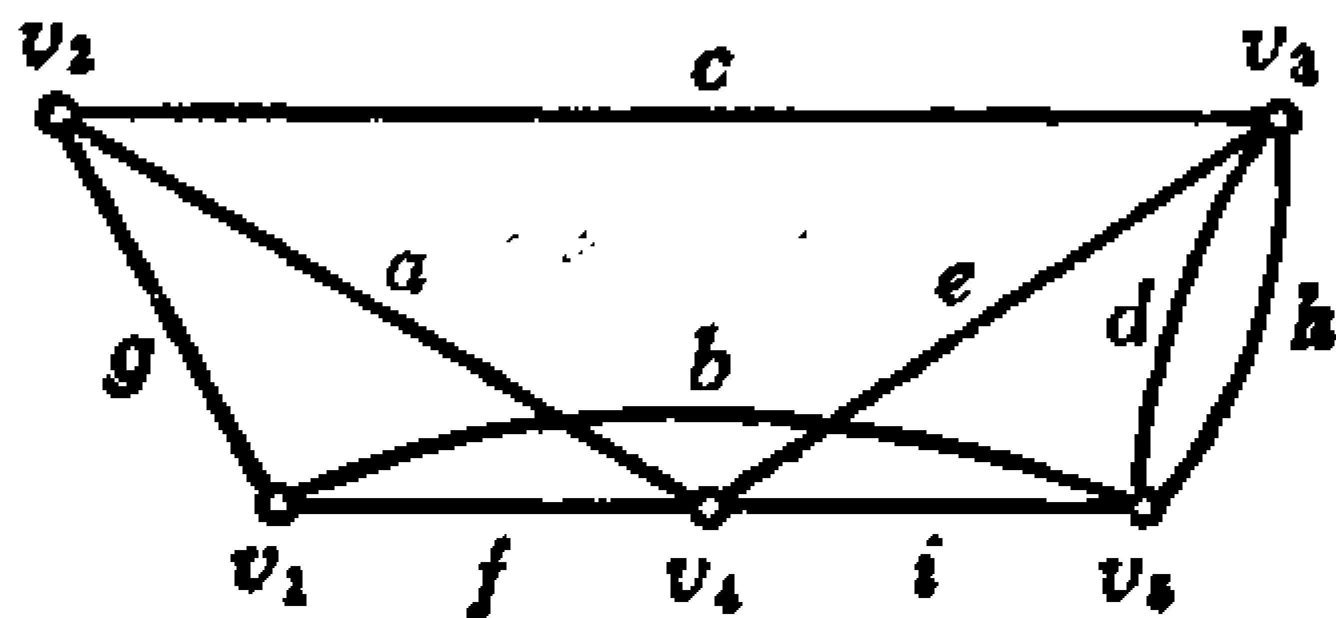


图3-6-2　线图G

我们知道，对应于g_i中参考点v_i 的关联集等于与M_i 中各行对应的全体关联集的环和。换句话说，在线图G 的关联矩阵A中，对应于g_i的参考点v_i 的行 j，可以由M_i的所有行作环和得到。因而非奇异矩阵D的第 i 行必须求得那些属于 M_i 的各行之和。由DQ_f可看出，D的第 i 列与Q_f的第 i 行对应。也就是说，使Q_f的第j_1，j_2，…，j_k行乘上D的行i后求和，就必须令D的元(i,j_1)，(i,j_2)，…，(i,j_k)为 1 。

定理3-6-1　设Q_f是由ρ个最大连通子图构成的线图的基本割集矩阵。任一矩阵D若满足以下两个条件：

1．D的$n_v-\rho$行对应Q_f的$n_v-\rho$个最小M子阵。

2．$D=[d_{ij}]$的元素d_{ij}是

$$d_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若对应}D\text{的第}i\text{行的最小}M\text{子阵包含}Q_f\text{的第}j\text{行}\\ 0 & \text{若}M\text{不包含}Q_f\text{的第}j\text{行}\end{cases}$$

则DQ_f是线图G的一个关联矩阵。

假定存在一个非奇异矩阵$\underline{D}$，使得$\underline{D}Q_f$是一个线图G 的关联矩阵，从这个线图连同Q_f给出的已知基本割集，我们可以得到与Q_f的最小M子阵集合$\{M_j;\ j=1,2,\cdots,n_v-\rho+1\}$对应的线图集

合$\{g_j;\ j=1,2,\cdots,n_v-\rho+1\}$。于是由定理3-6-1，我们可以得到一个非奇异矩阵D，使得DQ_f是G的关联矩阵，其中DQ_f的行i和$\underline{D}Q_f$的行i表示G的同一顶点。因此

$$\underline{D}Q_f=DQ_f \tag{3-6-2}$$

因为$\underline{D}$是非奇异的，故我们可以断定

$$\underline{D}=D \tag{3-6-3}$$

定理3-6-2 设Q_f是一个线图G的基本割集矩阵。对于任何一个非奇异矩阵D，如果DQ_f是一个关联矩阵，则存在Q_f的一个最小M子阵集合，使得D满足定理3-6-1的条件。

例3-6-2 考虑例3-5-6给出的基本割集矩阵Q_f。假定我们选取$\{M_1,M_2,M_3,M_4,M_5\}$中的M_1,M_2,M_3和M_4，则由定理3-6-1，可以得到一个非奇异矩阵D为

$$D=\begin{array}{c}\\ M_1\\ M_2\\ M_3\\ M_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}\end{array}$$

并且我们有

$$DQ_f=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&1&1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

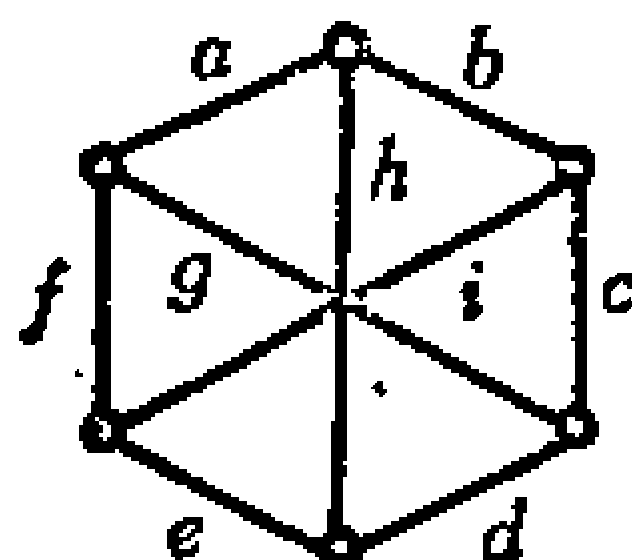
$$=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&1&1&0&0\\1&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&1&1&0&0&1&0\\1&0&0&0&1&1&0&0&1\end{bmatrix}$$

它显然是一个关联矩阵。

习 题

1.写出图 P-3-1 所示线图关于树t的基本回路矩阵和基本割集矩阵。(a)树$t=(a,b,c,d,e)$；(b)树$t=(e,f,g,h,i)$。

2.假定一个连通线图g由n_v个顶点组成。证明：(a)若g包含n_v-1条边，则g是树；(b)若g不包含回路，则g是树。



图P-3-1

3.证明一个连通线图的任一边都可以在一个树中。

4.证明或否定这样的说法："对于一个连通图中任一条路径，存在一个包含此路径的树。"

5.证明在一个完全图中，关于任一个树的弦集构成一个连通子图。

6.假定树t中一个顶点v的度$d(v)=k$，证明t中至少有k个度为1的顶点。

7.证明如果G是一个至少包含五个顶点的完全图，则关于G的任一个树的全体弦组成的子图至少包含一个回路。

8.证明任一个树和任一个割集至少有一条公共边。

9.证明定理3-2-3。

10.证明定理3-3-3。

11.设t是线图G中的一个树。设b是一条弦。假定$t\cup(b)$中的回路由边$b, e_1, e_2, \cdots, e_k$组成，证明对$1\leqslant p\leqslant k$，$t\cup(b)-(e_p)$是一个树。注意$t\cup(b)-(e_p)$由边b和t中除e_p外的所有边组成。

12.设e是树t中的一条边。又设$S=(e, a_1, a_2, \cdots, a_k)$是关于$t$的一个基本割集.(因此边$a_1, a_2, \cdots, a_k$都不在$t$中.)证明对$1\leqslant p\leqslant k$,$t\cup(a_p)-(e)$是一个树。注意$t\cup(a_p)-(e)$由边$a_p$和$t$中除边$e$外的所有边组成。

13.判断以下矩阵是否可以实现为一个基本割集矩阵。

$$\left[\begin{array}{ccccc:cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

14.是否存在由1和0组成，既非割集矩阵又非回路矩阵的矩阵？如有这样的矩阵，请指出一个来。

15.画出一个线图，其基本割集矩阵是

$$\begin{array}{cccccc:cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc:cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

16.是否存在这样一个线图，其基本回路矩阵为习题13中的矩阵？

17.画出一个线图，其基本回路矩阵是

$$\begin{array}{ccccc:cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccc:cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

18.画出一个线图，其基本回路矩阵是

$$\begin{array}{ccccc:cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccc:cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

第四章　平　面　图

4-1　2-同　构　图

现在，我们转而讨论一种特殊类型的线图——平面图的性质，这不仅是由于四色问题引起了对平面图的研究，而且，更重要的是因为现代技术，如电子工业领域对平面性研究的日益增长的需要。本章的重点是惠特尼(Whitney)的对偶性理论，库拉托斯基 (Kuratowski) 的平面图理论，以及平面图的性质在证明托特 (Tutte) 的割集(回路)矩阵可实现性条件中的应用。首先，我们要研究线图的两种等价关系。

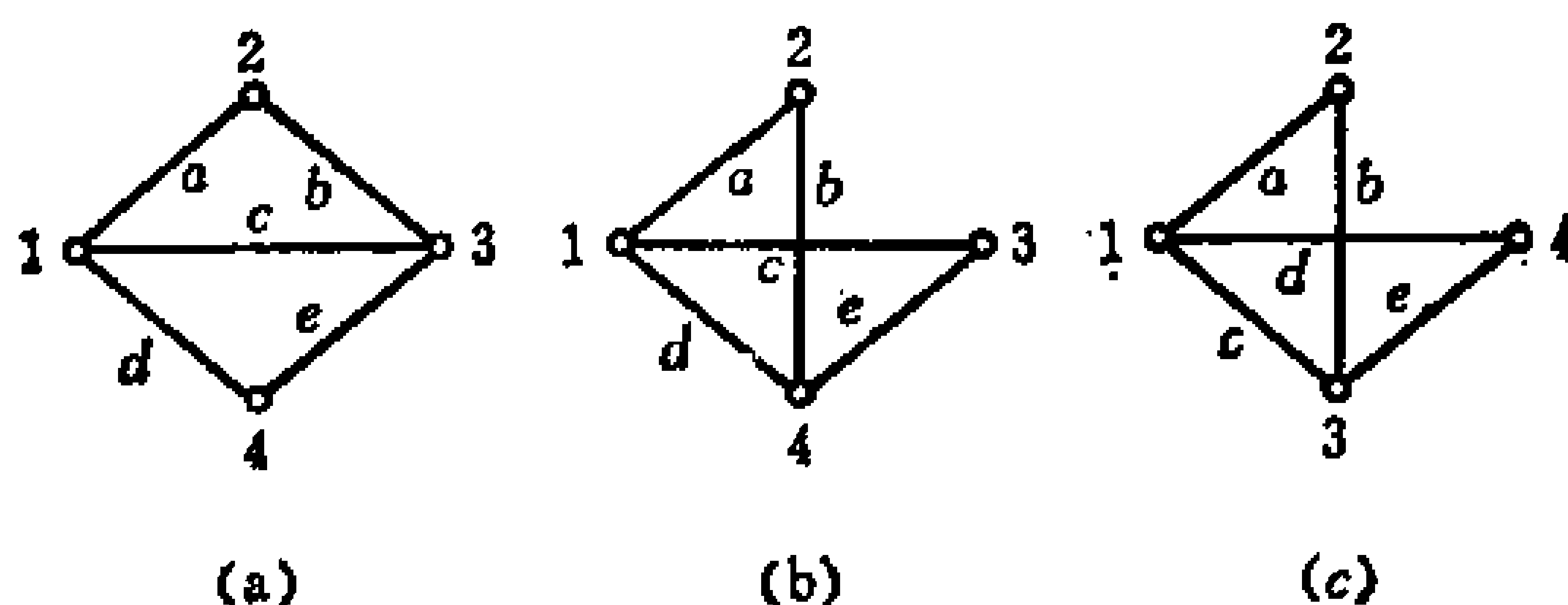


图4-1-1　同构图

(a)线图G；(b)线图G'；(c)G'顶点和边的重新命名

考虑图4-1-1(a)和(b)所示的线图G和G'。比较边b的两个端点即可看出，G和G'是不同的线图。但是，如果我们重新命名G'的顶点和边，如图4-1-1(c)所示（将顶点3改为4，顶点4改为3，边c改为d，边d改为c），所得的线图就变得和G一

致了。因此我们可以说，G和G'是相似的。我们称这两个线图互为同构。

定义4-1-1 如果在线图G和G'的边之间存在着一个1∶1对应，使得关联关系得到保持，则G和G'是互为同构的。

如果这个1∶1对应不是保持两个线图的关联关系，而是保持G和G'回路之间的对应，则称这两个线图互为2-同构。

定义4-1-2 如果在线图G和G'的边之间存在着一个1∶1对应，使得回路关系得到保持，则称G和G'互为2-同构。

例如，图4-1-2(a)和(b)中的线图G和G'是2-同构的，因为在G和G'的各边之间取一个1∶1对应，如表4-1-1所示，则G中的回路对应于G'中的回路，如表4-1-2所示。

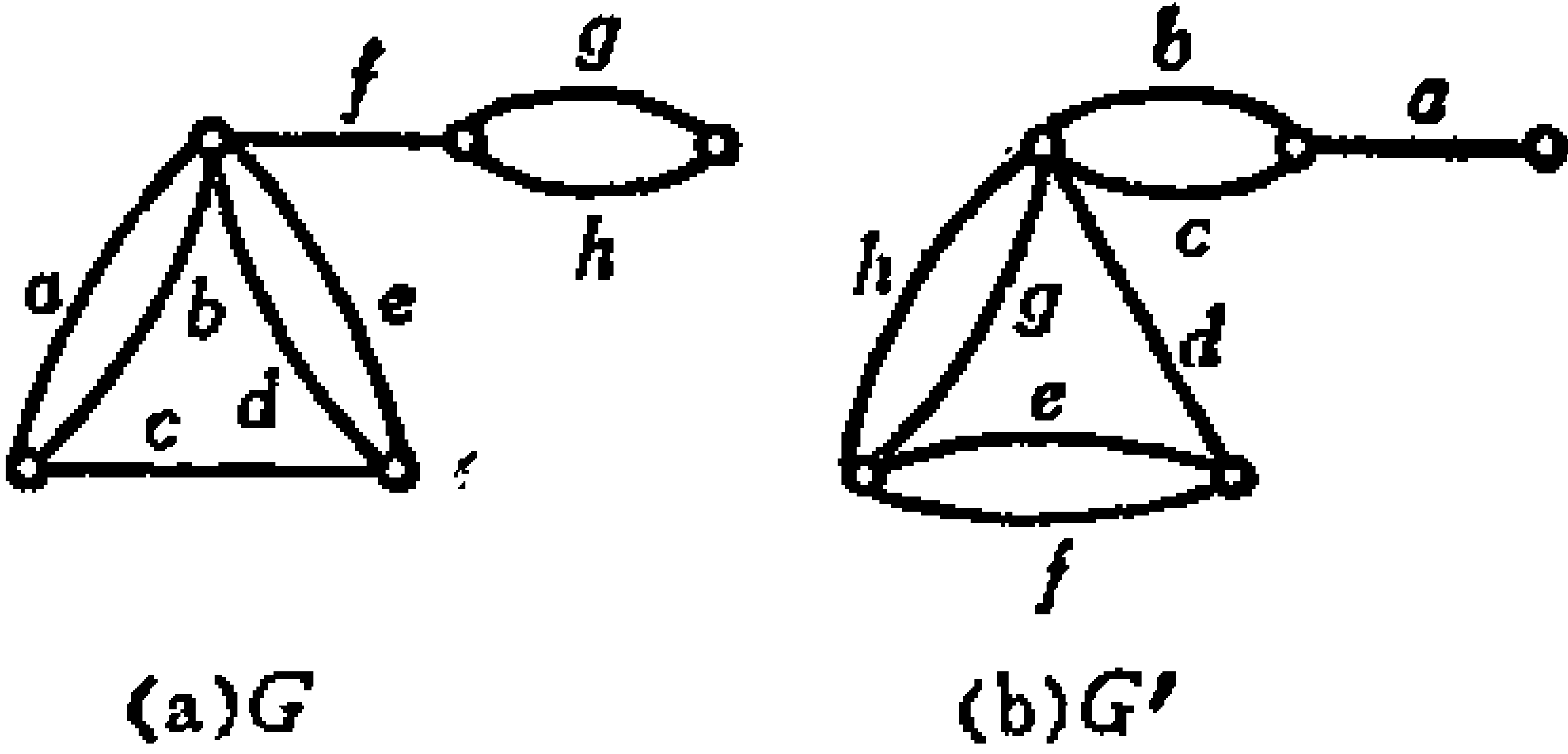


图4-1-2 2-同构图G和G'

表4-1-1 G和G'的各边之间的一一对应

G中的边	G'中的边
a	h
b	g
c	d
d	f
e	e
f	a
g	b
h	c

表4-1-2　G和G'的回路之间的一一对应

G中的回路	G'中的回路
ab	hg
de	ef
gh	bc
acd	hdf
ace	hde
bcd	gdf
bce	gde

从同构的定义可以看出，如果线图G和G'是同构的，则交换G的穷举关联矩阵A_e的行和列（如果有必要的话），就变成G'的穷举关联矩阵A_e。例如，图4-1-1(a)中G的穷举关联矩阵是

$$A_e=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix} a & b & c & d & e\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1&0&1&1&0\\1&1&0&0&0\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\end{array}$$

交换第3、第4行，得到

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix} a & b & c & d & e\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1&0&1&1&0\\1&1&0&0&0\\0&0&0&1&1\\0&1&1&0&1\end{bmatrix}\end{array}$$

再交换第3、第4列，得到

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix} a & b & c & d & e\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1&0&1&1&0\\1&1&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&1&0&1&1\end{bmatrix}\end{array}$$

这就是图4-1-1(b)中的G'的穷举关联矩阵A'_e。

另一方面，如果线图G和G'是2-同构的，则用交换行和列的办法（如有必要的话），可将G的穷举回路矩阵B_e变成G'的穷举回路矩阵。例如，在图4-1-2(a)和(b)中，以下两个矩阵分别为G和G'的回路矩阵

$$
B=\begin{array}{c}\\ C_1\\ C_2\\ C_3\\ C_4\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h\end{array}\\
\left[\begin{array}{cccccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$
B'=\begin{array}{c}\\ C'_1\\ C'_2\\ C'_3\\ C'_4\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h\end{array}\\
\left[\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

则G的穷举回路矩阵B_e是

$$
B_e=\begin{array}{r}\\ C_1\\ C_2\\ C_3\\ C_4\\ C_1\oplus C_2\\ C_1\oplus C_3\\ C_1\oplus C_4\\ C_2\oplus C_3\\ C_2\oplus C_4\\ C_3\oplus C_4\\ C_1\oplus C_2\oplus C_3\\ C_1\oplus C_2\oplus C_4\\ C_1\oplus C_3\oplus C_4\\ C_2\oplus C_3\oplus C_4\\ C_1\oplus C_2\oplus C_3\oplus C_4\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h\end{array}\\
\left[\begin{array}{cccccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

交换B_e的列，使列的次序变成f,g,h,c,a,b,d,e，

$B_e=$

	f	g	h	c	a	b	d	e
1	0	0	0	0	1	1	0	0
2	0	0	0	0	0	0	1	1
3	0	1	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	1	0	1	0
5	0	0	0	0	1	1	1	1
6	0	1	1	0	1	1	0	0
7	0	0	0	1	0	1	1	0
8	0	1	1	0	0	0	1	1
9	0	0	0	1	1	0	0	1
10	0	1	1	1	1	0	1	0
11	0	1	1	0	1	1	1	1
12	0	0	0	1	0	1	0	1
13	0	1	1	1	0	1	1	0
14	0	1	1	1	1	0	0	1
15	0	1	1	1	0	1	0	1

那么，B'的C'_1等于B_e的第二行，C'_2是第一行，C'_3是第三行，而C'_4是第九行。于是，交换行的次序，这个矩阵就变得与G'的穷举回路矩阵B'_e相同。注意，即使G和G'是互为2-同构的，回路矩阵B和B'中的回路也不一定互相对应。这就是我们在这个例子中采用穷举回路矩阵B_e的原因。

因为一个穷举回路矩阵的所有行可由一个基本回路矩阵生成，所以，如果一个线图的基本回路矩阵也是另一个线图的基本回路矩阵，则这两个线图是互为2-同构的。

定理4-1-1 两个线图是互为2-同构的，当且仅当它们具有相同的基本回路矩阵。

利用式(3-4-24)，我们可以修改这个定理。

定理4-1-2 两个线图是互为2-同构的，当且仅当它们具有相同的基本割集矩阵。

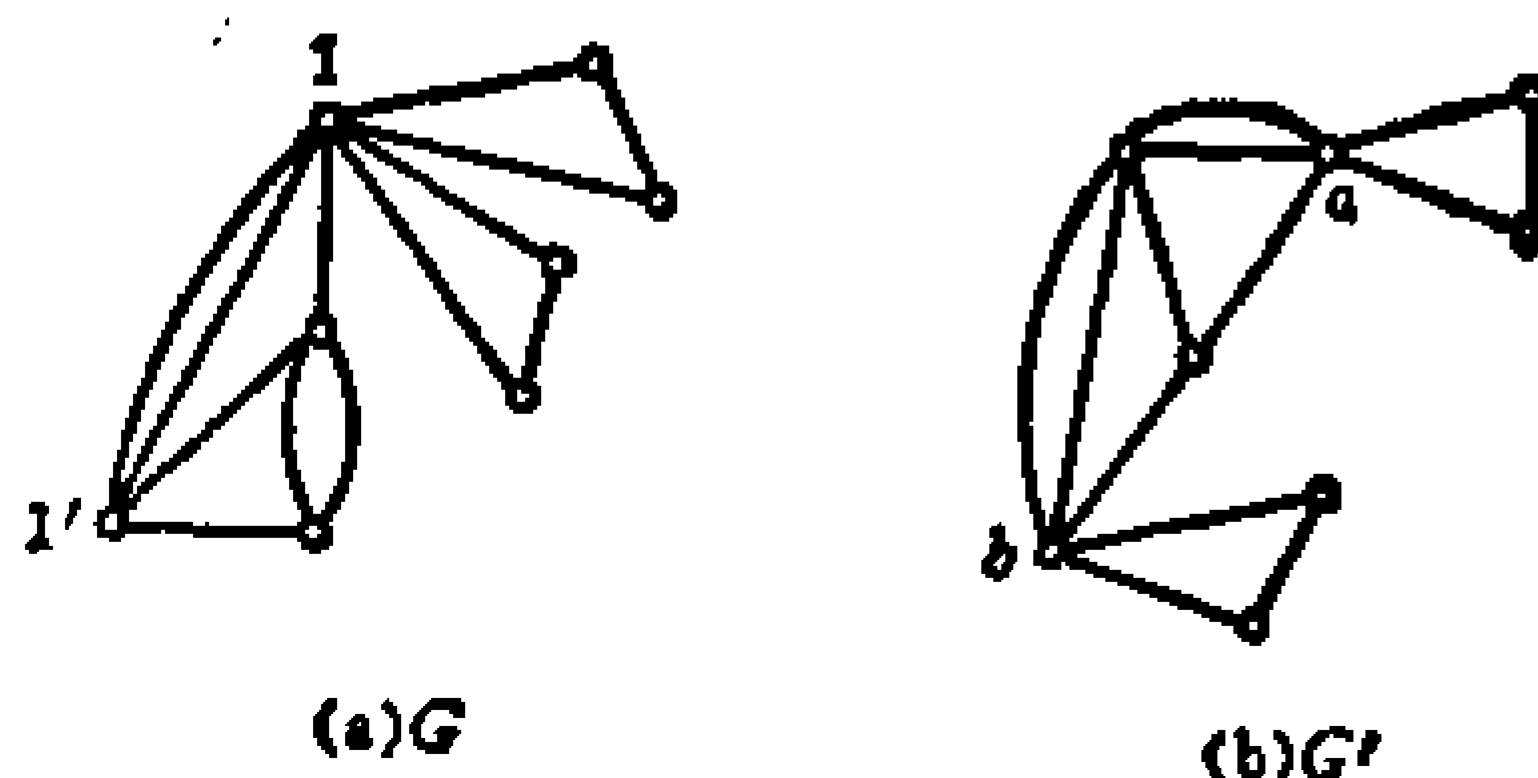
这两个定理对于判断两个线图是否是互为2-同构的，可能并不实用，然而，它们是相当重要的。例如，我们可以说，满足了给定的基本割集矩阵的所有线图都是互为2-同构的，这对于我们在以后各章设计线图时有很大的帮助。

下一个判断2-同构的方法是一种几何方法，它是由惠特尼介绍的。如果线图G和G'是互为2-同构的，则在连续施行以下一种或两种运算下，它们变成同构的。

1.如果存在一个割点，则将它切割成两个，使最大连通子图的个数增加1。

2.如果一个线图由两个子图H和$\bar{H}$组成，它们只有两个公共顶点，譬如说p和q，则交换H中这两个顶点p和q的名称。这一运算在几何上相当于把子图H绕这两个顶点旋转。

例如，图4-1-3(a)和(b)中的线图G和G'是2-同构的，这是因为经过以下步骤，G变成与G'同构。

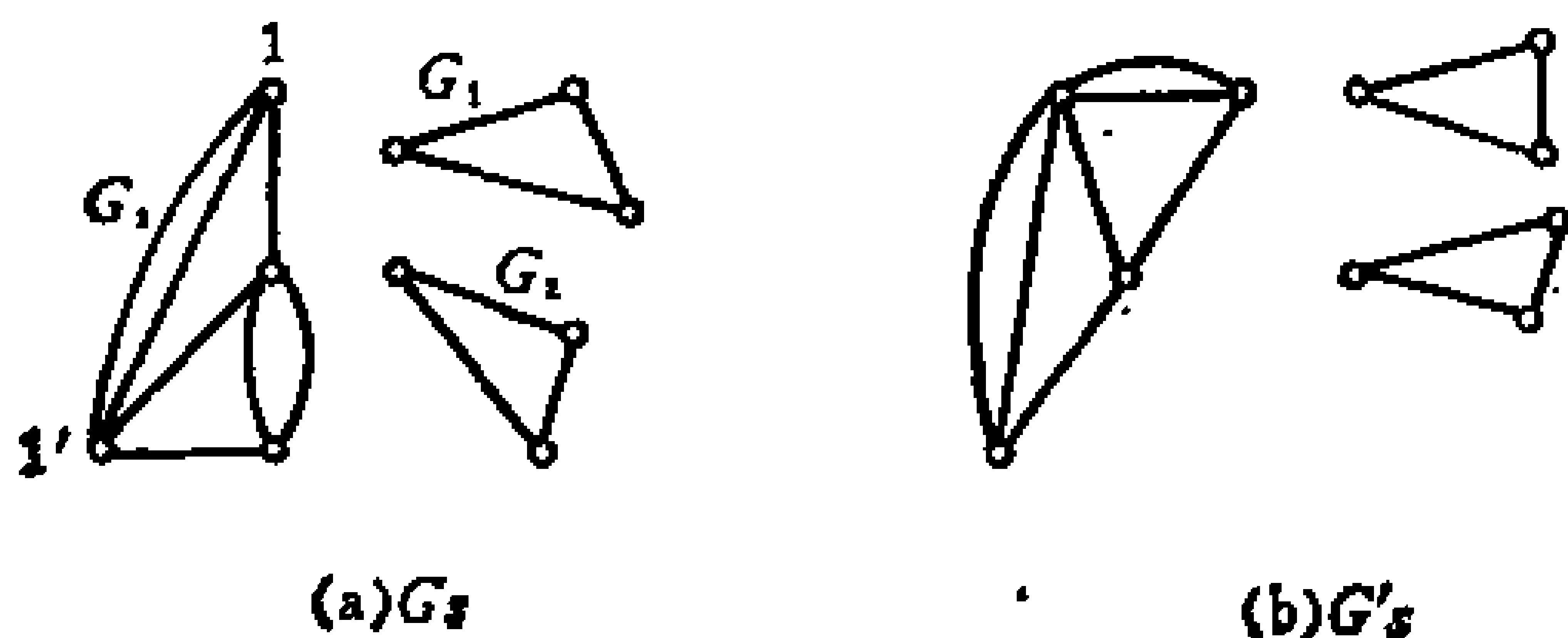


(a)G　　(b)G'

图4-1-3 2-同构图G和G'

步骤1 对G的割点1运用运算1两次，我们得到图4-1-4(a)所示的线图G_1。类似地，对G'的割点a，b，分别运用运算1，

就得到图4-1-4(b)所示的线图G'_s。



(a)G_s　　　(b)G'_s

图4-1-4　2-同构图G_s和G'_s

步骤 2　因为图4-1-4(a) 中G_s的G_3由图4-1-5所示的两个子图H和$\bar{H}$组成，它们由两个顶点 1 和1′连接，我们可以运用运算 2，得到图4-1-6所示的线图$G_{s\prime}$。

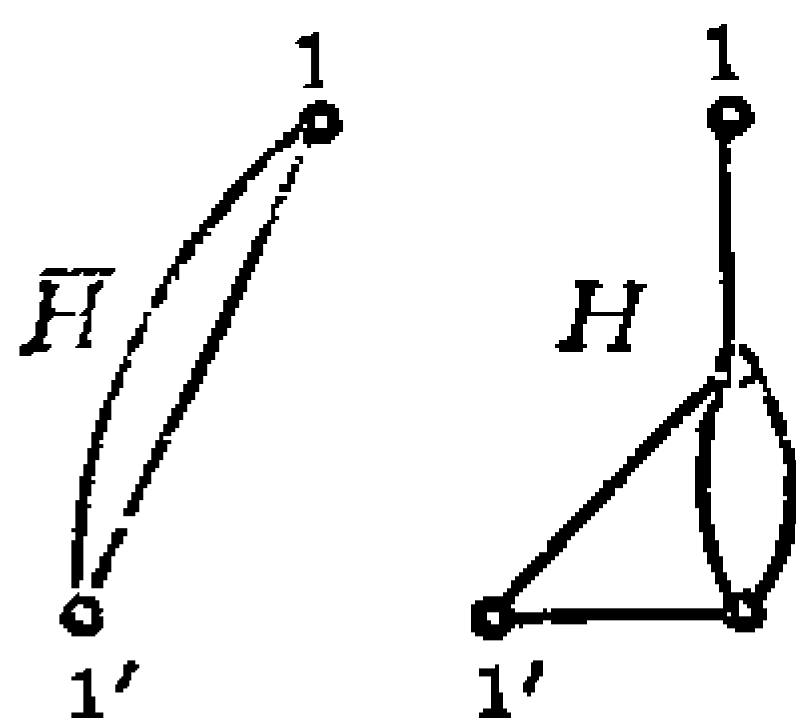


图4-1-5　子图H和$\bar{H}$

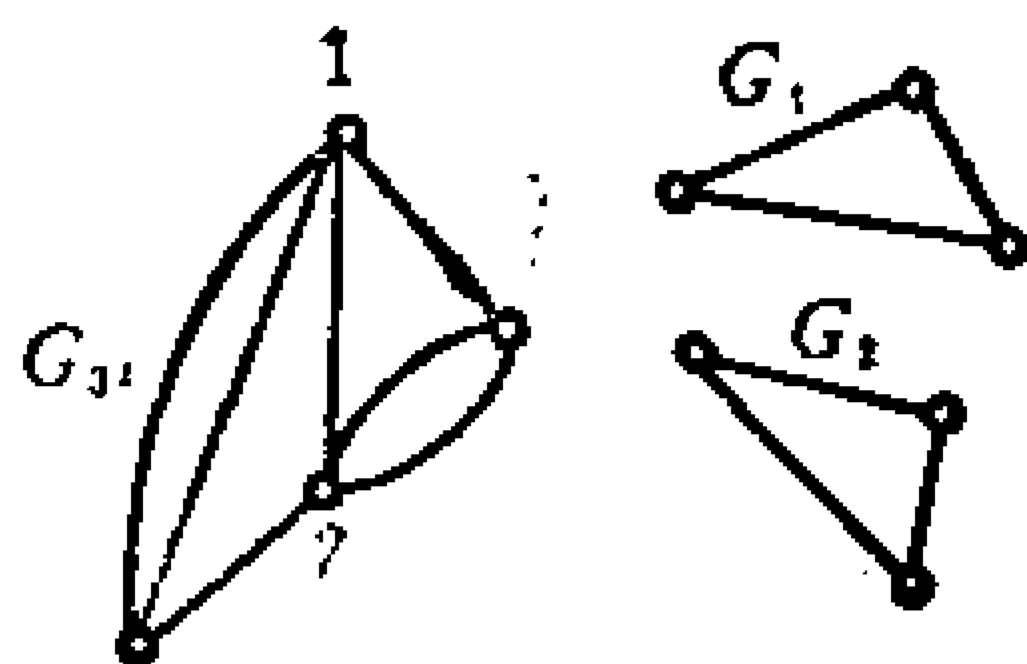


图4-1-6　线图$G_{s\prime}$

步骤 3　类似地，$G_{s\prime}$ 的$G_{3\prime}$由两个子图组成，它们恰有两个顶点 1 和 2 是公共的。因此，我们可以运用运算 2 来得到一个线图，它与图4-1-4(b)中的线图是同构的。于是，G和G'是2-同构的。

容易看出，在这两种运算下，回路是不变的。只要所给的线图边数不多，就可以用这种方法来判断2-同构。

判断2-同构的另一种方法，是利用一个线图的回路矩阵和另一个线图的割集矩阵。

设
$$B_1 = [B_{1_{11}} B_{1_{12}}] \quad (4\text{-}1\text{-}1)$$
是线图G_1的回路矩阵，其中$B_{1_{11}}$是非奇异的。又设
$$Q_2 = [Q_{2_{11}} Q_{2_{12}}] \quad (4\text{-}1\text{-}2)$$
是线图G_2的割集矩阵，其中$Q_{2_{12}}$是非奇异的。假定
$$B_1 Q_2' = 0 \quad (4\text{-}1\text{-}3)$$
则
$$B_{1_{11}} Q'_{2_{11}} + B_{1_{12}} Q'_{2_{12}} = 0 \quad (4\text{-}1\text{-}4)$$
因为$Q_{2_{12}}$是非奇异的，故
$$B_{1_{12}} = B_{1_{11}} Q'_{2_{11}} Q'^{-1}_{2_{12}} \quad (4\text{-}1\text{-}5)$$
因此
$$\begin{aligned} B_1 &= [B_{1_{11}}\ B_{1_{11}} Q'_{2_{11}} Q'^{-1}_{2_{12}}] \\ &= B_{1_{11}}[U\ Q'_{2_{11}} Q'^{-1}_{2_{12}}] \end{aligned} \quad (4\text{-}1\text{-}6)$$

另一方面，利用G_2的基本回路矩阵 $B_2 = [UB_{2_{12}}]$，我们总可以得到
$$B_2 Q_2' = 0 \quad (4\text{-}1\text{-}7)$$
或
$$Q'_{2_{11}} + B_{2_{12}} Q'_{2_{12}} = 0 \quad (4\text{-}1\text{-}8)$$
因此
$$B_{2_{12}} = Q'_{2_{11}} Q'^{-1}_{2_{12}} \quad (4\text{-}1\text{-}9)$$
或
$$B_2 = [UQ'_{2_{11}} Q'^{-1}_{2_{12}}] \quad (4\text{-}1\text{-}10)$$
因为B_2是G_2的一个回路矩阵，对式（4-1-10）左乘以任一个元素为 1 或 0 的非奇异矩阵，所得的矩阵仍为 G_2 的回路矩阵。因为$B_{1_{11}}$是非奇异矩阵，我们利用它来得到G_2的另一个回路矩阵：
$$B_{1_{11}} B_2 = B_2' = B_{1_{11}}[U\ Q'_{2_{11}} Q'^{-1}_{2_{12}}] \quad (4\text{-}1\text{-}11)$$
然而这个回路矩阵恰与式(4-1-6)给出的G_1的回路矩阵相同。于是，由定理4-1-1知，G_1和G_2是2-同构的。

定理4-1-3 设B_1是线图G_1的回路矩阵，Q_2'是线图G_2的割集矩阵。则G_1和G_2是2-同构的，当且仅当存在由交换Q_2'的列得到的Q_2，满足
$$Q_2 B_1' = 0 \quad (4\text{-}1\text{-}12)$$

例4-1-1 设B是图4-1-2(a)中G的一个回路矩阵，这里

$$B=\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

又设Q'_1是图4-1-2(b)中G'的一个割集矩阵，这里

$$Q'_1=\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

交换Q'_1的列，我们有

$$Q_1=\begin{array}{c} \begin{matrix} e & f & d & g & h & a & b & c \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

使得 $$Q_1B'=0$$

故，图4-1-2(a)和(b)所示的G和G'是2-同构的。

4-2 平 面 图

平面图是一种特殊的线图，它不仅在理论上，而且在工业上具有重要意义。但是，目前对于平面图，只有少数几种性质为人们所知。首先我们要研究的，是库拉托斯基发现的一个性质。

定义4-2-1 一个线图G称为平面的，如果它可以被画在一个平面上，使得G中任何两条边除了在端点外互不相交。

例如，图 4-2-1 中线图G可以被重新画成图 4-2-2 的样子，

其中没有边相交。因此，线图G是平面的。而图 4-2-3 中的线图不是平面的。

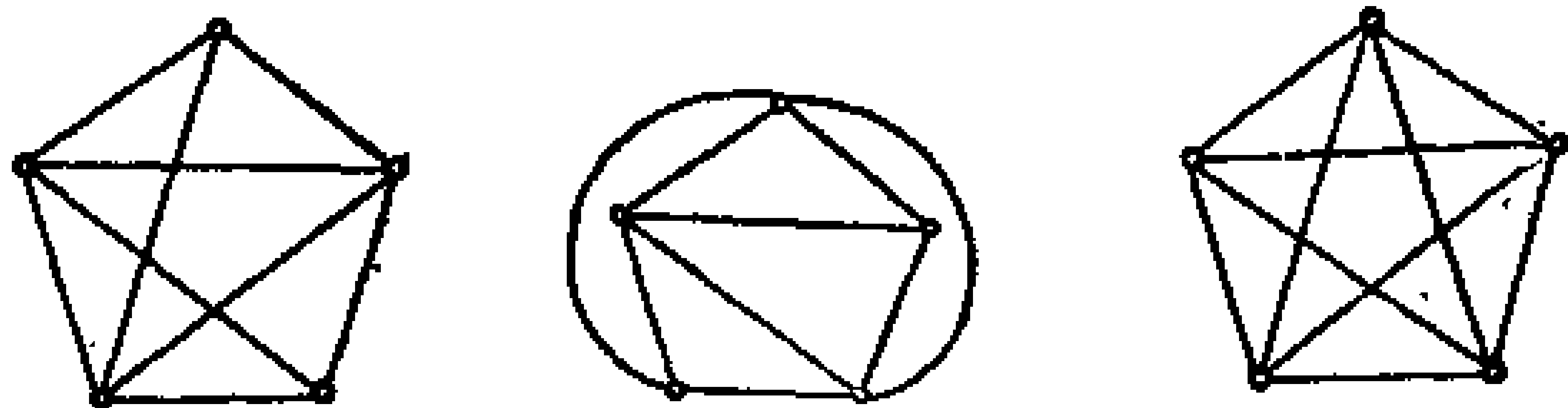


图4-2-1　线图G　　图4-2-2　平面图G　　图4-2-3　非平面线图

考虑放在平面Z上的球面S，如图 4-2-4 所示。设N是球面的最高点。穿过N和球面S上一点p的直线与平面Z交于点p'。称点p'为点p的对应点。我们可以看到，球面S上除N外的每一点都对应且仅对应平面Z上的一点。因此，对于球面S上的一条线段q，只要它不通过点N，就可以得到平面Z上的对应线段q'。

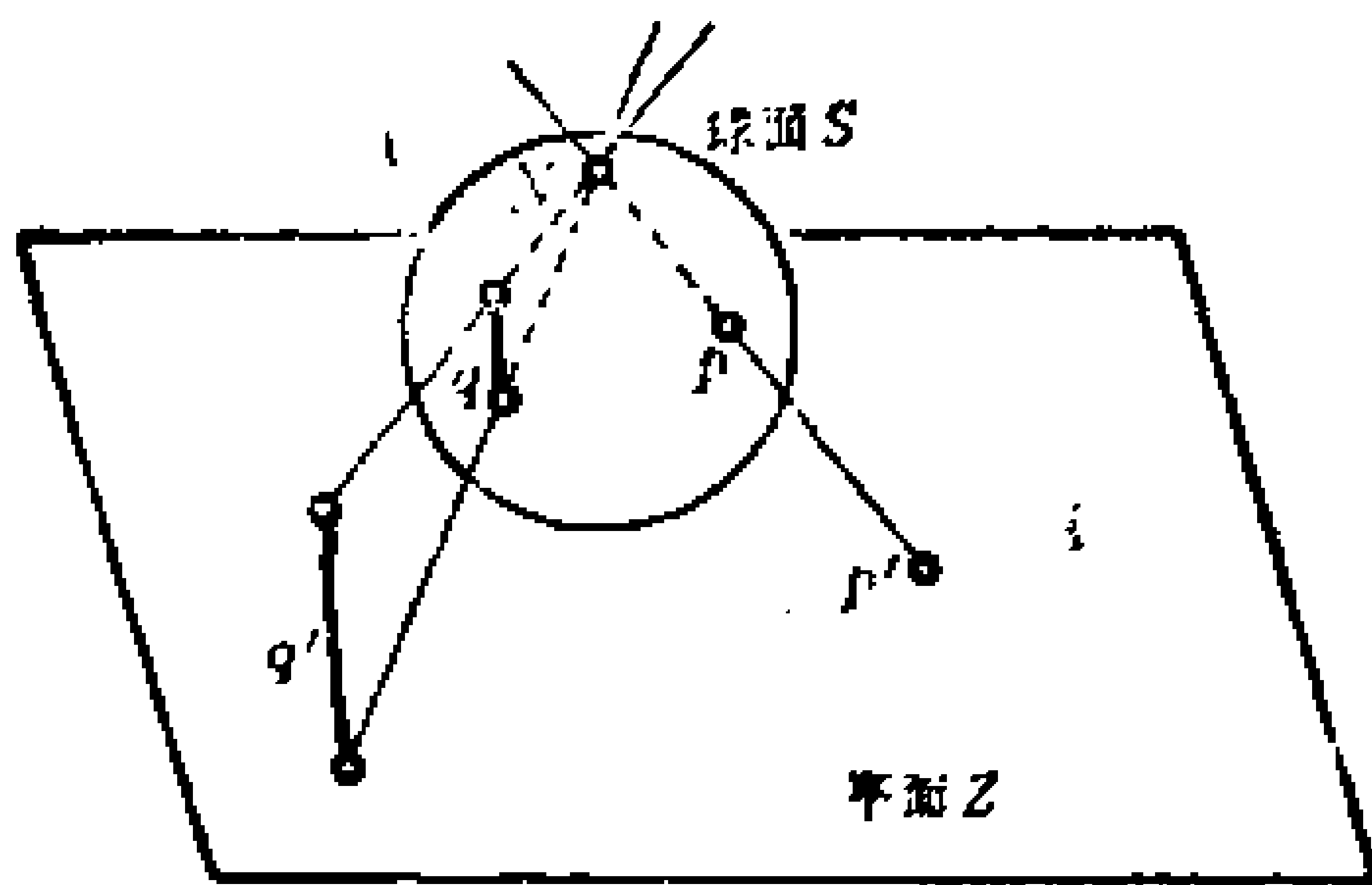


图4-2-4　球面S和平面Z

假定有一个画在球面S上的线图。把球面S放在平面Z上，使这个线图的所有边和顶点都不在球面S的最高点N上，于是我们得到一个画在平面Z上的对应线图。相反，一个画在平面上的线图也可以画到球面S上。

假定我们把一个线图G画到平面Z上，使得任两条边都不相交。又假定G至少包含一个回路，则我们可以认为G的边把平面Z划分成若干区域。例如，在图4-2-5中，线图G把平面划分成五个区域R_0，R_1，R_2，R_3和R_4。称R_0为外区域。也就是说，无界区域是外区域。其他的区域叫做内区域。注意一个线图不一定给出唯一的区域集合。例如，

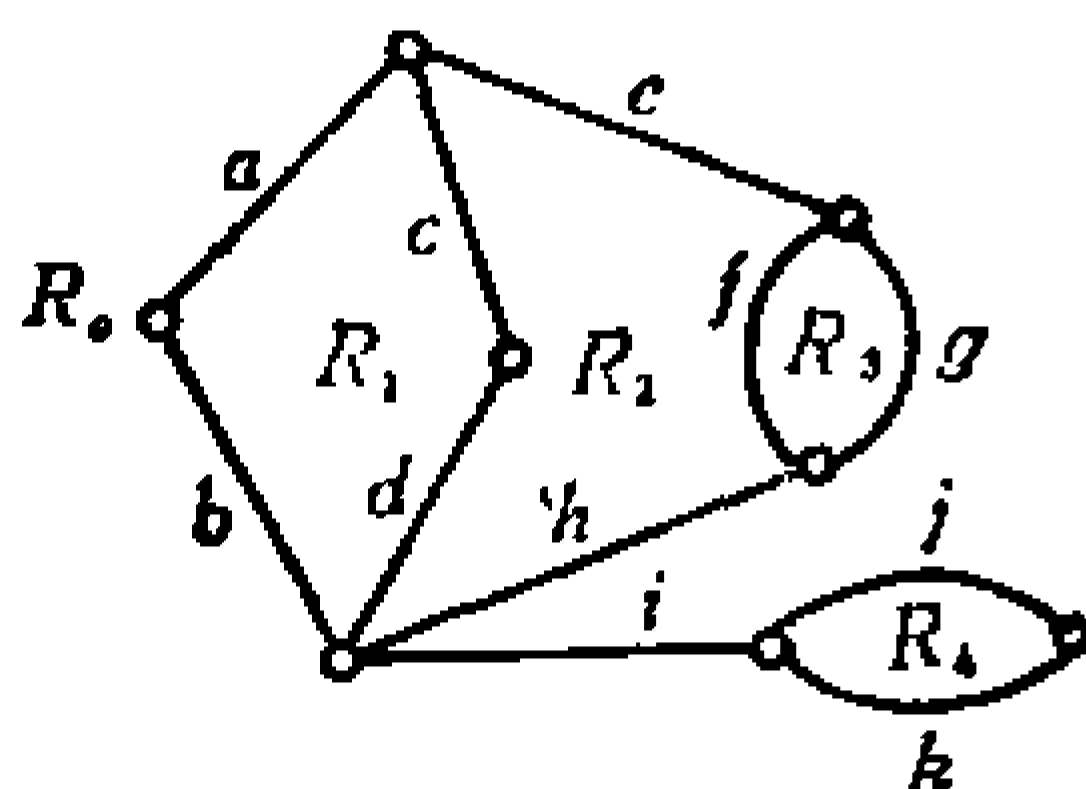


图4-2-5　平面图和区域

如果我们把同一个线图G画成如图4-2-6的样子，就得到区域R'_0，R'_1，R'_2，R'_3和R'_4，它们的边界（形成这些区域边界的边）与R_0，R_1，R_2，R_3和R_4的边界不同。

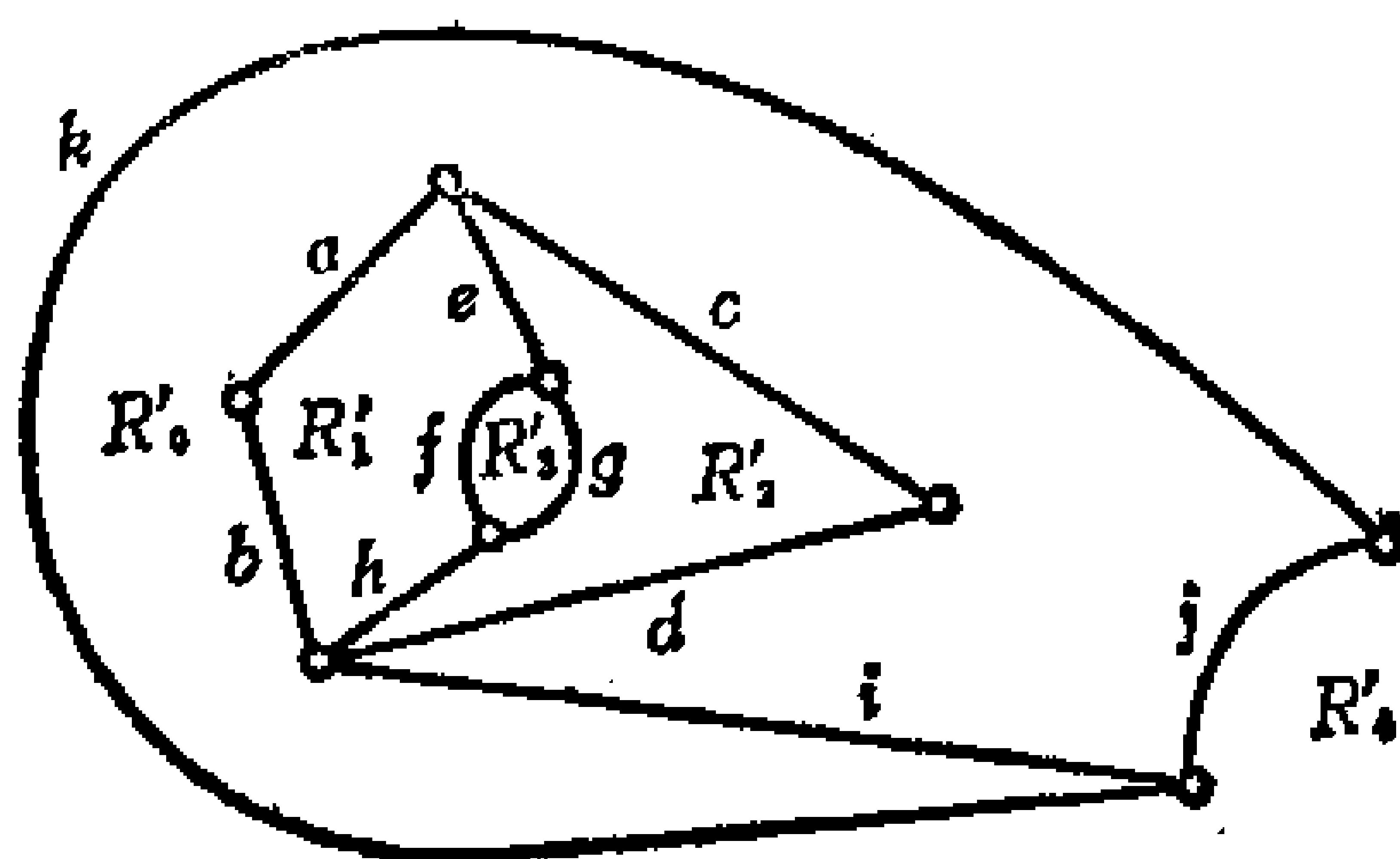


图4-2-6　平面图G和区域

平面图有一个值得注意的性质：把平面图G画在一个平面上，其中任何一个区域，通过用下面的方法重画G，可以变成外区域。我们可以先任意选取一个区域R，来说明这种方法。注意，假设我们已经给出了一个线图的一种特定图形。现在，我们

用前面讨论的方法，把这一图形画到球面上去，然后转动球面S，使其最高点N在区域R内，再把球面上的图形重新画到平面上。显然在所得的线图中，R是外区域。

定义4-2-2 设边e_1的端点是u_1和u_2，边e_2的端点是v_1和v_2。其中$u_1 \neq u_2$，$v_1 \neq v_2$。如果$u_2 = v_1$，并且没有其他的边以u_2作为顶点，则称e_1和e_2是串联的。如果e_1和e_2是串联的，则将e_1，e_2叫做串联边。

例如，在图4-2-7所示的线图中，边e_1和e_2是串联的，或者说e_1和e_2是串联边。

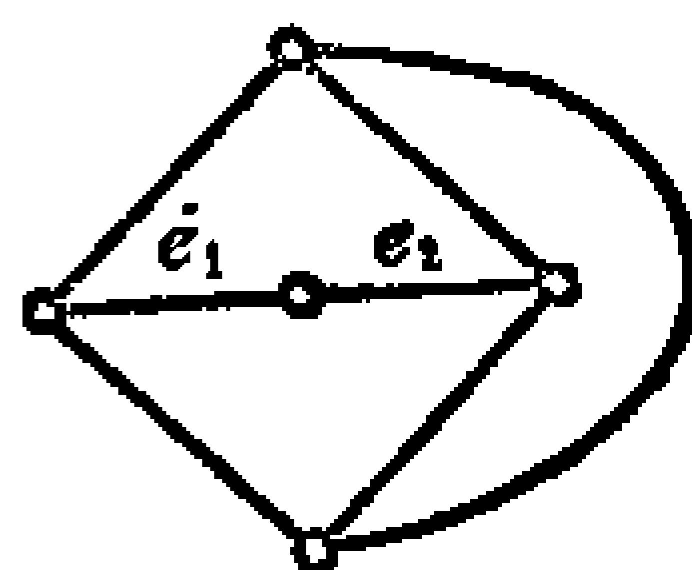
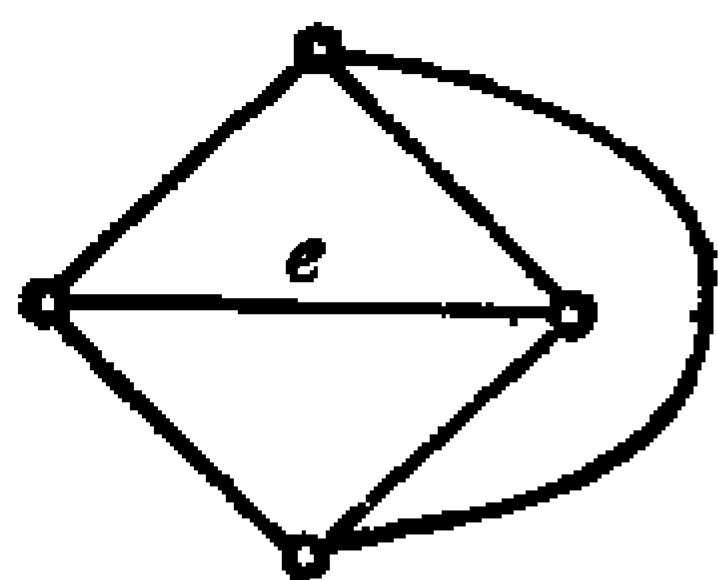
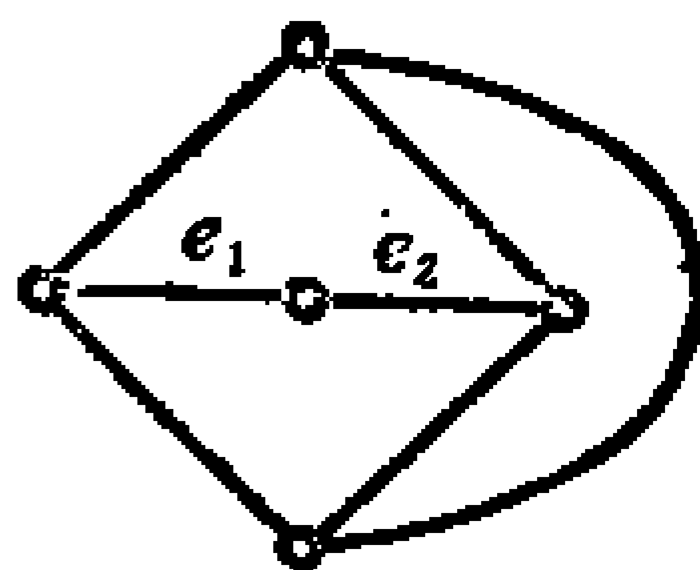


图4-2-7 串联边e_1和e_2

考虑图4-2-8中的两个线图G和G'。它们显然是不同的线图。但是，当我们用串联边e_1和e_2来替换G的边e时，所得的线图便与G'同构。我们说这样的两个线图是同胚的。



(a)G



(b)G'

图4-2-8
(a) 线图G；(b) 线图G'

定义4-2-3 两个线图G和G'是同胚的，当且仅当存在一个线图G''，使得G和G'通过用串联边代换的方法，都能变得与G''同构。

例如，图4-2-9中线图G_1和G_2是同胚的。

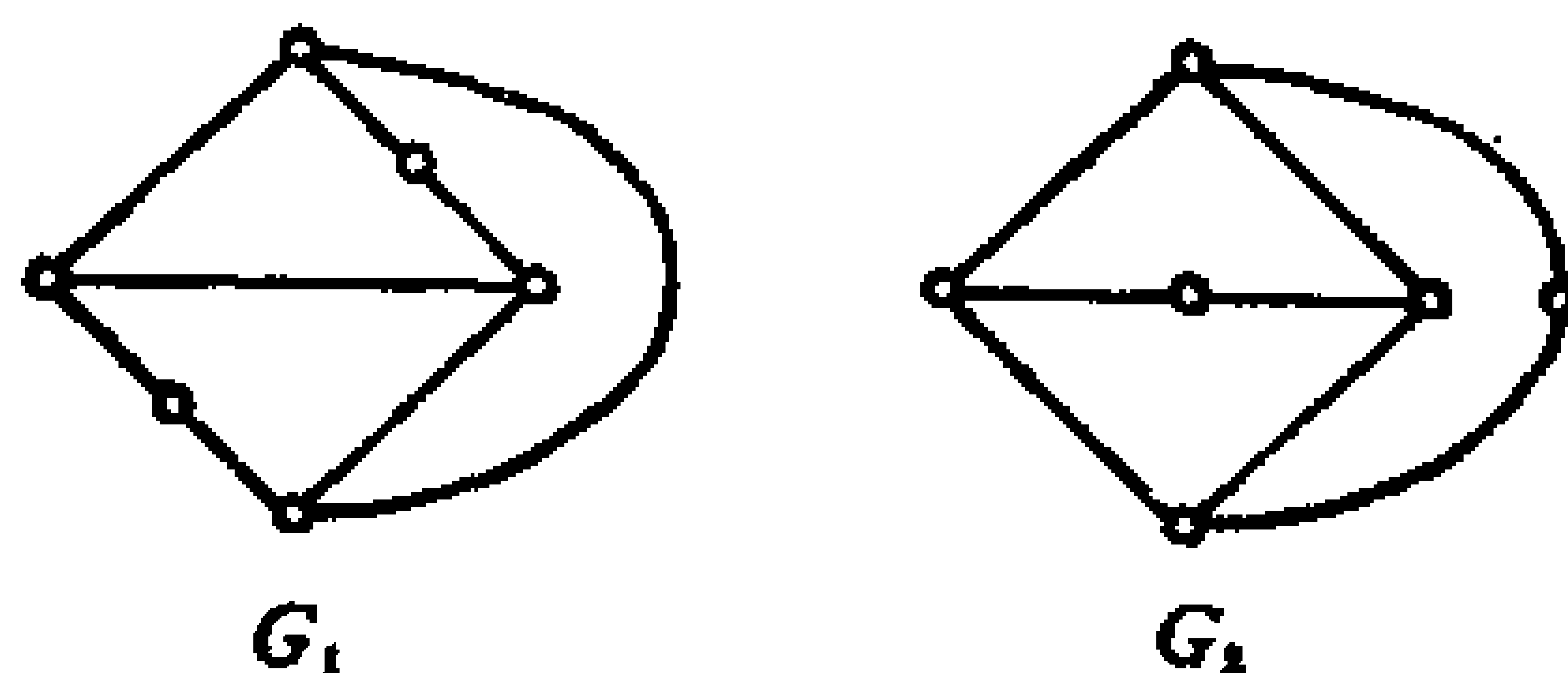


图4-2-9 同胚图

现在我们为研究一个重要的性质作好了准备，这个性质清楚地表明了平面图与非平面图的区别。

定理4-2-1(库拉托斯基) 一个有限线图不是平面的，当且仅当它包含与图4-2-10所示的两种基本非平面图中的任何一个同胚的子图。

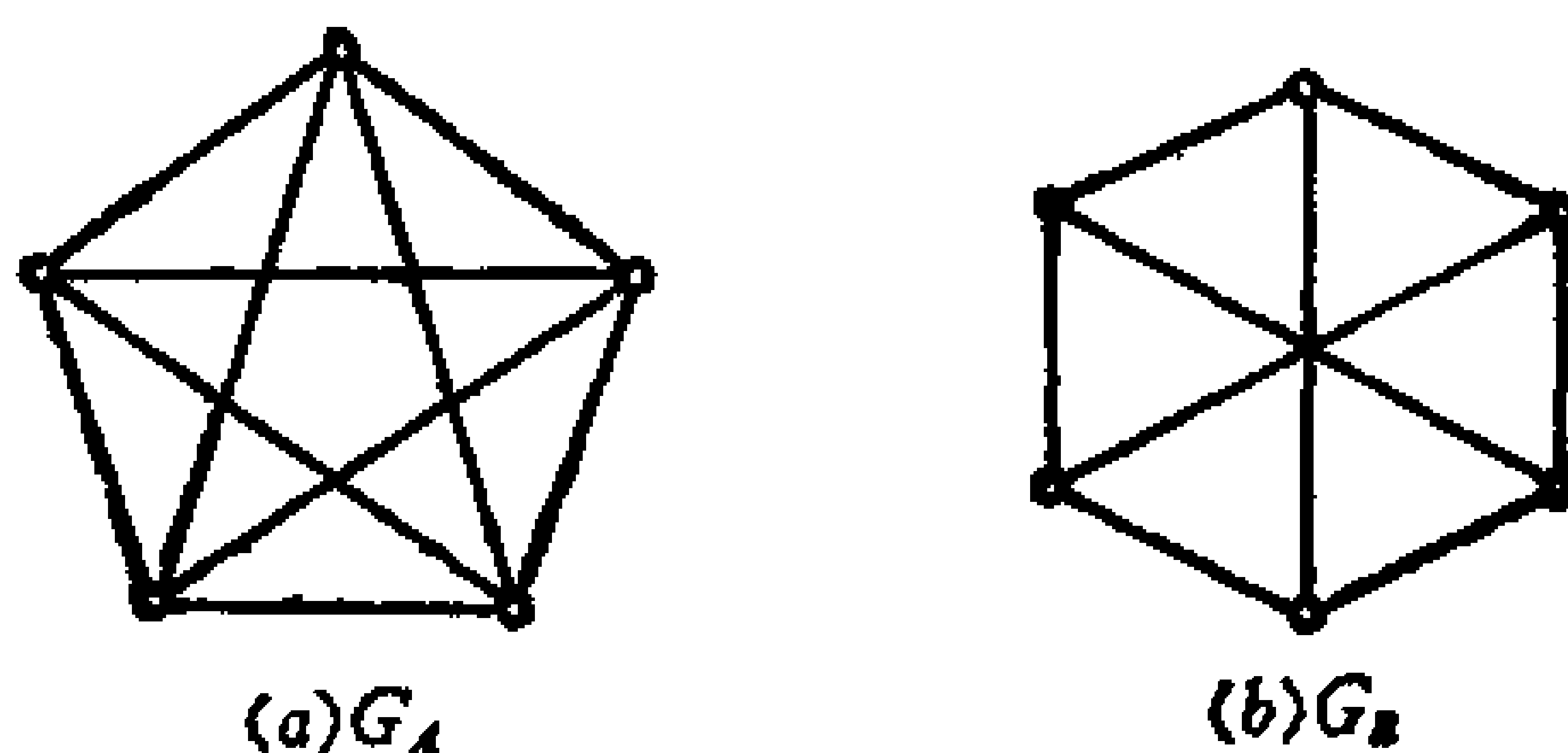


图4-2-10 基本非平面图G_A和G_B

注意，有限线图是包含有限条边的线图。

例4-2-1 图4-2-11(a)中的线图是非平面的。因为它包含一个图4-2-11(b)所示的子图，这个子图与基本非平面图G_B同胚。

证明： 根据定义，如果一个线图是平面的，则可将此线图画在一个平面上，其中没有相交的边。把这个平面图形的一些边移

去，就得到这个线图的一个子图在平面上的图形，其中也没有相交的边。因此，如果一个线图是平面的，则此线图的任一子图也是平面的。于是，一个平面线图不可能包含与基本非平面图同胚的子图。这就证明了定理的前一部分。

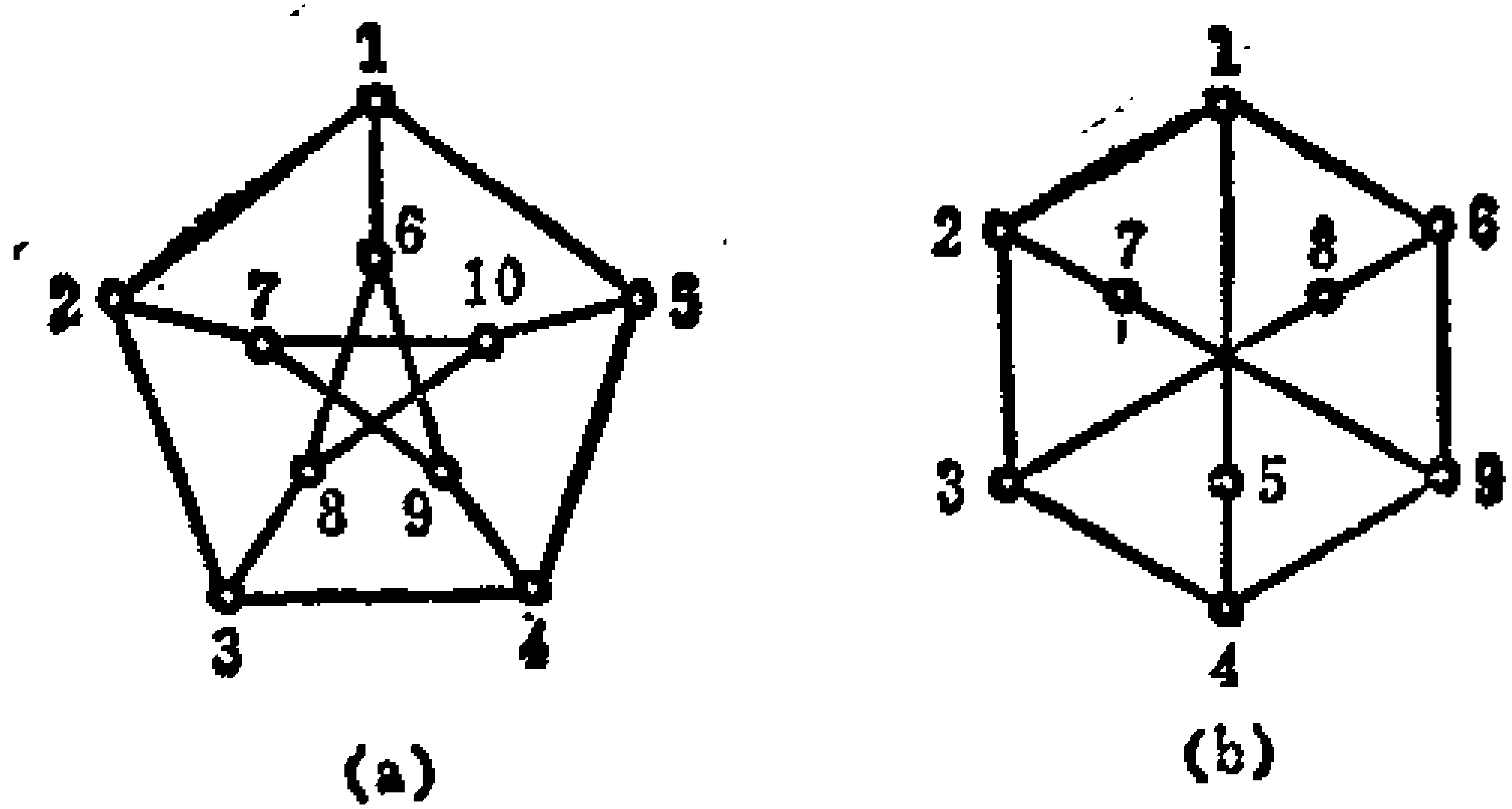


图4-2-11
(a) 非平面图G；(b) G的子图

下面证明，一个非平面图 G' 一定要包含与两个基本非平面图之一同胚的子图。考虑非平面图G'的这样一个不可分子图G''，它也是非平面图，但从 G'' 中删除任一条边，都能使它成为平面的。容易看出，这样的子图在任何一个非平面图中总可以找到。现在，我们取一个线图G，它与G''同胚，并且其中没有串联边。显然，如果在G中包含一个与基本非平面图之一同胚的子图，那么G'' 和 G'一定也包含和这个基本非平面图同胚的子图.因此，我们在证明定理 4-2-1 的第二部分时，只需要考虑一个不可分线图G即可。

考虑线图 $G(\bar{e})$，它是由G删除边 e 得到的一个子图． 因为$G(\bar{e})$是平面的，所以$G(\bar{e})$可画在一个平面上，其中没有交叉边．设边 e 的端点是 u 和 v 。在这个平面图形中，存在包含顶点 u，

v 的最大回路C，使得其他任何包含 u，v 的回路都在C的内部．回路C把$G(\bar{e})$分成G_0和G_i两部分，其中 G_0 由所有画在C外边的边组成，G_i由所有画在C内部的边组成，如图4-2-12所示。因此$G(\bar{e})=G_0 \cup G_i \cup C$，其中$G_0$，$G_i$和$C$无重边。

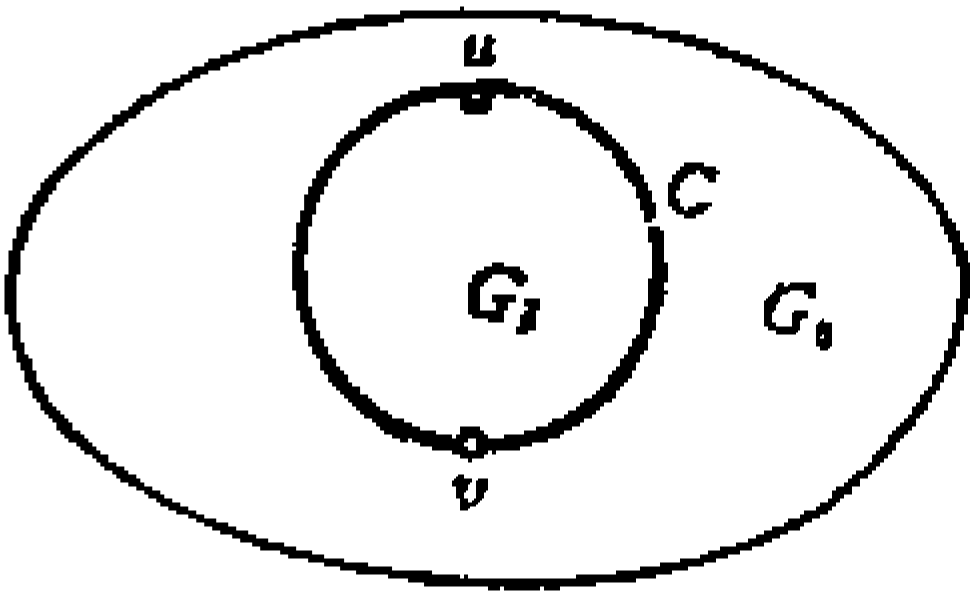


图4-2-12 回路C和子图G_0，G_i

假定我们从顶点 p 开始，按顺时针方向画回路C时，经过顶点的顺序为p，r_1，r_2，$\cdots$，r_k，q，r_{k+1}，$\cdots$，r_n，再回到 p．我们把这些顶点分成三部分，一部分由顶点r_1，r_2，$\cdots$，r_k组成，另一部分由r_{k+1}，$\cdots$，r_n 组成，第三部分为顶点 p 和 q．为了方便，用记号$[p,q]$来表示第一部分顶点的集合，即$[p,q]=(r_1,r_2,\cdots,r_k)$．类似地，$[q,p]=(r_{k+1},\cdots,r_n)$．注意，$(p,q)$ 表示由 p 和 q 这两个顶点组成的集合．采用这些记号后，C 中所有的顶点可以表示为$[p,q]\cup[q,p]\cup(p,q)$，并且，在集合$[p,q]$，$[q,p]$和(p,q)中，任意两个集合无公共顶点．

由于G是非平面图，所以在图 4-2-12 所示$G(\bar{e})$ 的平面图形中，我们不可能在C的外部再加一条以 u，v 为端点的边 e，而不与其他边相交．因此，在G_0中必然有一条由$[v，u]$中顶点 a 到$[u，v]$中顶点 b 的路径P_0．同样，在 G_i 中必然有一条由$[v，u]$中顶点 c 到$[u，v]$中顶点d 的路径 P_i，如图 4-2-13 所示．根据顶点 c 和 d 的不同位置，可能出现以下几种情形．

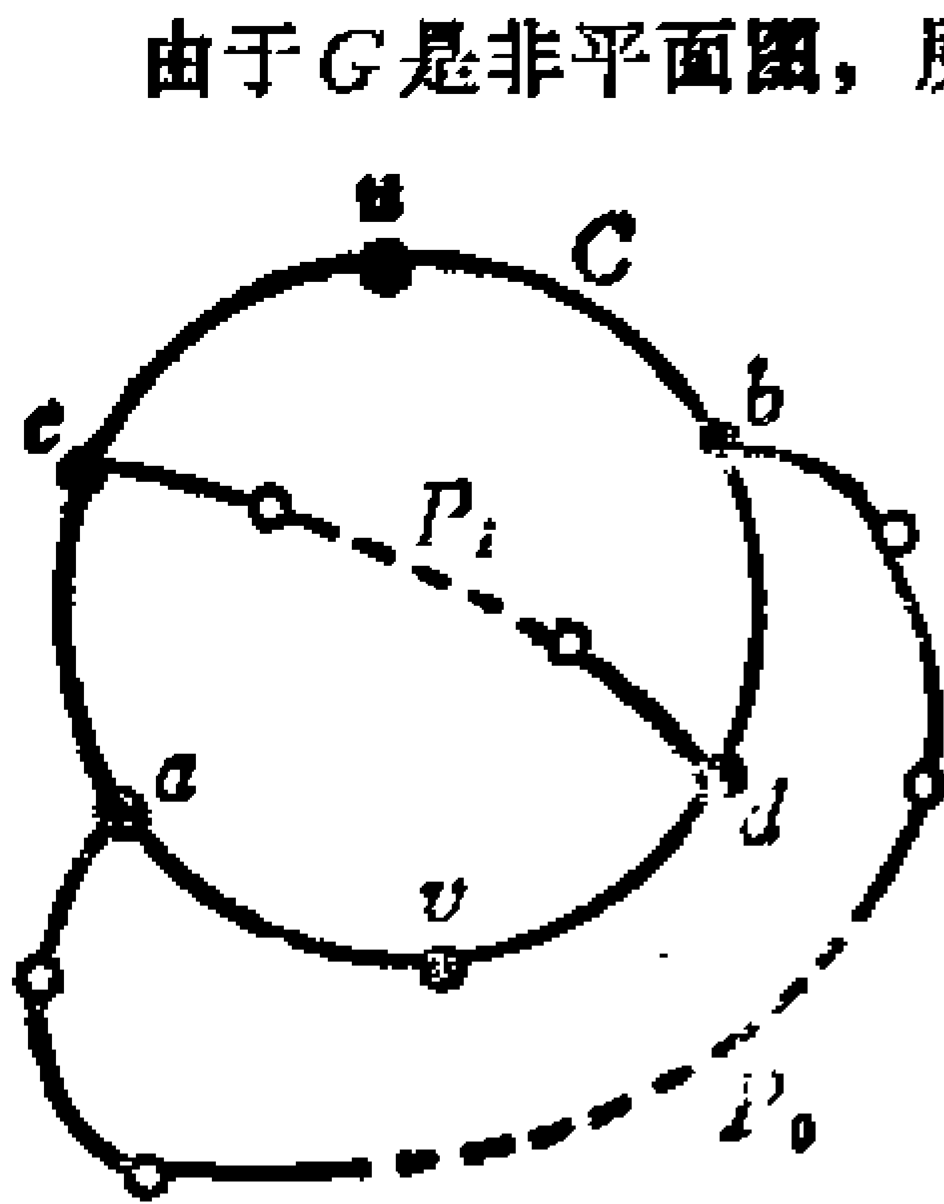


图4-2-13 路径P_0和P_i

情形 1 假定$c\in[a,u]$，$d\in[b,$

v]，如图4-2-13所示，显然由C，P_0，P_i和边e组成的子图与基本非平面图G_2同胚。当$c\in[v, a]$，$d\in[u, b]$时，这个结论也成立。

情形 2　假定$c\in[a,u]$，$d\in[u, b]$，如图4-2-14所示。为了防止出现$G(\bar{e})$的一种新的画法，其中P_i和P_0都在C的外部而无相交的边，必然有如图 4-2-15(a) 所示的一条路径P_1。注意，P_1是从[b, a]中的一个顶点e，到P_i中异于c，d的顶点f的路径。当然我们也可以添加图 4-2-15(b) 所示的路径P_1，来得到同样的结果，但所得的图中有一个回路C'，它包含顶点u，v，并且在回路C的外部，这与每一个包含顶点u，v的回路都在回路C内部的假设矛盾。因此，在这种情形下，只需要考虑图4-2-15(a)所示的结构。

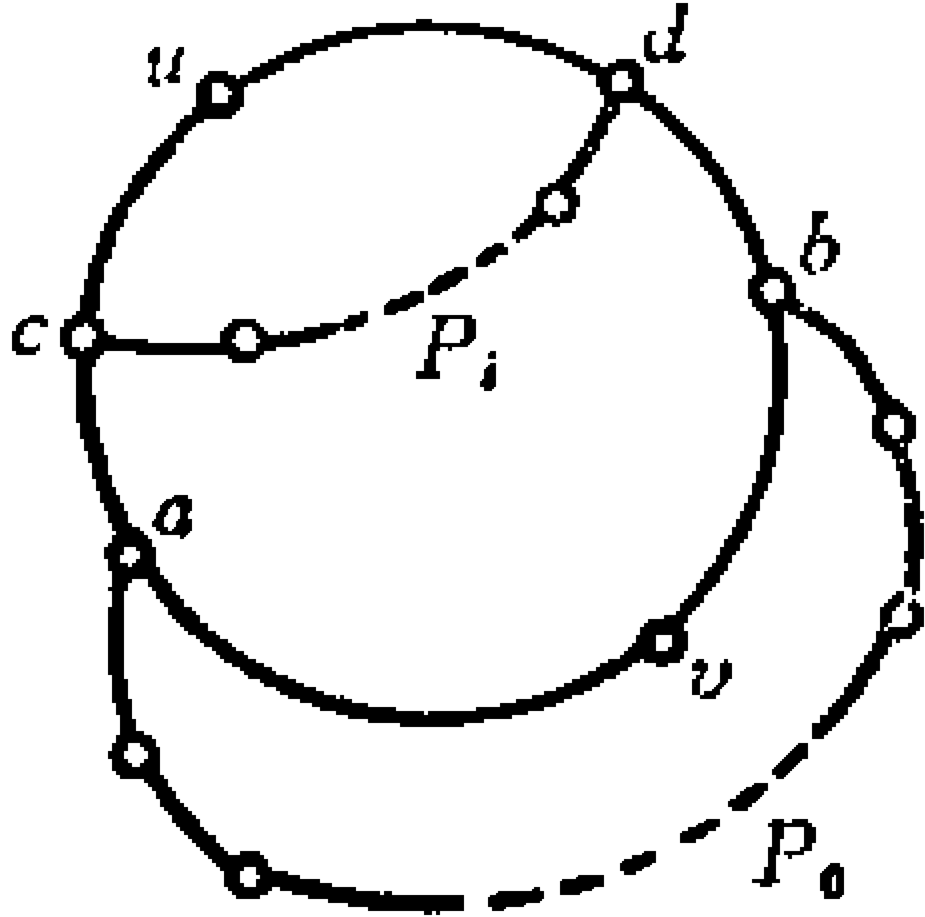


图4-2-14　情形 2 中的$G(\bar{e})$

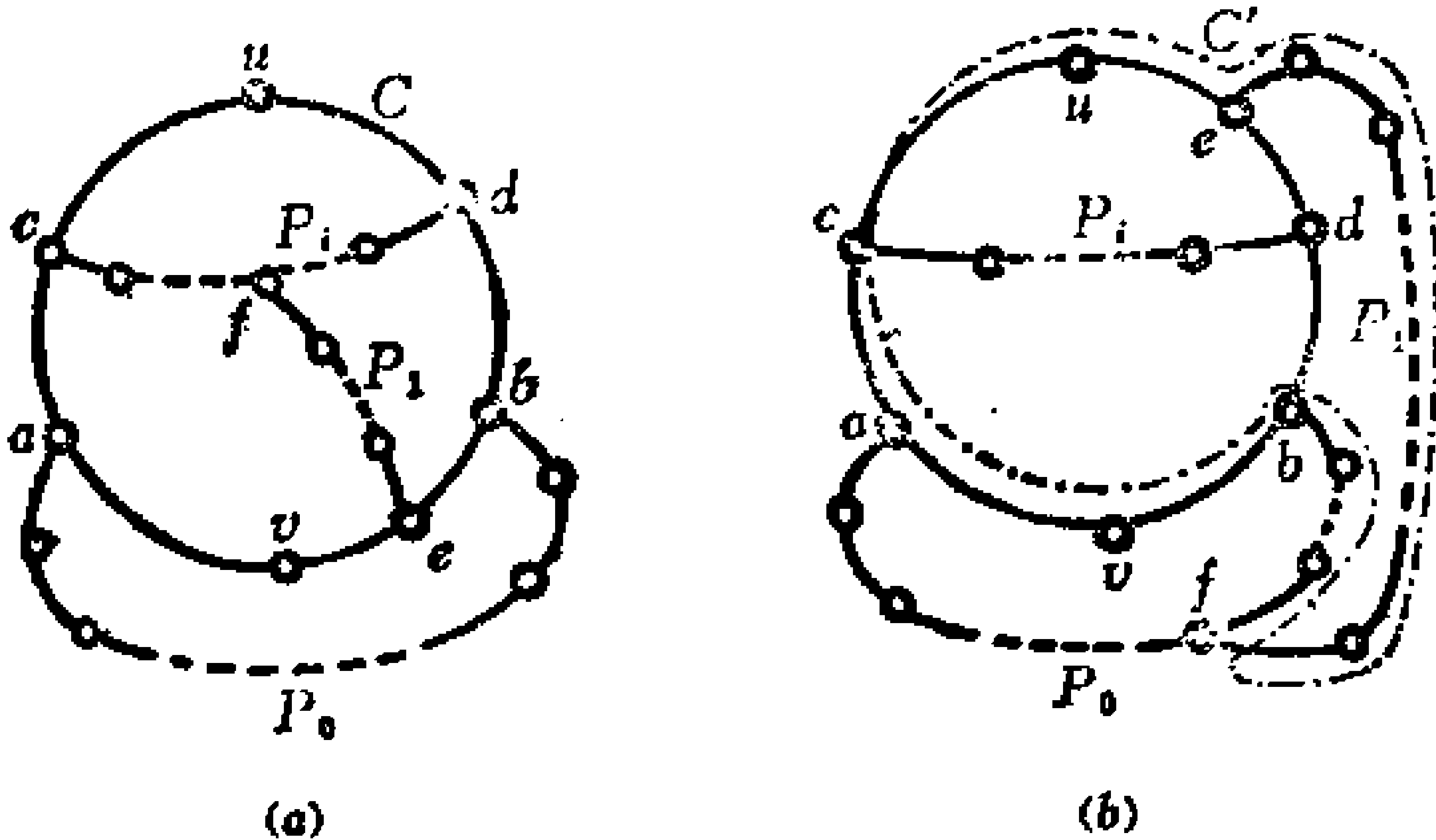


图4-2-15　P_1的位置
(a) 路径P_1；(b) 回路C'

图4-2-15(a)所示的线图加上边e，包含一个如图 4-2-16 所

示的子图，它与G_B是同胚的。对$e=v$和（或）$c=a$，这一结论也成立。由于对称性，当$c\in[v,a]$，$d\in[b,v]$时，也得到相同的结论。注意，我们已经包括了$c=a$或者$b=d$的情形。而如果既有$c=a$，又有$b=d$，则是下一种情形。

情形3　为了完成证明，需要考虑的最后一种情形是$c=a$，$b=d$。在这种情形下，如图4-2-17所示，如果没有另一条路径P_2，则图4-2-15(a)中的线图可以重画，使得P_i（以及P_0）在C的外部。因此路径P_2必然存在。

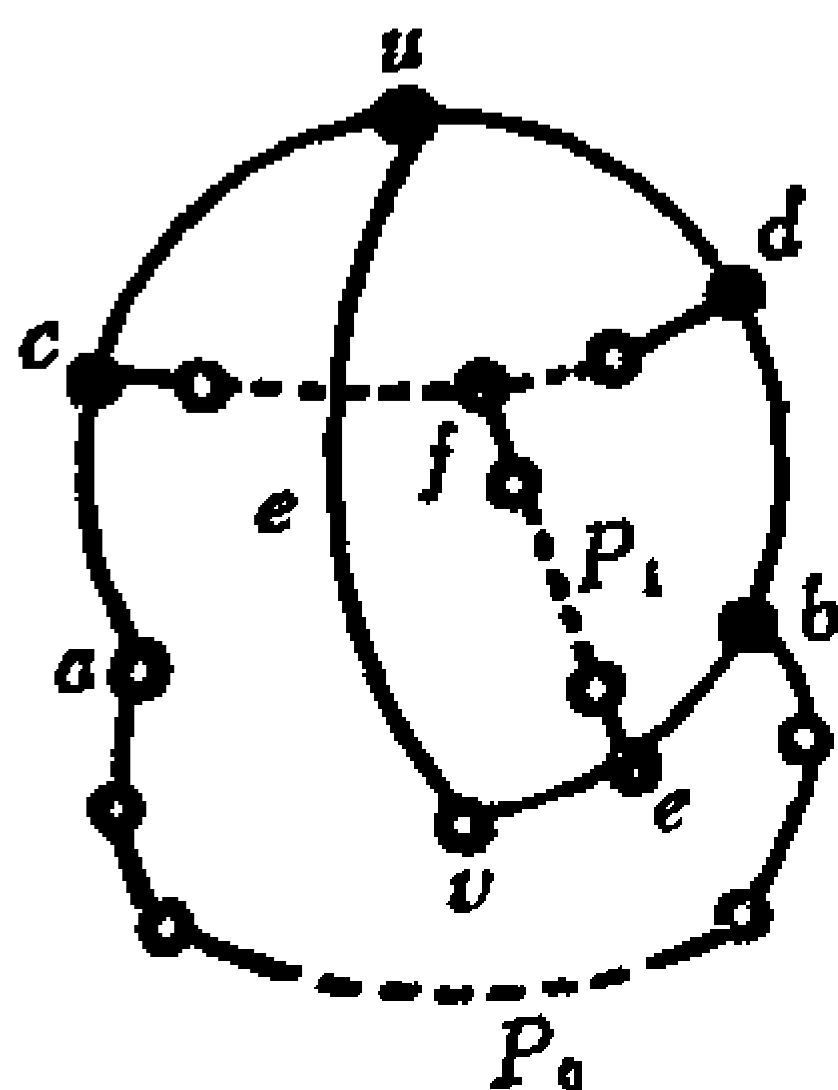


图4-2-16　非平面子图

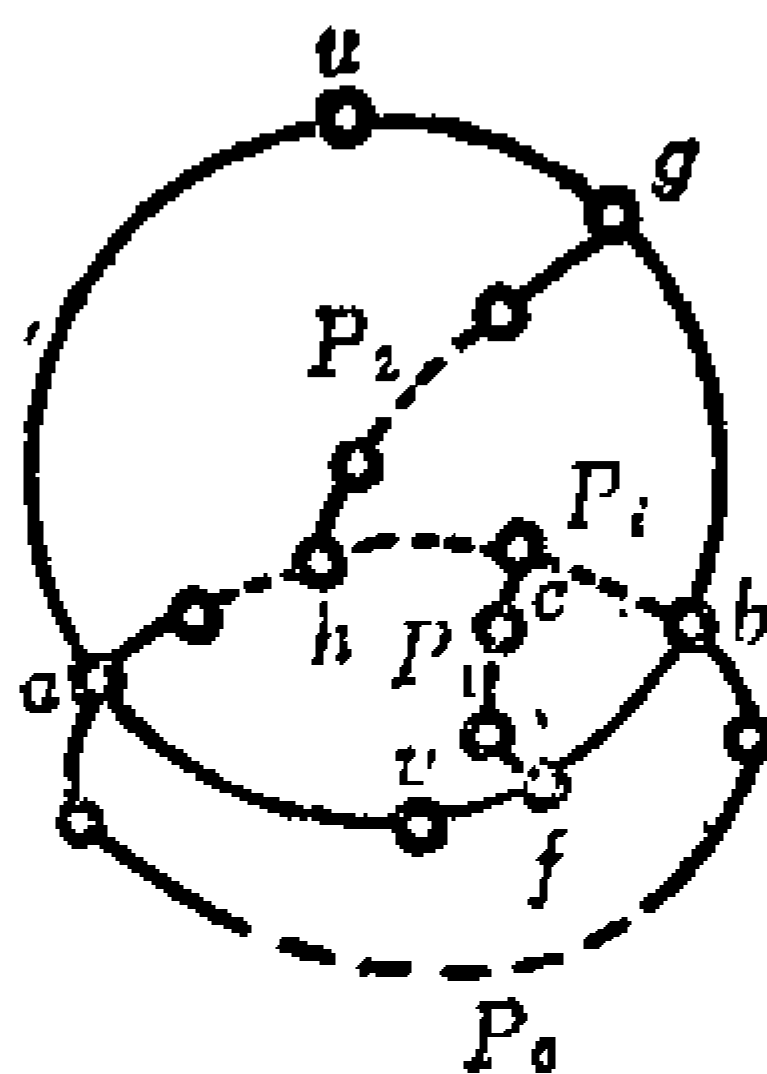


图4-2-17　P_2的位置

在这个线图中加上边e，根据P_2的不同位置，图4-2-18所示的四个线图之一将成为其子图。也就是说，当$g\in[u,b]$（这里f可以等于v，e可以等于h）时，以(a)中的线图为其子图；当$g\in[a,u]$（这里e可以等于h，f可以等于v）时，以(b)中的线图为其子图；当$g=u$，而$h\neq e$时，以(c)中的线图为其子图；当$g=u$，$h=e$时，以(d)中的线图为其子图。前三个线图G_1，G_2，G_3都同胚于G_B，后一个线图G_4与G_A同胚。这就完成了定理4-2-1的证明。　　　　（证毕）

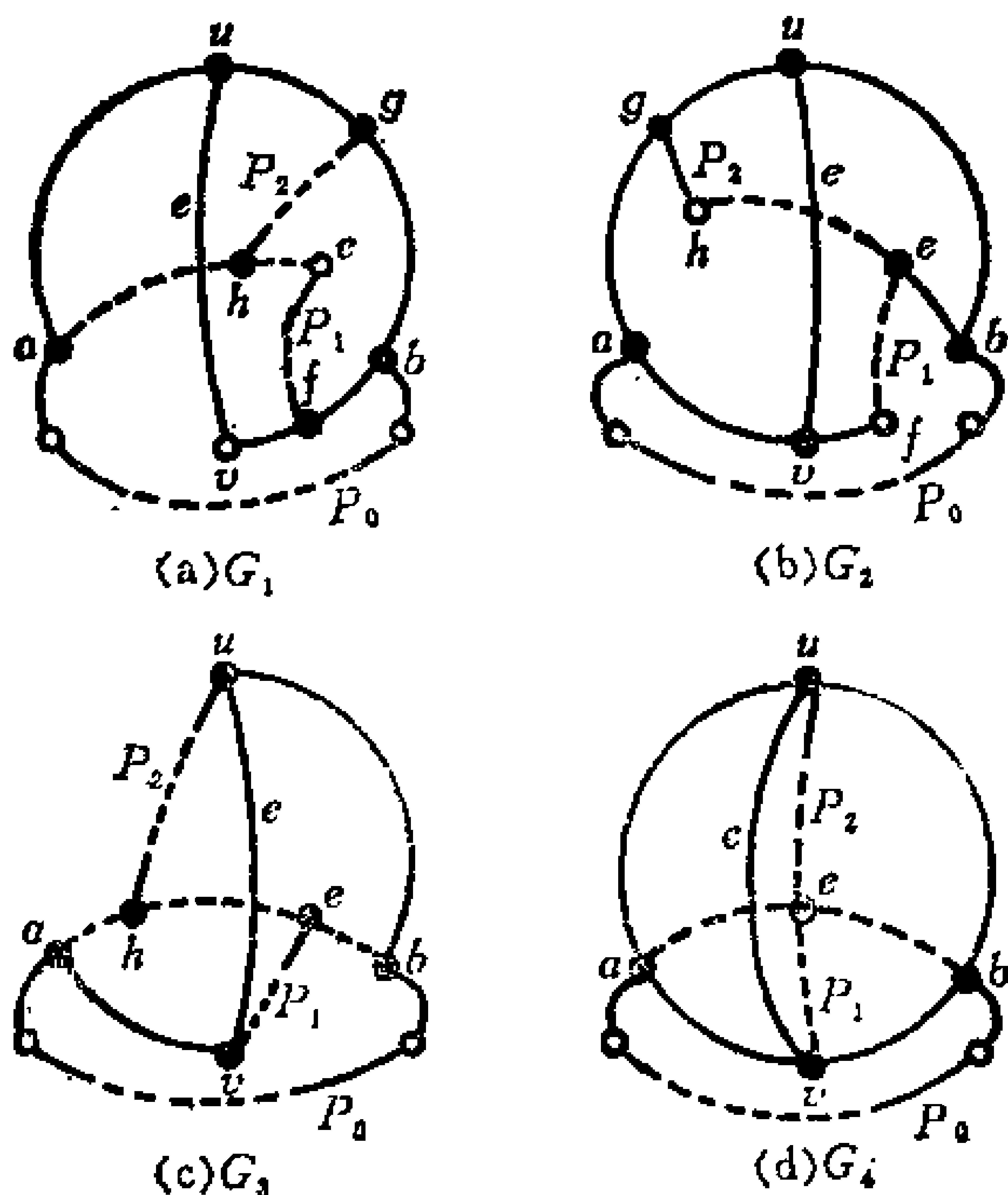


图4-2-18　非平面图G_1, G_2, G_3, G_4

4-3 对 偶 性

用 4-2 节所讨论的库拉托斯基定理来检验一个线图是否平面图，是相当困难的，因为它需要考察 5 阶以上的全部子图。而惠特尼给出对偶性性质，保证了当一个给定的线图是平面时，另一个线图也存在。因此，对于某些应用问题来说，用惠特尼定理来判断平面图可能比较容易。为了学习惠特尼的对偶性定理，我们定义线图的零度如下。

定义4-3-1 线图G的零度N是

$$N=n_e-n_v+\rho \tag{4-3-1}$$

这里n_e是G的边数，n_v是顶点数，ρ是最大连通子图的数目。

根据定义2-2-1，一个线图的秩R是

$$R=n_v-\rho \tag{4-3-2}$$

因此零度N可表示为

$$N=n_e-R \tag{4-3-3}$$

由此等式可以看出，一个线图G的零度和秩的和等于G的边数。

$$N+R=n_e \tag{4-3-4}$$

例如，图 4-2-11(a) 所示线图G由15条边和10个顶点组成，并且是连通的，因此G的零度是 6 . 注意，由定理 3-3-5，一个线图中线性无关的回路个数也是$n_e-n_v+\rho$，它等于该线图回路矩阵的秩。因此，一个线图的零度就是此线图回路矩阵的秩。

在对偶图的讨论中，我们必须把自环算作线图中的边。

约定 在这一节中，线图可以有自环。

考虑两个线图G_1和G_2，前者由边 e_1，e_2，$\cdots$，e_{n_e}组成，后者由e'_1，e'_2，$\cdots$，e'_{n_e}组成。对$p=1, 2, \cdots, n_e$，我们选取G_2中

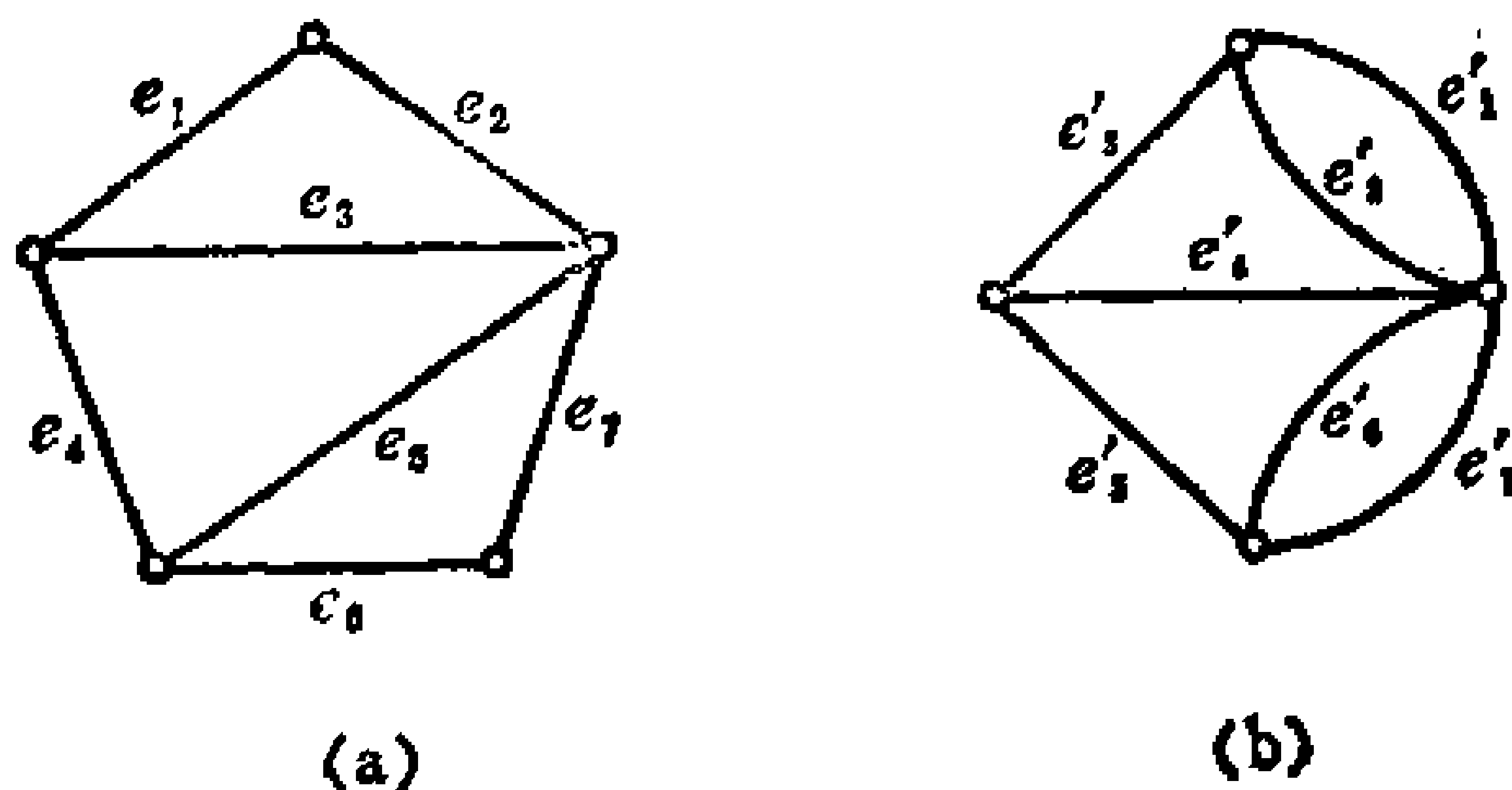


图4-3-1

(a) 线图G_1；(b) 线图G_2

的边e'_p作为与G_1中的边e_p对应的边，于是便得到G_1的边和G_2的边之间的一个1∶1对应。设g_1是G_1的由边e_{i_1}，e_{i_2}，$\cdots$，e_{i_k}构成的子图，g_2是G_2的由边e'_{i_1}，e'_{i_2}，$\cdots$，e'_{i_k}构成的子图，则称g_2为g_1的对应子图。另外，为了方便，用符号$\bar{g}$代表一个线图G的子图g的补图。也就是说，$\bar{g}$由G中除g的边外所有的边和不在g中的孤立点组成。

例4-3-1 考虑图4-3-1(a)和(b)中的两个线图G_1和G_2。假定对$p=1, 2, \cdots, 7$，G_1的边e_p对应于G_2的边e'_p。又假定我们选取G_1的子图g_1，它是由e_1，e_2，e_3和e_5组成的，如图4-3-2(a)所示。则G_2中与g_1对应的子图g_2如图4-3-2(b)所示。用这些子图，我们可以定义线图的对偶性如下。

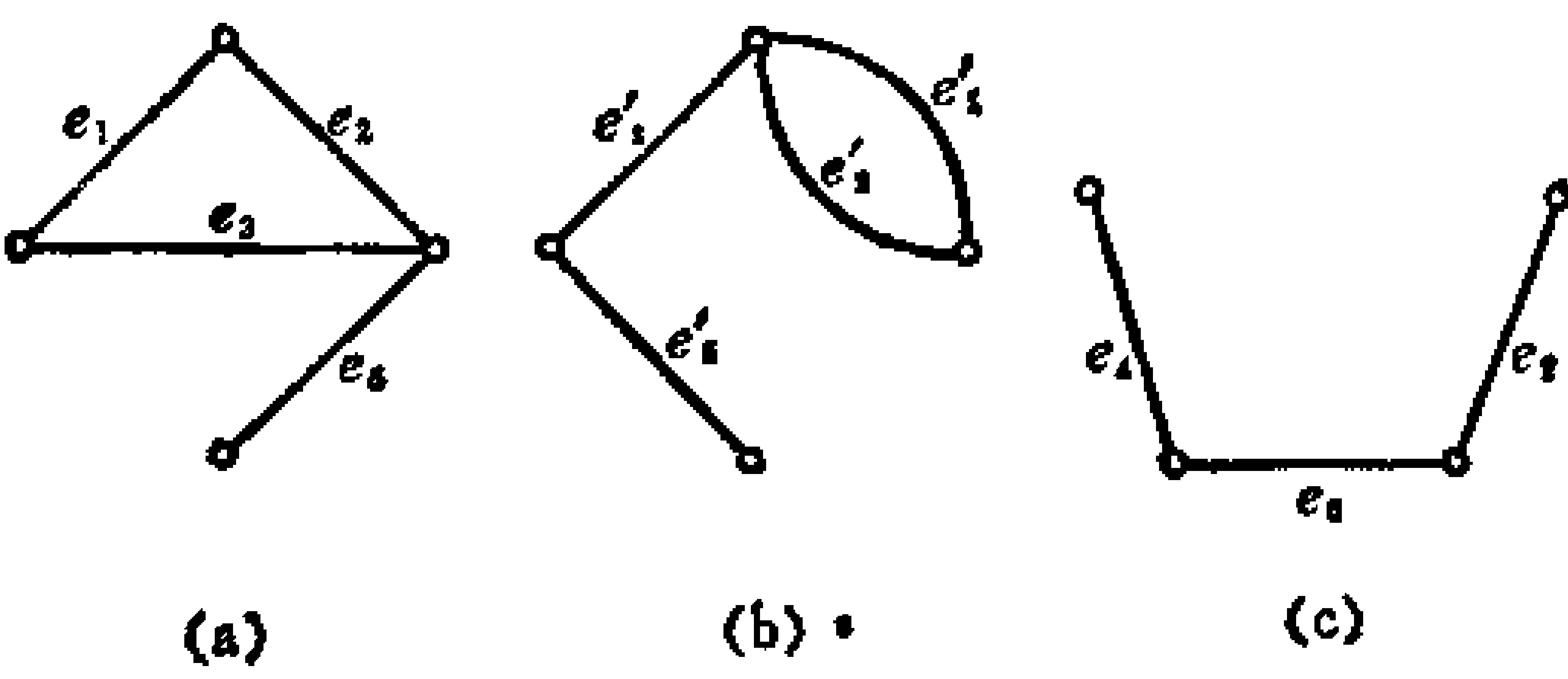


图4-3-2

(a) G_1的子图g_1；(b) G_2的子图g_2；(c) 补图$\bar{g}_1$

定义4-3-2 一个线图G_2称为线图G_1的对偶，如果存在G_1和G_2的边之间的1∶1对应，使得对G_1的每一个子图g_1

$$n_1 = R_2 - \bar{r}_2 \tag{4-3-5}$$

其中n_1是g_1的零度，R_2是G_2的秩，$\bar{r}_2$是$\bar{g}_2$的秩，g_2是G_2中对应于g_1的子图，而$\bar{g}_2$是g_2的补图。

根据这个定义，如果$g_2=G_2$，则$\bar{g}_2$是G_2的一个不含任何边的子图，因此，$\bar{r}_2$是零，并且$g_1=G_1$，这就意味着$n_1=N_1$(G_1的零

度）。于是，如果G_2是G_1的对偶，则据式(4-3-5)，我们有

$$N_1 = R_2 \tag{4-3-6}$$

因为G_1和G_2的边数都是n_e，这里G_2是G_1的对偶，故式(4-3-6)可以写作

$$n_e - N_1 = n_e - R_2 \tag{4-3-7}$$

由式（4-3-3），这个等式变成

$$R_1 = N_2 \tag{4-3-8}$$

这样，由式(4-3-6)和(4-3-8)可以看出，如果G_1和G_2是对偶的，则$N_1 = R_2$，$R_1 = N_2$。

设G_1的边数是n_{e_1}，g_1是G_1的子图，它由n_{e_1}条边组成。又设

$$n_{e_2} = n_e - n_{e_1} \tag{4-3-9}$$

或

$$n_{e_1} + n_{e_2} = n_e \tag{4-3-10}$$

当G_2是G_1的对偶时，设g_2是G_2中与g_1对应的子图g_2的补图，则g_2的边数是n_{e_2}。于是式(4-3-5)变成

$$\bar{n}_1 = R_2 - r_2 \tag{4-3-11}$$

其中$\bar{n}_1$是g_1的零度，r_2是g_2的秩。此式可以改写成

$$n_e - \bar{n}_1 = n_e - R_2 + r_2 \tag{4-3-12}$$

或由式(4-3-3)和(4-3-10)，

$$n_{e_2} + n_{e_1} - \bar{n}_1 = N_2 + r_2 \tag{4-3-13}$$

把n_{e_2}移到等式右边，我们有

$$\bar{r}_1 = N_2 - (n_{e_2} - r_2) \tag{4-3-14}$$

或

$$\bar{r}_1 = N_2 - n_2 \tag{4-3-15}$$

由式（4-3-8），以上等式变成

$$n_2 = R_1 - \bar{r}_1 \tag{4-3-16}$$

这说明，如果G_2是G_1的对偶，那么G_1是G_2的对偶。

对于一个平面图G_1，如果已知平面图G_2是G_1的对偶，我

们介绍一种构造G_2的方法。

定义4-3-3 设有n_e条边的线图G_1是一个平面图，它已被画在一个平面上且没有边相交。我们通过以下过程由G_1画出一个线图G_2：在G_1的每一个区域中画一个顶点，并画出n_e条边，使得其中每一条边刚好和G_1中的一条边相交。这种由G_1画出G_2的过程称为D过程.所得到的线图G_2叫做从G_1经D过程得到的线图.

例如，我们可以由图4-3-3中的G_1来构造线图G_2.首先，在每个区域中分别画一个顶点1，2，3，4，然后画出与边a相交的边a'，与边b相交的边b'，等等，如图4-3-4所示。

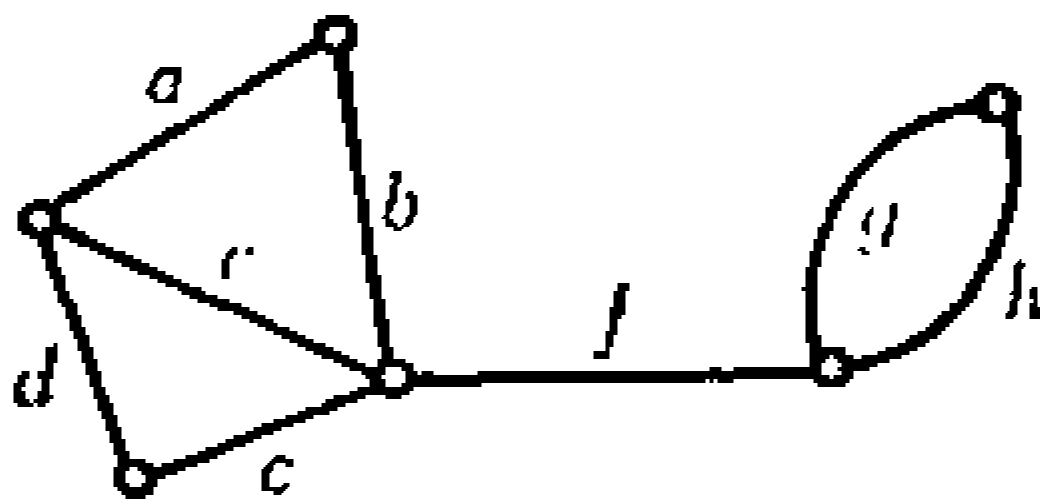


图4-3-3 一个平面图

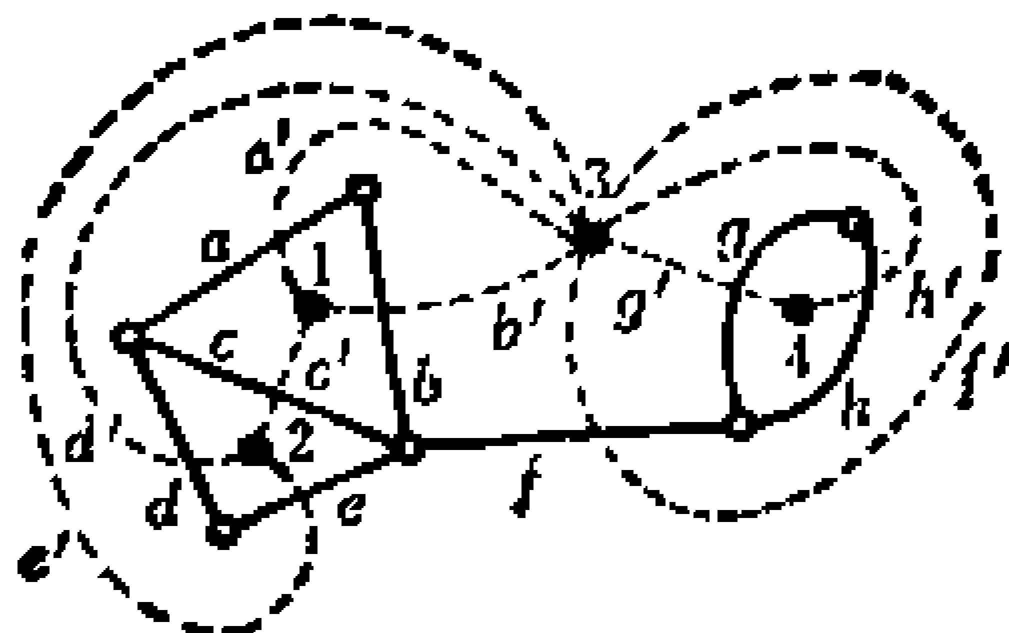


图4-3-4 D过程

现在，我们要来说明，由一个平面图G_1经D过程得到的线图G_2是G_1的对偶。

可以看出，对于一个连通线图G_1，如果G_2是由G_1经D过程得到的，则G_1也可以由G_2经D过程得到。

为了说明从一个有限线图G，经D过程得到的线图G'是连通的，我们考虑G在平面Z上的一个图形。我们在任一区域R内放一个点v，而在另一个任意区域R'中放一个点v'。因为G的顶点数是有限的，故可以在Z上画一条从点v开始到点v'为止，且不经过G中任一顶点的线L。设e_1，e_2，$\cdots$，e_p是G中与线L相交的边，考虑G'中对应于e_1，e_2，$\cdots$，e_p的边e'_1，e'_2，$\cdots$，e'_p组成的线图g。显然点v和v'对应于g的顶点v和v'。因为L一个一个地穿过若干区域，我们可以将g从顶点v到顶点v'连续画出

来。我们这样画时，可能在一些边上会有重复，但显然在 g 的两个顶点 v 和v'之间存在一条路径。对于 G' 中任意选取的两个顶点，这个结论都成立，因此，由连通图的定义可知，G' 是连通的。

定理4-3-1 由一个线图经D过程得到的线图是连通的。

例4-3-2 如图4-3-5所示，在线图G中，我们把点v和v'分别放在区域R和R'内。然后我们画线L，使它不经过G的任一顶点。这条线L经过边e_1，e_2，e_3，e_4，e_5。在从G经D过程得到的线图G'(图4-3-6)中，与e_1，e_2，e_3，e_4，e_5对应的边是e'_1，e'_2，e'_3，e'_4，e'_5，它们构成图4-3-7所示的子图g'。这个子图g'可以从顶点v开始，按照e'_1，e'_2，e'_3，e'_2，e'_4，e'_5的顺序连续画注意在e'_2画了两次。容易看出，在序列$(e'_1e'_2e'_3e'_2e'_4e'_5)$中，存在一个序列$(e'_1e'_3e'_5)$，它是顶点$v$和$v'$之间的路径。

通过D过程，在一个线图的回路和另一个线图的割集之间建

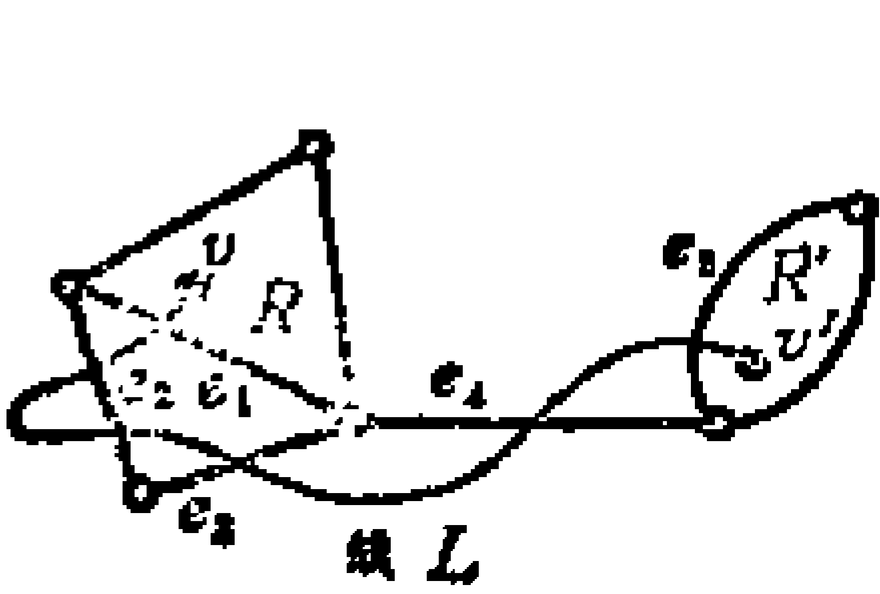


图4-3-5　线图G和线L

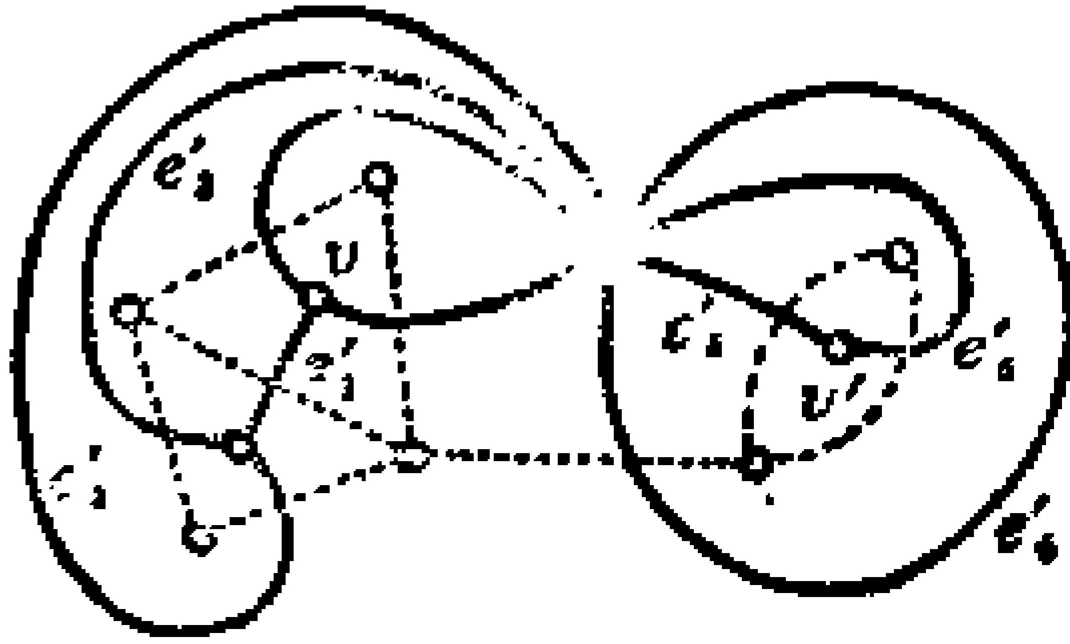


图4-3-6　线图G'

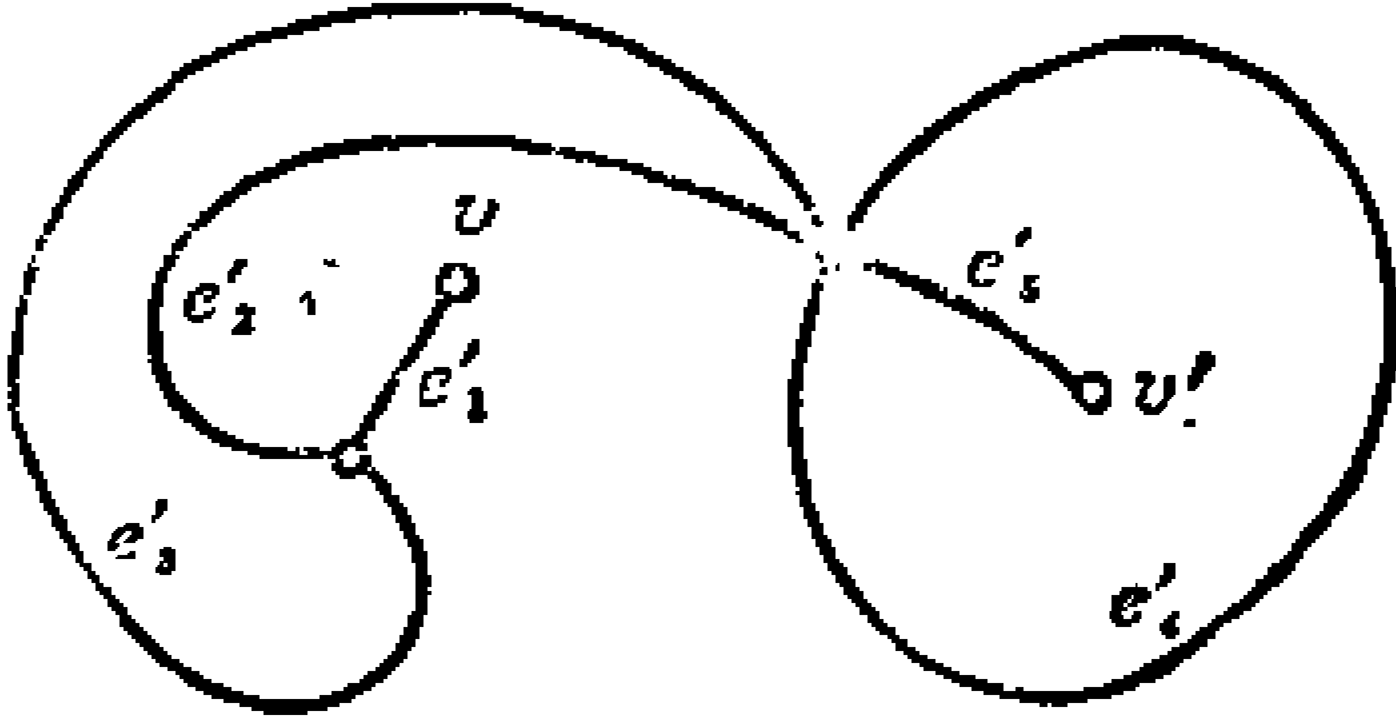


图4-3-7　子图g'

立了某种联系。

定理4-3-2 设$C=(e_1, e_2, \cdots, e_n)$是$G_1$的一个回路。设$G_2$是从$G_1$经$D$过程得到的线图，则边$e'_1, e'_2, \cdots, e'_n$构成$G_2$的的一个割集，这里$e'_p$是$e_p$的对应边，$p=1, 2, \cdots, n$。

证明： 首先要注意，当我们说G_2是从G_1经D过程得到的时，总是假设G_1(和G_2)画在一个平面上且没有两条边相交。因此区域是确定的。

设$W_1, W_2, \cdots, W_p$是G_1的在回路C内部的区域。设$v_1, v_2, \cdots, v_p$是G_2的在区域$W_1, W_2, \cdots, W_p$内的顶点。又设$\Omega_1=(v_1, v_2, \cdots, v_p)$，$\bar{\Omega}_1=\Omega-\Omega_1$，这里$\Omega$是$G_2$的所有顶点的集合，则$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$是边$e'_1, e'_2, \cdots, e'_n$的集合，这些边与$C$中的边对应。我们知道，$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$或为割集，或为割集的无重边并。如果$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$不是割集，则子图$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)$或子图$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_1)$必然是分离的（见2-2节和2-3节）。

考虑G_1的一个子图g_1，它由回路C中的边$e_1, e_2, \cdots, e_n$和位于C内部的所有边组成，如图4-3-8(a)所示。注意，G_2中对应于$g_1-(e_1, e_2, \cdots, e_n)$的边构成$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)$，如图4-3-8(b)

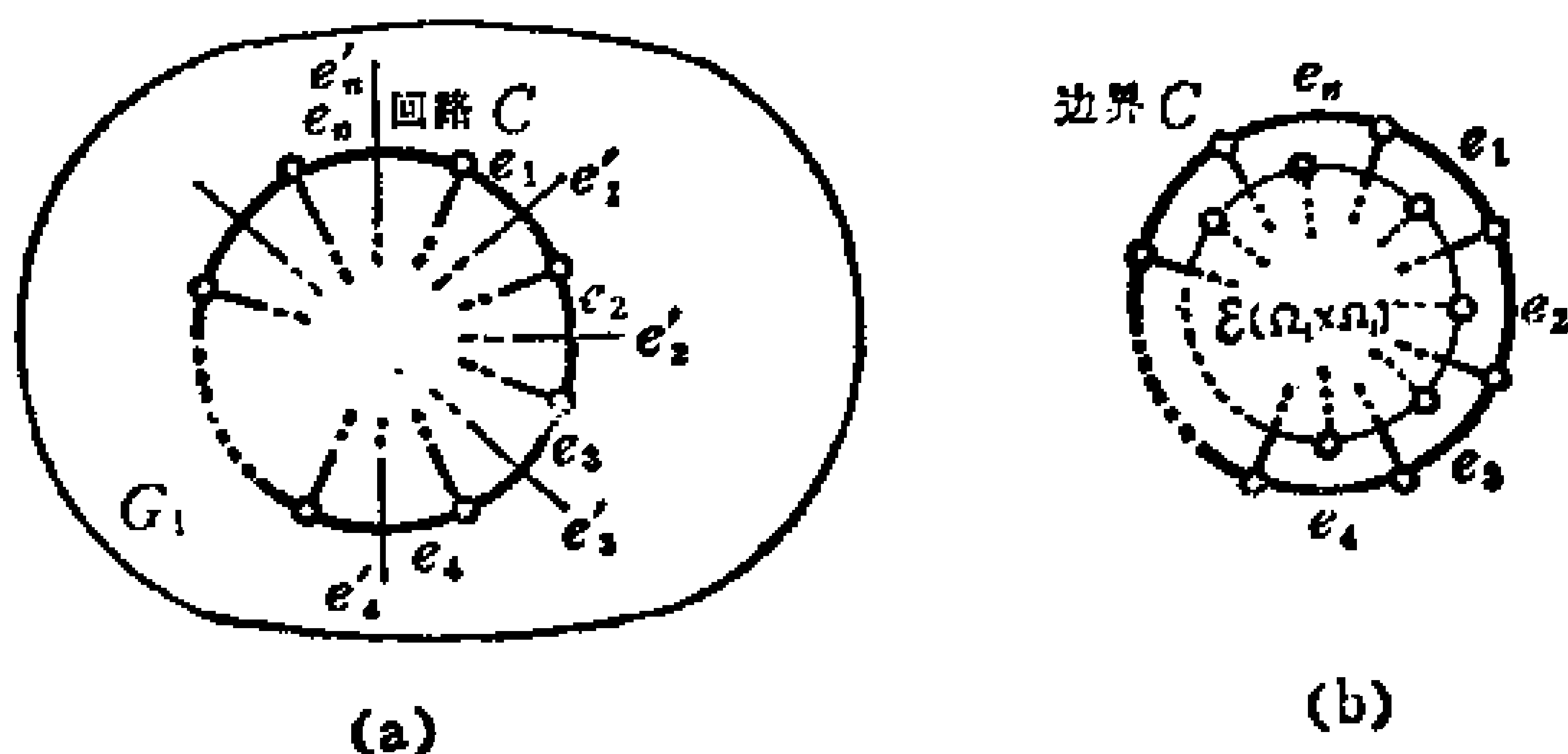


图4-3-8 回路C和割集$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$

(a) 线图G_1和G_2，(b) g_1和$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)$

所示。设g_t是在g_1中短路C的所有边e_1，e_2，$\cdots$，e_n得到的线图。我们可以把g_1的边界（即回路C）看作一个顶点，想象出g_t。可以看出，$\mathscr{G}(\Omega_1\times\Omega_1)$也是从$g_t$经$D$过程得到的线图。因此，由定理4-3-1，$\mathscr{G}(\Omega_1\times\Omega_1)$是连通的。同样，线图$\mathscr{G}(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_1)$也是连通的。因此$\mathscr{G}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$是一个割集。（证毕）

定理4-3-3 设$S=(e_1, e_2, \cdots, e_n)$是$G_1$的一个割集。又设$G_2$是从$G_1$经$D$过程得到的线图，则$G_2$中与$S$的边$e_1$，$e_2$，$\cdots$，$e_n$对应的边$e'_1$，$e'_2$，$\cdots$，$e'_n$构成一个回路。

证明： 若G_1是连通的，则结论是显然的。假设G_1是分离的，则如图4-3-9(a)和(b)所示，我们可以看出，在由G_1经D过程得到G_2以后，再由G_2经D过程得到的G'_1有一些割点，适当地切开这些割点，G'_1就变成了G_1。在这种情况下，G'_1的割集也就是G_1的割集。（证毕）

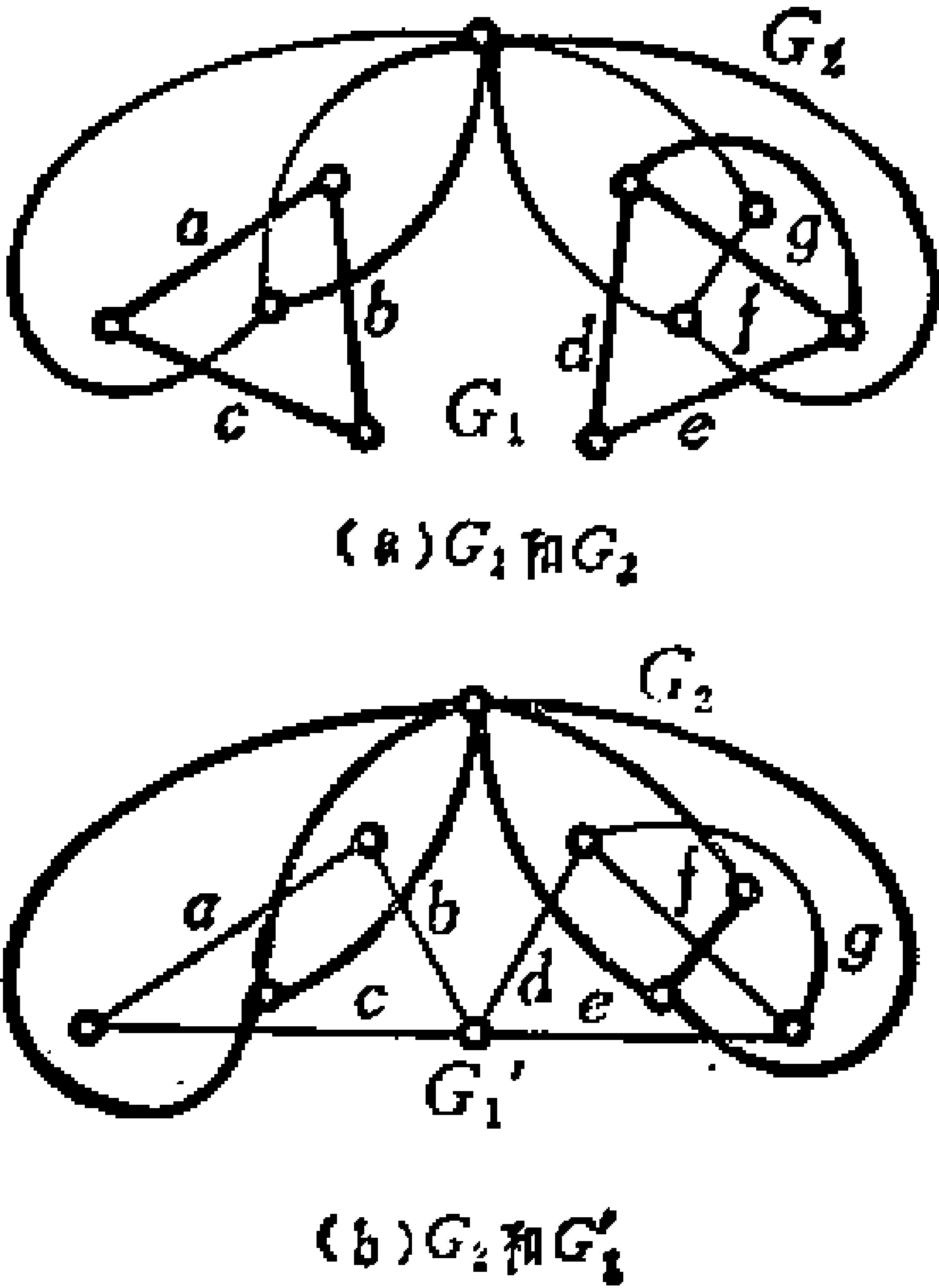


图4-3-9
(a) G_1和G_2；(b) G_2和G'_1

从上面两个定理，可以看出

$$R_1=N_2 \qquad (4\text{-}3\text{-}17)$$

其中R_1是G_1的秩，N_2是由G_1经D过程得到的线图G_2的零度。

定理4-3-4 从G_1经D过程得到的平面图G_2是G_1的对偶图。

证明： 假定我们短路G_1的一条边e，得到一个线图g'_1，那么，删除G_2中与边e对应的边e'，所得的图与从g'_1经D过程得到的图完全相同。一般地说，假定g_1是G_1的一个子图，g_2是G_2中的

对应子图。注意，G_1和G_2都已按照D过程的结果画在平面上了。如果我们短路g_1的所有边得到g'_1，则从G_2中删除g_2的所有边，所得图的零度恰与由g'_1经D过程得到的图相同。

设G_1的秩是R_1，g_1的秩是$\bar{r}_1$，则g'_1的秩等于$R_1-\bar{r}_1$。由式(4-3-17)，这个秩等于g_2的零度n_2（g_2是由G_2删除g_2的所有边得到的线图），即

$$n_2=R_1-\bar{r}_1 \tag{4-3-18}$$

此式对于G_1的任何子图g_1都成立。注意g_2是g_2的补图。因此由定义，G_1是G_2的对偶，而G_2是G_1的对偶。（证毕）

由定理4-3-4，我们知道，D过程给出一个对偶图。下一个重要的问题是：是否任何对偶图都可以由D过程得到。从定理4-3-1中，我们已经发现，由D过程得到的对偶图是连通的。因此，如果存在（一个线图的）对偶图，它是分离的，则此图不可能由D过程得到。我们知道，这样的线图是存在的。例如，如果我们选取一个分离线图G，并由D过程得到一个线图G'，则G和G'对偶。这样，G是G'的对偶图，而G是分离的。所以上一个问题的答案是否定的。因为存在这样的对偶图，它不可能由D过程得到。但是，我们将会发现，在一个线图G的由D过程得到的对偶图和G的其他任意对偶图之间有一种关系。不过，我们首先要讨论的是，当一个线图的某些边被短路时，对其零度的影响。

定理4-3-5 设C是线图中的一个回路，短路C中一部分边而不是全部边，将不改变线图的零度，而短路C的全部边恰使零度减少1。

因为本章允许有自环，这里所谓短路一条边e，意思是指将e的两个端点重合且只删去边e。

证明： 设G_s是由G短路C中的边得到的线图。又设n_e和n_{se}分别是G和G_s的边数，n_v和n_{sv}分别是G和G_s的顶点数，应该注意，只要C本身不是一个最大连通子图，短路C的一些边不会改变

最大连通子图的个数。假定我们短路C中的k条边，这里k小于C的边数n，则在所得的图G_s中，

$$n_{se}=n_e-k \tag{4-3-19}$$

$$n_{sv}=n_v-k \tag{4-3-20}$$

于是G_s的零度是

$$n_{se}-n_{sv}+\rho=n_e-n_v+\rho \tag{4-3-21}$$

这就证明了定理的第一部分。

假定我们短路C的全部n条边，则在所得的图G_s中，

$$n_{se}=n_e-n \tag{4-3-22}$$

且当C不是一个最大连通子图时，

$$n_{sv}=n_v-n+1 \tag{4-3-23}$$

于是G_s的零度是

$$n_{se}-n_{sv}+\rho=n_e-n_v+\rho-1 \tag{4-3-24}$$

它正好比G的零度少1。

当C本身是一个最大连通子图时，短路C中的所有边使

$$n_{sv}=n_v-n \tag{4-3-25}$$

但最大连通子图的数目也要减少1，因此G_s的零度是

$$n_{se}-n_{sv}+\rho-1=n_e-n_v+\rho-1 \tag{4-3-26}$$

它也比G的零度少1。　　　　　　　　　　　　（证毕）

定理4-3-6　设G和G'对偶。设e是G中的一条边，e'是G'中的对应边。又设G_s是由G短路边e得到的线图，G'_o是由G'删除边e'得到的线图，则G_s和G'_o对偶。

证明：　考虑G中仅由边e组成的子图g。因为G和G'对偶，以下等式必成立：

$$n=R'-\bar{r}' \tag{4-3-27}$$

其中n是g的零度，R'是G'的秩，$\bar{r}'$是G'_o的秩。若e是一个自环，则g的零度$n=1$。因此由式(4-3-27)，G'_o的秩必然比G'的秩少1。如果e不是一个自环，则g的零度$n=0$。因此G'的秩

和G'_0的秩相同。由这个结果，下面我们可以证明G_s和G'_0对偶。设g是G的一个子图。假定g包含边e。设g_s是由g短路边e得到的，g'_0是G'_0中对应于g_s的子图。现在我们要确定下式是否成立：

$$n_s = R'_0 - \bar{r}'_0 \qquad (4\text{-}3\text{-}28)$$

注意n_s是g_s的零度，R'_0是G'_0的秩，而$\bar{r}'_0$是g'_0的补图$\bar{g}'_0$的秩。

假定e是一个自环.因为$\bar{g}'$是G'中对应于g的子图的补图，故G'中子图$\bar{g}'$与G'_0中的$\bar{g}'_0$相同.因此秩$\bar{r}'_0$就是$\bar{g}'$的秩$\bar{r}'$.另一方面，由于e是自环，G'_0的秩R'_0比G'的秩R'少1。于是$R'_0-\bar{r}'_0$比$R'-\bar{r}'$少1。由定理4-3-5，由于e是自环，g_s的零度n_s比g的零度少1。因此式(4-3-28)成立。

若e不是自环，则由上面的结果，G'_0的秩R'_0与G'的秩相同。并且由定理4-3-5，g_s的零度n_s与g的零度相同.因此，当e不是自环时，式(4-3-28)也成立。所以我们作出结论，对于任何由g短路其中的边e所得的g_s，式(4-3-28)都是对的。但是，对G_s的任一子图g_s，显然存在G的一个子图g，使得(1)g包含边e，(2)g短路边e就变成g_s。因此式(4-3-28)对G_s的任何子图g_s都成立。故G_s和G'_0对偶。 (证毕)

定理4-3-7 设G和G'对偶，则G的一个回路对应于G'的一个割集。

注意，由定理4-3-2，如果G'是从G经D过程得到的线图，则G的一个回路对应于G'的一个割集。本定理强调的这一性质对任意两个互相对偶的线图都成立。

证明： 假定我们令g等于G中的回路C。我们要说明g的对应子图g'是G'中的割集。设G_s是由G短路g中所有边得到的图，G'_s是由G'删除g'的所有边得到的图。据定理4-3-5，

$$N - 1 = N_s \qquad (4\text{-}3\text{-}29)$$

其中N是G的零度，N_s是G_s的零度。

连续运用定理4-3-6，容易说明G_s和G'_0是对偶的，因此

$$N_s = R'_0 \quad (4-3-30)$$

这里R'_0是G'_0的秩。因为

$$N = R' \quad (4-3-31)$$

故式(4-3-29)表明，G'_0的秩比G'的秩少1。这就意味着，删除g'的所有边将使G'的秩减少1。

如果我们取g为回路C的一个真子图，则由定理4-3-5，G_s的零度与G的零度相同。因此式(4-3-29)和(4-3-30)说明，如果删除与回路C中的边对应的一部分而不是全部边，G'的秩不会减少。于是据割集的定义，G'里对应于G中一个回路的边组成G'的一个割集。（证毕）

现在我们已经作好准备，可以来研究作为其他线图对偶的线图所具有的一个重要性质。

定理4-3-8 若G_1是G'的对偶，则G_2是G'的对偶，当且仅当G_1和G_2是2-同构的。

证明： 假定G_2是G'的对偶，则在G_2的边和G'的边之间存在一个1∶1对应，使得G_2的回路对应于G'的割集。因为在G_1的边和G'的边之间也有一个1∶1对应，使得G_1的回路对应于G'的割集，所以我们可以作G_1的边和G_2的边之间的一个1∶1对应，使得在G_1的回路和G_2的回路之间得到一个1∶1对应。这就证明了定理的第一部分。

下面，假定G_1和G_2是2-同构的。因为G_1和G'对偶，对G_1G'任一子图g_1，式(4-3-5)成立，也就是

$$n_1 = R' - \bar{r}' \quad (4-3-32)$$

其中n_1是g_1的零度，R'是G'的秩，$\bar{r}'$是G'中g_1的对应子图g'的补图的秩。因为G_1和G_2是2-同构的，在G_1的边和G_2的边之间存在一个1∶1对应，使得G_1的回路对应于G_2的回路。因此存在G_2的一个由g_1的对应边构成的子图g_2。显然g_2的零度n_2等于g_1的

零度n_1。又显然g'是g_2的对应子图。于是我们有

$$n_2 = R' - \bar{r}' \tag{4-3-33}$$

这就证明了G_2和G'是对偶的。（证毕）

例4-3-3 考虑如图 4-3-10 所示的线图G。G的对偶图G_1是由D过程得到的，如图 4-3-11(a) 所示，它可以被重新画成 4-3-11(b) 的样子。图 4-3-12 所示的线图G_2也是G的一个对偶. 我们可以看出，G_1和G_2是2-同构的。

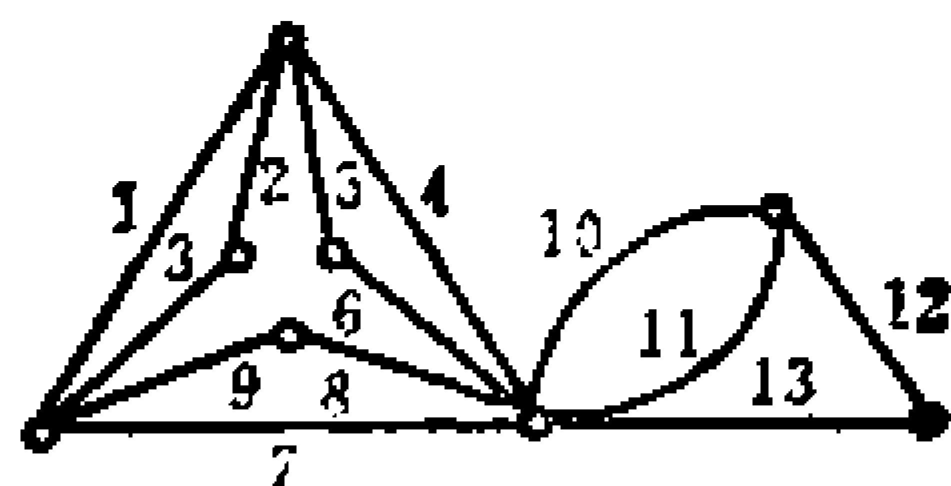
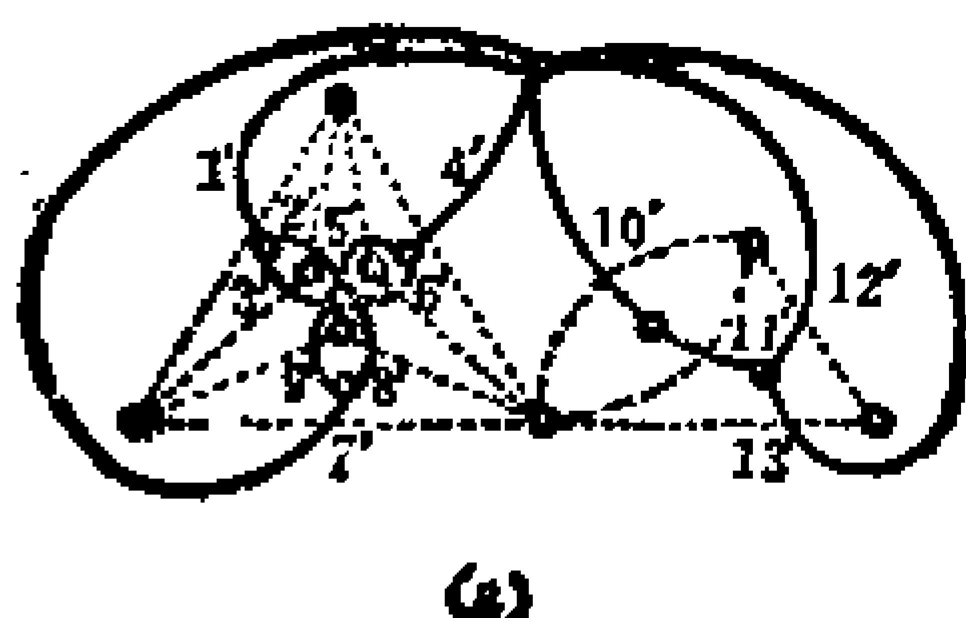
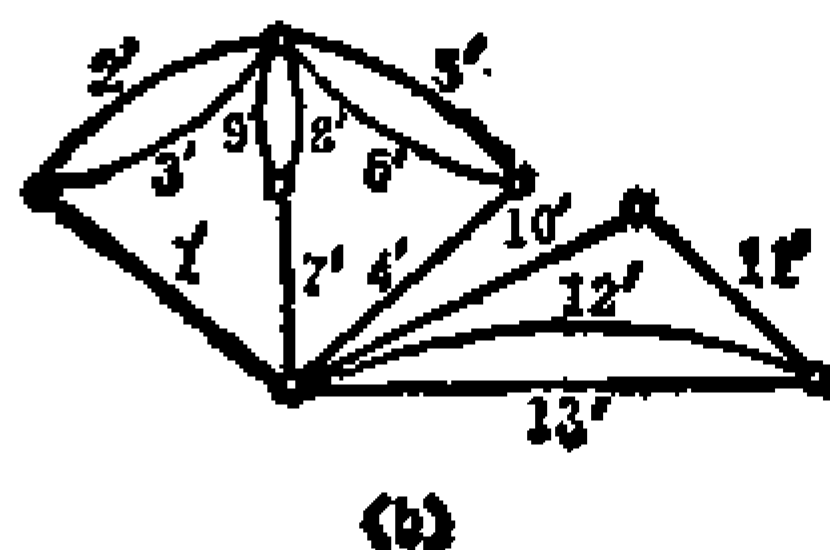


图4-3-10 线图G



(a)



(b)

图4-3-11 G的对偶图G_1

(a) 由D过程得G_1；(b) 重画G_1

对定理 4-3-7 作一些修改，我们将得到关于对偶图的存在性的一个重要定理。

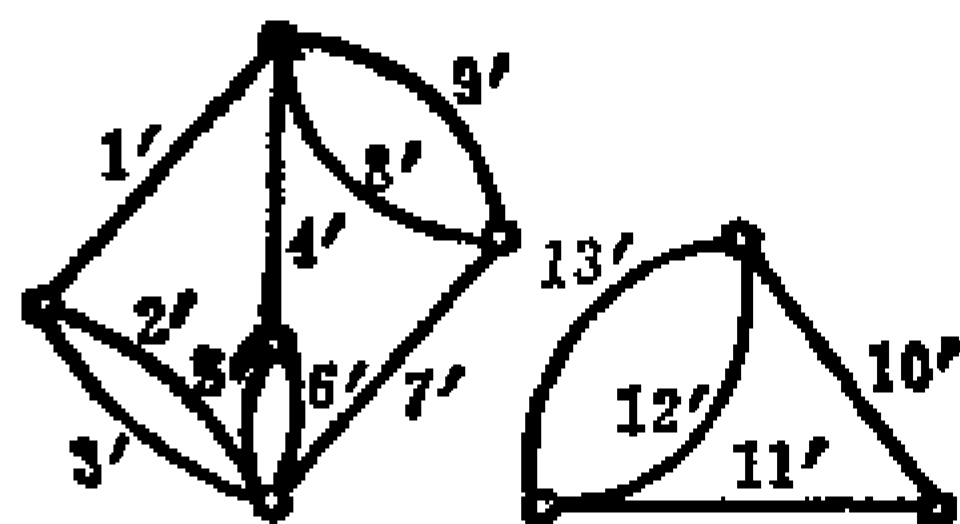


图4-3-12 G的一个对偶图G_2

定理4-3-9 设B是线图G的一个回路矩阵，则G有一个对偶，当且仅当存在一个线图G'，在G的边和G'的边之间有一个1∶1对应，使得G'的一个割集矩阵等于B。

证明： 若存在一个线图G'是G的对偶，则据定理 4-3-7，此定理为真。

假定 G' 是这样一个线图，在 G 的边和 G' 的边之间有一个 1：1 对应，使得 G' 的割集矩阵是 B。由这个假设，我们要来证明 G' 是 G 的对偶。

设 G_e 是由 G 短路边 e 得到的线图。又设 B_e 是由 G 的回路矩阵 B 删去表示边 e 的列，再删去元素全为零的行（如果这样的行存在的话）得到的矩阵. 注意元素全为零的行是由于删除了一列，而此列代表的边 e 是一个自环而产生的。我们可以把 B_e 看成 G_e 的回路矩阵。设 G'_e 是由 G' 删去与 G 中边 e 对应的边 e' 得到的线图，则 B_e 显然是 G'_e 的割集矩阵。

如果我们不是短路 G 的一条边，而是短路 G 中一个子图 g 的所有边，就有以下的结果：设 G_g 是由 G 短路子图 g 中的所有边得到的线图. 又设 B_g 是由 B 删去代表 g 的所有边的列，再删去元素全为零的行得到的矩阵. 则可看出，B_g 是 G_g 的回路矩阵。设 G'_g 是由 G' 删除 G' 中与 g 对应的子图 g' 的所有边得到的，则 B_g 是 G'_g 的割集矩阵. 因为回路矩阵的行数对应线图的零度，若 n 是 g 的零度，则 $N-n$ 是 G_g 的零度，其中 N 是 G 的零度. 并且，由于 B_g 是一个割集矩阵，$N-n$ 是 $\bar{g}'$ 的秩，也就是

$$N-n=\bar{r}' \tag{4-3-34}$$

而且，G' 的秩 R' 等于 G 的零度 N。因此我们有

$$R'-n=\bar{r}' \tag{4-3-35}$$

由此式即可得到式(4-3-18)。这对于 G 的任何子图 g 都成立。因此 G 和 G' 是对偶的。（证毕）

定理 4-3-9 导出了以下表明平面图特征的重要定理。

定理4-3-10（惠特尼） 一个线图有对偶，当且仅当它是平面的。

证明： 定理的前一部分是显然

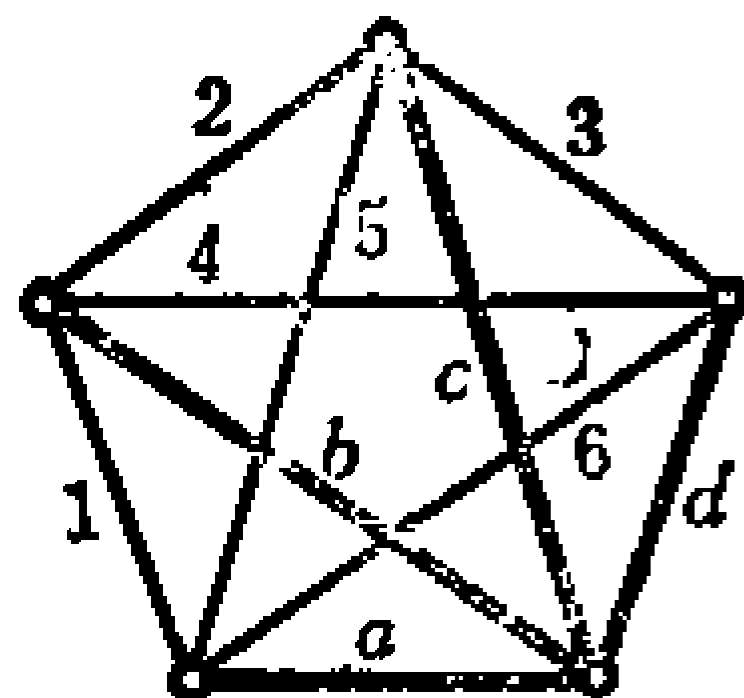


图4-3-13 两个基本非平面图之一及树 (a,b,c,d,e)

的，因为对于平面图，我们可以应用D过程来求出它的对偶。至于定理的后一部分，只要证明一个非平面图没有对偶即可。

假定一个线图G包含图4-3-13所示的基本非平面图作为其子图。则线图G的基本回路矩阵B可以这样选取：使这个非平面图关于树$t=(a,b,c,d)$的基本回路矩阵B_1是B的一个子矩阵，这里

$$B_1=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc:cccc}1&2&3&4&5&6&a&b&c&d\end{array}\\\left[\begin{array}{cccccc:cccc}1&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&1&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1&1&0&0&1\end{array}\right]\end{array}\tag{4-3-36}$$

可以看出，即使这个非平面图的每一边都用串联的边来代替，B_1仍将是这样一个非平面图的基本回路矩阵的一个子矩阵。我们把B_1看作一个基本割集矩阵。为了方便，我们调整列的次序，使它成为基本割集矩阵的形式：

$$B'_1=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc:cccccc}a&b&c&d&1&2&3&4&5&6\end{array}\\\left[\begin{array}{cccc:cccccc}1&1&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&1&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0&1&0\\1&0&0&1&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]\end{array}\tag{4-3-37}$$

B'_1关于行1的H子阵$H_{(1)}$是

$$H_{(1)}=\begin{array}{c}\\2\\3\\4\\5\\6\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}c&d&2&3&4&5&6\end{array}\\\left[\begin{array}{ccccccc}1&0&1&0&0&0&0\\1&1&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&1\end{array}\right]\end{array}$$

它不可能被分块为式(3-5-3)的形式，而使H_1和H_2都不空。于是B'_1关于行1的两个M子阵之一将成为

$$M(1)=B'_1 \tag{4-3-39}$$

类似地，$M(1)$关于行2的两个M子阵之一是

$$M(12)=B'_1 \tag{4-3-40}$$

进一步，$M(12)$关于行4的M子阵对之一是

$$M(124)=B'_1 \tag{4-3-41}$$

因为$M(124)$的列b在行1，2，4共有三个1，故据定理3-5-10，$M(124)=B'_1$不是具有表示关联集的行1，2，4的基本割集矩阵。并且，用行1，2，4我们总可以得到一个矩阵$M(124)$来作为M子阵，因此，我们可以说，B'_1不是一个基本割集矩阵。所以，据定理3-5-11，B不可能是一个基本割集矩阵。于是据定理4-3-9，G没有对偶。

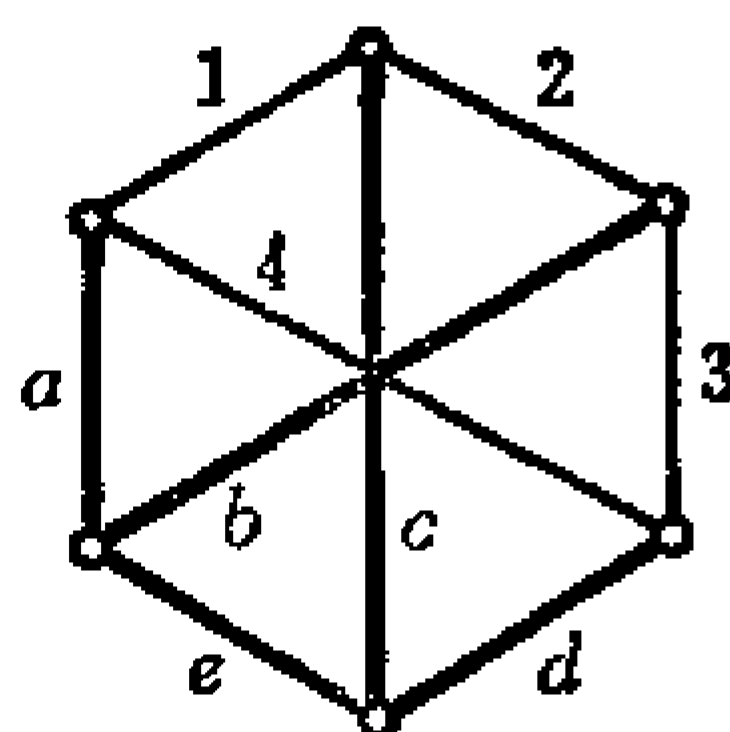


图4-3-14 另一个基本非平面图和树(a,b,c,d,e)

继续证明，假定线图G包含如图4-3-14所示的另一个基本非平面图为其子图，则G的基本回路矩阵B可以这样选取：以G_2关于树$t=(a,b,c,d,e)$的基本回路矩阵B_1为B的子矩阵，这里

$$B_1=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc}a&b&c&d&e&1&2&3&4\end{array}\\\left[\begin{array}{ccccc:cccc}1&0&1&0&1&1&0&0&0\\0&1&1&0&1&0&1&0&0\\0&1&0&1&1&0&0&1&0\\1&0&0&1&1&0&0&0&1\end{array}\right]\end{array} \tag{4-3-42}$$

注意，为了方便，单位矩阵是放在右边的。和前面一样，如能证明B_1不可能是一个线图的割集矩阵，则B不可能成为一个线图的割集矩阵，从而证明了G不可能有对偶。

B_1关于行 1 的两个M子阵之一是

$$M(1)=B_1 \tag{4-3-43}$$

$M(1)$的关于行 2 的两个M子阵之一是

$$M(12)=B_1 \tag{4-3-44}$$

进一步，$M(12)$关于行 3 的两个M子阵之一是

$$M(123)=B_1 \tag{4-3-45}$$

因为$M(123)$的列e在行 1，2，3 共有三个 1，故据定理3-5-10，B不可能是一个其行 1， 2， 3 表示关联集的基本割集矩阵。而用行 1， 2， 3，我们将得到$M(123)=B_1$来作为B_1的一个M子阵。于是我们可以说，B_1不可能是一个基本割集矩阵。因此，据定理3-5-11，B不可能是一个基本割集矩阵，故G没有对偶。据定理4-2-1，即当且仅当G是非平面图时，G包含一个与这两个基本非平面图同胚的子图。于是我们可以断定定理为真。（证毕）

我们知道了只有平面图才有对偶这一结论，可以得到平面图的一些有趣的性质。设G'是一个连通线图G的对偶。假定G被画在一个平面上且没有两边相交。又假定G'是由G经D过程得到的。则我们知道，G'的每一个顶点是在G的每一个区域中。

由定理2-4-6，我们知道，在G'中存在n'_v-1个线性无关的关联集，这里n'_v是G'的顶点数。设n_e是G的边数。（注意G的边数与G'的边数相同。）因为据定理 3-3-5，G中线性无关的回路数为n_e-n_v+1，这里n_v是G的顶点数，又因为G的回路对应于G'的割集，我们有

$$n'_v-1=n_e-n_v+1 \tag{4-3-46}$$

因此

$$n'_v=n_e-n_v+2 \tag{4-3-47}$$

我们说一个线图G是最大平面图，如果（1）G中没有并联边，（2）若在G中任意两个顶点之间添加一条边，G不再是平面的。考虑一个最大平面图G，我们可以看到，对应于每一个区域

（包括外部区域）边界的回路恰由三条边组成。（如果不是这样的情况。我们可以在边界超过三条边的区域中添加一条边，使其变成两个区域，而不产生交叉边）这就意味着在由G经D过程得到的图G'中，每一个顶点恰与三条边相连。于是其边数为$3n'_v/2$。据式(4-3-47)，

$$n_e=\frac{3n'_v}{2}=\frac{3(n_e-n_v+2)}{2} \tag{4-3-48}$$

或

$$n_e=3(n_v-2) \tag{4-3-49}$$

定理4-3-11 任一不含并联边的平面图至多有$3(n_v-2)$条边，其中n_v是此平面图的顶点数。

假定一个平面图G不含并联边，若G中每一个顶点的度至少为6，则边数n_e至少是

$$\frac{6n_v}{2}=3n_v \tag{4-3-50}$$

但是，由以上定理，边数不可能超过$3(n_v-2)$，因此，G的边数小于$3n_v$。

定理4-3-12 在一个不含并联边的平面图中至少有一个顶点的度等于或少于5。

假定一个平面线图（不含并联边）的每一个顶点的度都是5，则图的边数是$5n_v/2$。据定理4-3-11，

$$\frac{5n_v}{2}\leqslant 3(n_v-2) \tag{4-3-51}$$

或

$$n_v\geqslant 12 \tag{4-3-52}$$

存在一个恰有12个顶点的最大平面图，其中每一个顶点的度均为5，如图4-3-15所示。

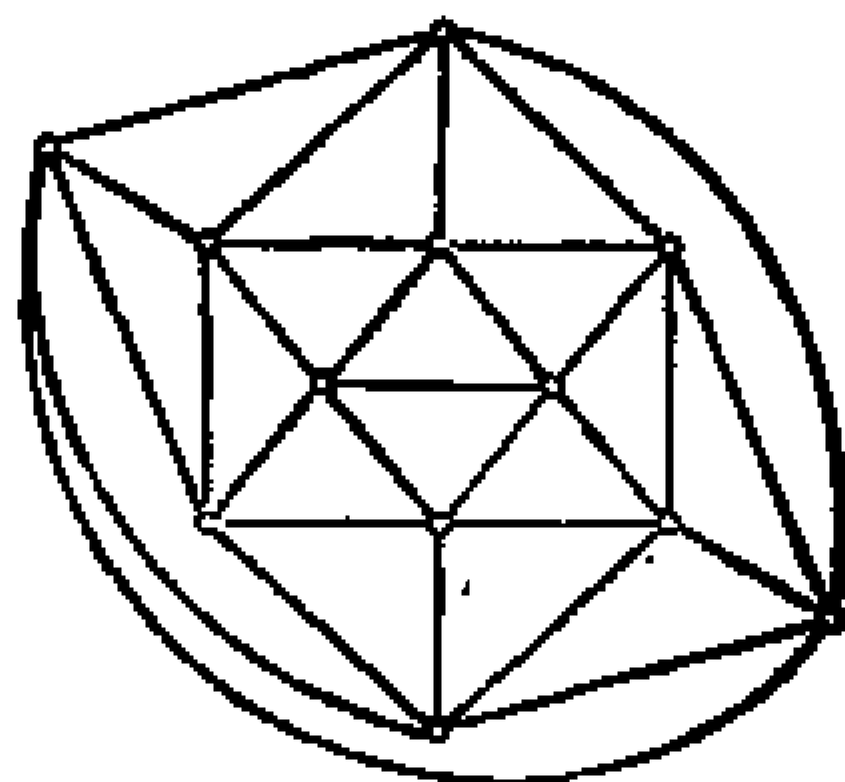


图4-3-15 每一个顶点的度均为5的最大平面图

4-4 割集矩阵的可实现性(Ⅱ)

第 3-5 节中介绍的判断割集矩阵可实现性的算法，需要对给定矩阵进行运算。因此，当我们要在某些限制下建立起一个基本割集矩阵时，采用这种算法可能不够简便。这里我们要研究托特在1959年介绍的割集矩阵的一些性质。但是，首先我们来研究一个平面图的割集矩阵和回路矩阵之间的关系。

假定[U $B_{f_{12}}$]是一个平面图 G 的基本回路矩阵，则据定理4-3-7，矩阵[$B_{f_{12}}$ U]是G的对偶G'的基本割集矩阵。类似地，如果[$Q_{11}U$]是平面图G的基本割集矩阵，则矩阵 [UQ_{11}] 是G的对偶G'的回路矩阵。另一方面，假定矩阵[NU]是一个非平面图的回路矩阵，则[NU]不可能是另一个图的基本割集矩阵，因为据定理4-3-10，一个非平面图不可能有对偶。另外，定理3-5-11说，如果矩阵[N U]包含一个不是割集矩阵的子矩阵，则此矩阵不可能是一个基本割集矩阵。

定理4-4-1 如果一个矩阵[N U]有一个子矩阵，它是库拉托斯基的两个基本非平面图中任一个的基本回路矩阵，则[N U]不可能是一个基本割集矩阵。

注意，据定理 4-2-1，一个非平面图一定含有库拉托斯基的两个基本非平面图中的某一个。

设D是一个非奇异矩阵，其阶数等于[N U]的行数，且其元素为 1 或 0 。假定我们调整D[N U]的列，可以得到一个新的矩阵[$N'U$]，在第3-4节中，我们看到，如果选取不同的树，就得到不同的基本割集矩阵。因此，如果[N U]是一个线图的基本割集矩阵，则 [$N'U$] 也是同一个线图的基本割集矩阵，不过是关于不同的树而已。定理 4-4-1 对任何基本割集矩阵一定成立。因此，如果我们象下面这样定义一个矩阵的正规形式，就可以推广

定理4-4-1。

定义4-4-1 一个包含单位矩阵的矩阵称为正规形式的矩阵。

现在定理 4-4-1 可以被推广成如下形式。

定理4-4-2 如果一个矩阵 $[NU]$ 的任一正规形式包含一个子矩阵，它是库拉托斯基的两个基本非平面图中任一个的基本回路矩阵，则$[NU]$不是基本割集矩阵。

有一个很有意思的矩阵，记为N_0，

$$N_0=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4-4-1}$$

这个矩阵具有一种特殊的性质。

引理4-4-1 $[N_0U_0]$和$[N_0'U_0']$ 都不是基本割集矩阵．其中U_0和U_0'是单位矩阵。

这一引理的证明留给读者．利用这一引理，可以将定理4-4-2推广为如下形式。

定理4-4-3 如果一个矩阵 $[NU]$ 的任何正规形式包含以下三种矩阵中的任何一个：（1）$[N_0U_0]$；（2）$[N_0'U_0']$；（3）库拉托斯基的两个基本非平面图中任一个的基本回路矩阵，则$[NU]$不是基本割集矩阵。

定理 4-4-3 所给出的条件，也是一个矩阵是基本割集矩阵的充分条件。为了说明这一点，我们采用一种特殊矩阵，称为最小不可实现矩阵。它的定义如下。

定义4-4-2 一个矩阵 $[NU]$ 是最小不可实现矩阵，如果它满足以下四个条件：

条件 1 $[NU]$的任何正规形式都不包含库拉托斯基的两个基本非平面图中任一个的回路矩阵。

条件 2 $[NU]$的任何正规形式都不包含 $[N_0U_0]$ 或 $[N_0'U_0']$，其中U_0和U_0'是单位矩阵，N_0是式(4-4-1)给出的矩阵。

条件3　$[NU]$不是割集矩阵.

条件4　如果我们从$[NU]$的任一正规形式$[N'U]$中删去任一行r，所得的矩阵$[N'U]_{-r}$是一个割集矩阵. 如果我们删除N'的任一列c，所得的矩阵$[N'_{-c}U]$也是一个割集矩阵.

我们首先在最小不可实现矩阵存在的假设下，来考查它的某些性质。为了简便，我们定义以下符号。

定义4-4-3　设r是一个最小不可实现矩阵$[NU]$中的一行，c是N中的一列，则线图$G(-r)$，$G(-c)$，$G(-r-c)$和$G(-c-r)$分别定义为

$G(-r)$：割集矩阵为$[NU]_{-r}$的线图.

$G(-c)$：割集矩阵为$[N_{-c}U]$的线图.

$G(-r-c)$：在$G(-r)$中，把对应于$[NU]_{-r}$的列c的边删除所得的线图。

$G(-c-r)$：在$G(-c)$中，把$[N_{-c}U]$中U在行r处为1的列所对应的边短路（即将此边的两端点重合，并删去此边）得到的线图。其中，符号$[NU]_{-r}$代表从最小不可实现矩阵$[NU]$中删除行r得到的矩阵，符号$[N_{-c}U]$代表删除N的列c得到的矩阵.

假定一个线图的割集矩阵是$[NU]$的子矩阵，我们考虑这种线图的某些性质。

引理4-4-2　设$G_0(-r-c)$是一个线图，它的割集矩阵是$[N_{-c}U]_{-r}$，这个矩阵是由一个最小不可实现矩阵$[NU]$删除N中的列c以及行r得到的。则$G_0(-r-c)$与$G(-r-c)$和$G(-c-r)$是2-同构的。

证明：　如果我们删除$G(-r)$中对应于列c的弦，就得到线图$G(-r-c)$，其割集矩阵是$[N_{-c}U]_{-r}$.因此，据定理4-1-2，$G_0(-r-c)$和$G(-r-c)$是互为2-同构的。类似地，如果我们短路，$G(-c)$中与U的在$[N_{-c}U]$的行r处为1的列对应的枝，就得到线

图$G(-c-r)$，其割集矩阵为$[N_{-c}U]_{-r}$。因此，据定理4-1-2，$G(-c-r)$和$G_0(-r-c)$是互为2-同构的。（证毕）

下一个引理说明线图$G(-c)$的某些性质。

引理4-4-3 设r_1，r_2，…，r_k是$[NU]$中在列c处为1的行。对$p=1$，2，…，k，设枝r_p对应于U中在行r_p处为1的列，则线图$G(-c)$有以下性质：

1．当枝r_1，r_2，…，r_k中任何一个被短路时，剩下的枝或者本身构成一条路径，或者经过2-同构运算变成一条路径。

2．枝r_1，r_2，…，r_k本身既不可能构成一条路径，也不可能经过任何2-同构运算变成一条路径。

注意，$[N_{-c}U]$中U的各列对应一个树，枝r_1，r_2，…，r_k是这个树中的一些边。2-同构运算是指4-1节中介绍的，得到2-同构图的几何运算。

证明： 为了使$[NU]_{-r_1}$成为$G(-r_1)$的基本割集矩阵，枝r_2，r_3，…，r_k和弦c一起，必然构成$G'(-r_1)$中的一个回路，其中$G'(-r_1)$是与$G(-r_1)$2-同构的一个线图。故枝r_2，r_3，…，r_k构成$G'(-r_1-c)$中的一条路径，而$G'(-r_1-c)$与$G(-r_1-c)$2-同构。据引理4-4-2，$G(-r_1-c)$和$G(-c-r_1)$是互为2-同构的，因此$G'(-r_1-c)$和$G(-c-r_1)$也互为2-同构。所以，在从$G'(-c)$短路r_1得到的线图$G'(-c-r_1)$中，存在一条由r_2，r_3，…，r_k组成的路径，其中$G'(-c)$与$G(-c)$是2-同构的。我们如果用$r_p(1<p\leqslant k)$来代替r_1，也可得到同样的结论。因此在$G(-c)$中性质1成立。

假定枝r_1，r_2，…，r_k构成$G(-c)$的2-同构图$G'(-c)$中的一条路径，则我们可以将弦c加入$G'(-c)$中，使弦c与枝r_1，r_2，…，r_k构成一个回路，从而得到线图G。由于$G'(-c)$的基本割集矩阵是$[N_{-c}U]$，故G的基本割集矩阵是$[NU]$。然而$[NU]$是一个最小不可实现矩阵，所以在$G(-c)$中性质2必然成

立。 （证毕）

下面的定理给出了$[NU]$的一个重要性质。

定理4-4-4 设$[NU]$是一个最小不可实现矩阵，则在$[NU]$的任一正规形式$[N'U]$中，N'的任一列或者具有两个非零元，或者具有三个非零元。

证明： 只要证明引理 4-4-3 中的 k 不大于 3 即可。为了说明这一点，我们来考查一个具有引理4-4-3所列性质的图$G(-c)$，在 $k \geqslant 3$ 时所有可能的结构。引理4-4-3指出，在$G(-c)$中，枝r_1，r_2，$\cdots$，r_k不可能组成一条路径，也不可能经2-同构运算变成一条路径（性质 2）。但是，如果我们将枝$r_p(1 \leqslant p \leqslant K)$短路，剩下的枝就将组成一条路径，或者经过2-同构运算变成一条路径（性质 1）。因此，假定我们取 $p=1$，就可以得到以下两种类型的结构。而对于$G(-c)$来说，只可能有这样几种选择。

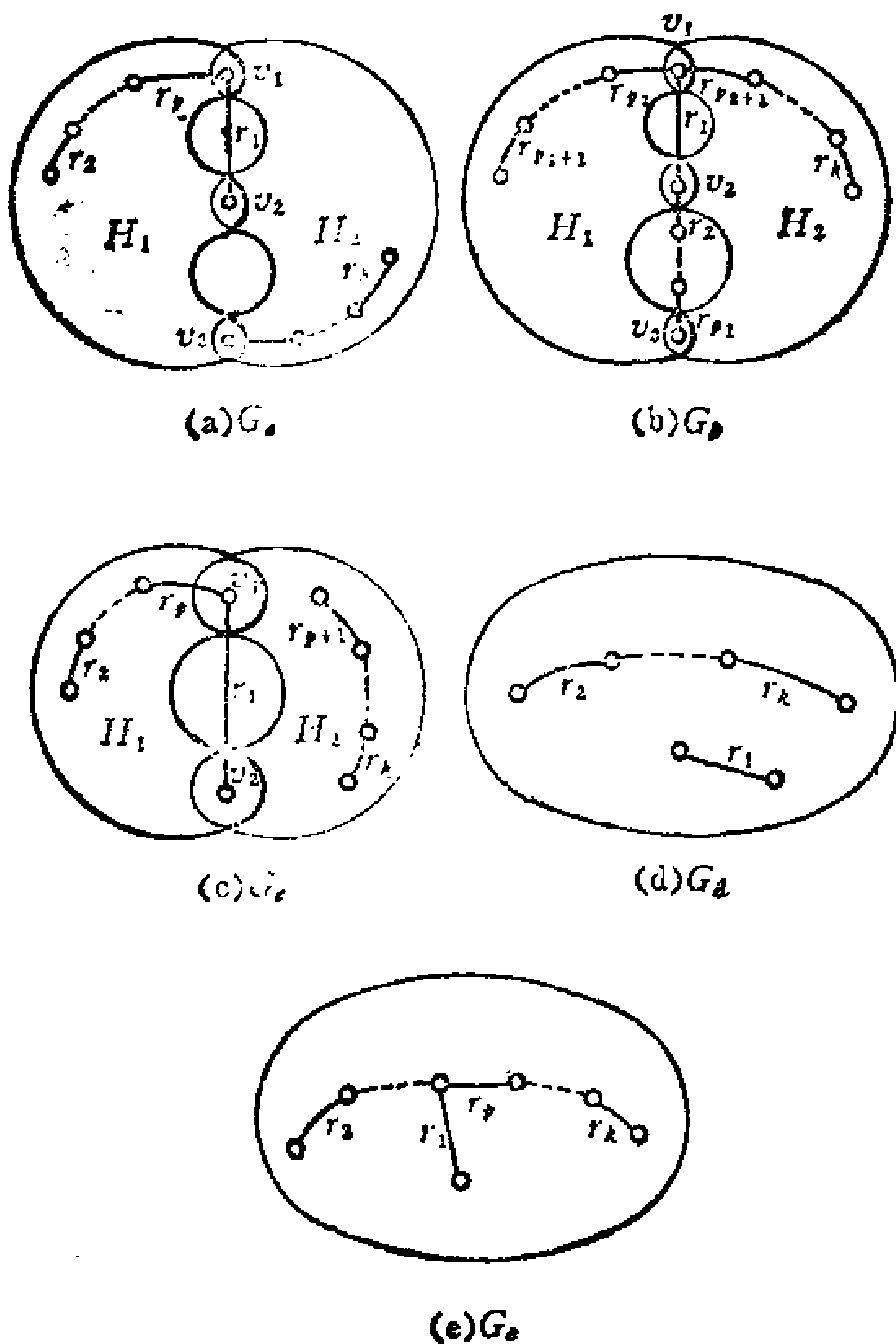
情形 1 不用短路r_1，其余的枝r_2，$\cdots$，r_k即已组成一条路径，或者这些枝经2-同构运算后变成一条路径。

情形 2 不短路r_1，其余的枝r_2，$\cdots$，r_k就不能组成一条路径，对这些枝进行2-同构运算也不能变成一条路径。

属于第一种类型的 $G(-c)$ 又可以有两种形式的选择，它们取决于枝r_1是否与枝r_2，$\cdots$，r_k所构成的路径相连接。因此可以看出，在第一种类型中，$G(-c)$ 的所有可选择的结构只能如图4-4-1(d)(e)所示的G_d和G_e。注意，对于类型 1 中的$G(-c)$，还有这样的结构可供选择，即经过2-同构运算变成与G_d或G_e相同的结构。但对于定理 4-4-4 的证明来说，我们没有必要考虑这些结构。

属于第二种类型的 $G(-c)$，可供选择的结构也可以分为两种形式，它们取决于在短路枝r_1以后，为了使枝r_2，$\cdots$，r_k处于一条路径之中，所需进行的 2- 同构运算的种类，正如我们在4-1节中已经看到的，对于 2- 同构有两种形式的几何运算。为了简

便，我们称它们为第一型运算和第二型运算。



(a)G_a (b)G_b

(c)G_c (d)G_d

(e)G_e

图4-4-1 对$G(-c)$结构的几种选择：G_a，G_b，G_c，G_d和G_e

定义4-4-4 所谓第一型的2-同构运算，是指将一个割点切割成二，使最大连通子图的数目增加1的一种运算。这种运算的逆运算也叫第一型的2-同构运算（它是指把最大连通子图g_r中的一个顶点和g_t中的一个顶点重合起来的方法），即把g_r和g_t连接起来的一种运算。所谓第二型的2-同构运算，是指使两个顶点连接在一起的两个子图之一，绕这两个顶点旋转的几何运算。

属于第二种类型，且需要作第一型2-同构运算的$G(-c)$，其可供选择的结构，可用图4-4-1(c)中的G_c来表示。当然，那种不用短路r_1，即可由G_c经2-同构运算得到的全部结构，也都属于这种形式。但我们在这里不必考虑它们。而对于要作第二型2-同构运算的$G(-c)$，其可供选择的结构有两种，取决于枝r_2，r_3，$\cdots$，r_k如何连接，以便经2-同构运算变成一条路径。这就是图4-4-1(a)和(b)中的G_a和G_b。此外，那种不用短路枝r_1，即可由G_a和G_b经2-同构运算得到的全部结构，我们可以不去考虑。因此，为了证明定理4-4-4，只需要考查图4-4-1所示的五种结构即可。

结构A 考虑图4-4-1(a)所示的线图G_a，若$p<2$，即r_2，r_3，$\cdots$，r_k全部在子图H_2中，则G_a与图4-4-1(d)中的G_d结构相同。对此，我们将在后面研究。因此，我们假设$p\geqslant 2$。注意，当枝r_1被短路时，顶点v_1和v_2变成一个顶点。这个新顶点和顶点v_3成为第二型2-同构运算的一对顶点，经这种运算，r_2，r_3，$\cdots$，r_p，r_{p+1}，$\cdots$，r_k变成一条路径。

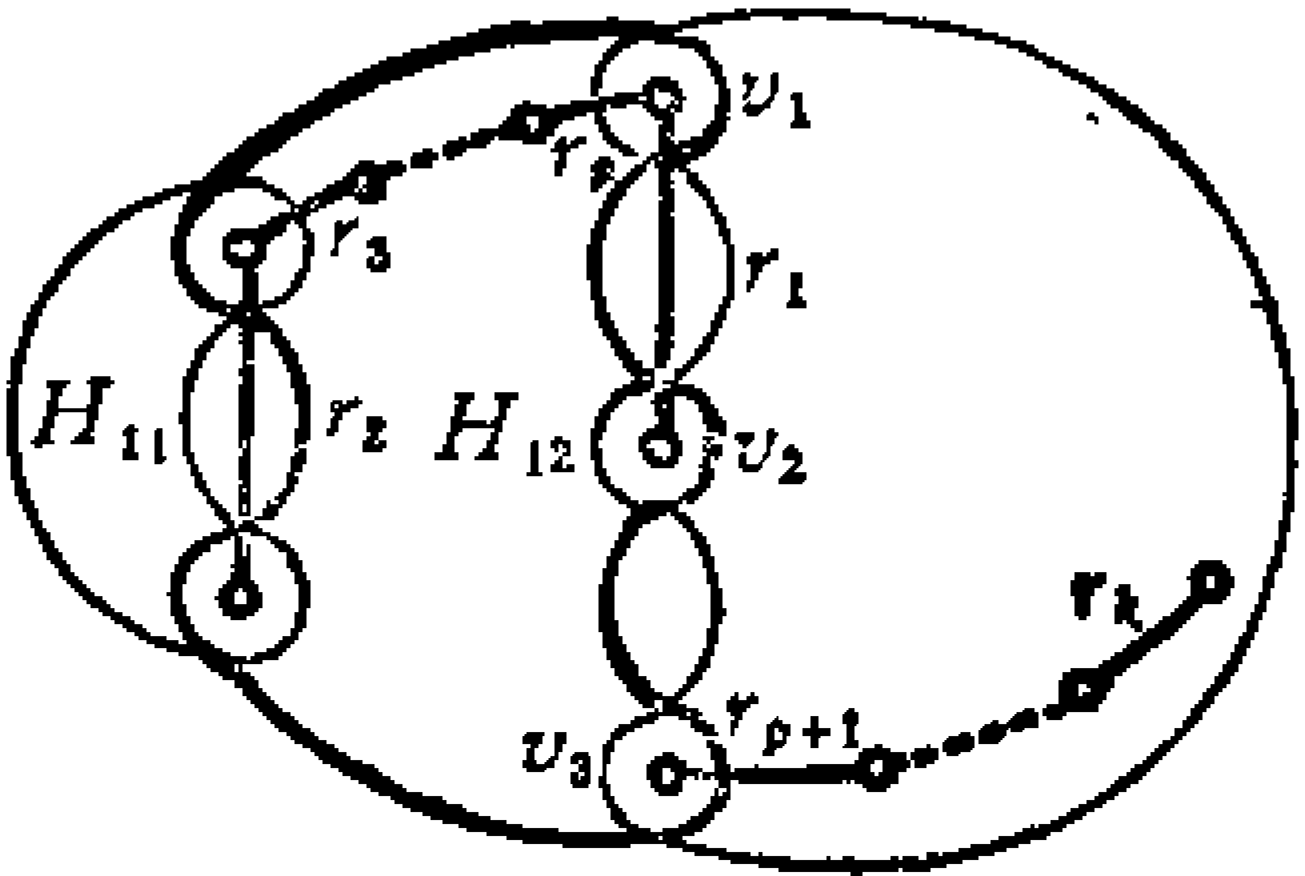


图4-4-2 G_a及H_{12}，H_{11}

现在，我们不去短路r_1，而换成短路r_2。如果由于r_2的短路，而使一种2-同构运算能够实施，并且这个运算是第一型的，那么原来的图G_a必定是

图4-4-2所示的样子。因此，剩下的枝r_1，r_3,…，r_k显然不可能经2-同构运算变成一条路径。如果这个2-同构运算是第二型的，则这种运算的实施并不会改变H_2的结构或r_1的位置。因此，要使r_1，r_3，…，r_k成为一条路径，就必须移动r_3，…，r_p中一部分枝的位置，来形成v_2和v_3之间的路径。这样作是不可能的，除非这条路径在开始时就已经存在。因为根据性质2，在v_2和v_3之间不可能有这条路径，所以我们可以断定，当$p\geqslant 2$时，G_a不是$G(-c)$。

结构B　考虑图4-4-1(b)中的G_b。若$p_1<2$，则它变成G_a。所以$p_1\geqslant 2$。若$p_2=p_1$，这意味着r_1，r_2，…，r_k都不在H_1中，且r_1，r_2，…，r_k构成一条路径。因此p_2一定大于p_1。并且，显然$k\geqslant p_2+1$。假定$p_1>2$，那么在短路r_2后，所得的图与G_b相比，除了组成v_2和v_3之间路径的串联边数减少了1以外，二者是相同的。因此，r_1，r_3，…，r_k不可能经2-同构运算变成一条路径。这就说明$p_1=2$。

由于$p_1=2$，我们假定$p_2>3$。因为在这种情形下，H_1中至少有两个枝r_3和r_4，所以若将r_3短路，所得的结果就与G_a相同。因此，在这种情况下，G_b不是$G(-c)$。

只剩下一种情况，就是$p_2=3$，$k=4$，如图4-4-3所示。为了使这种结构存在，必须有图中所示的路径P_1、P_2、P_3和P_4。显然，这个线图包含一个与图4-4-4所示线图G_3同胚的子图，因此有一个G_b的基本割集矩阵Q_f，它包含G_3的基本割集矩阵Q_f为其子矩阵。我们考虑G_3的基本割集矩阵Q_f，这里

$$Q_f=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & r_1' & r_2' & r_3' & r_4' \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

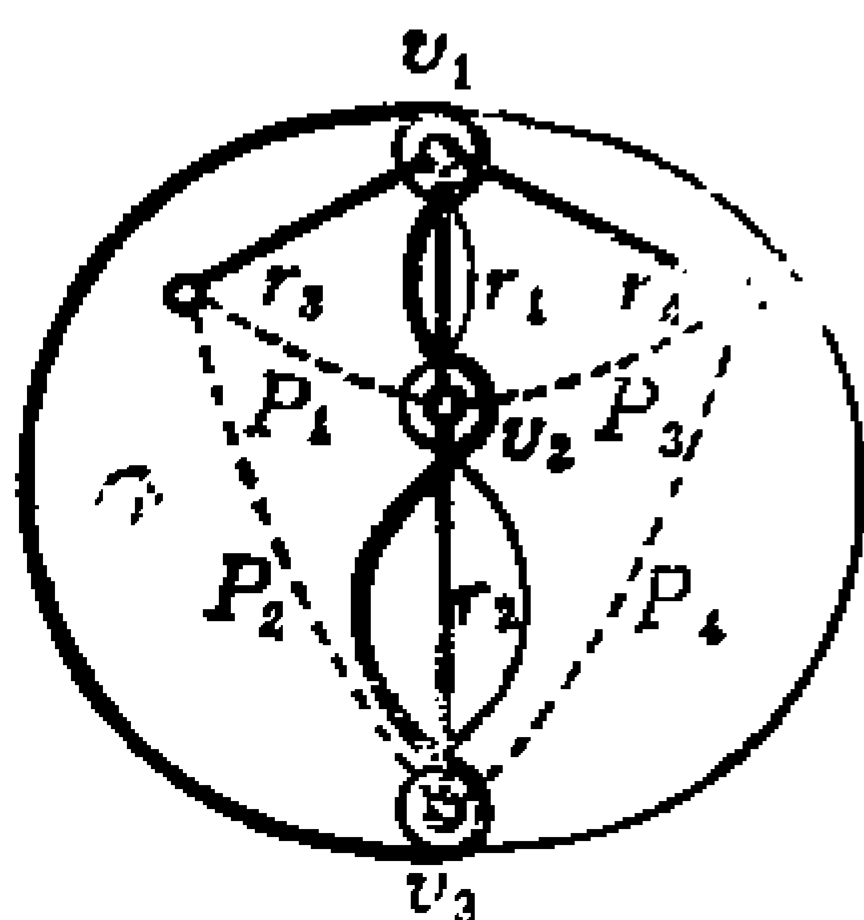


图4-4-3 路径P_1,P_2,P_3,P_4

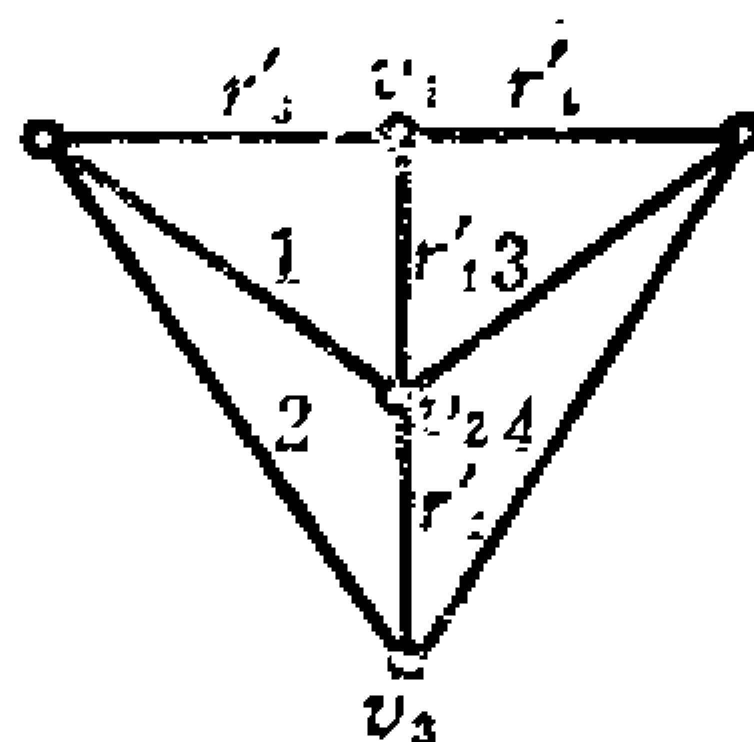


图4-4-4 G_2

如果G_b是$G(-c)$，则$[NU]$的一个正规形式，一定包含以下矩阵$[\underline{N}\ \underline{U}]$：

$$[N\ \ U]=\begin{bmatrix}1 & \\ 1 & Q_f\\ 1 & \\ 1 & \end{bmatrix}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc:cccc} c & 1 & 2 & 3 & 4 & r'_1 & r'_2 & r'_3 & r'_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc:cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\end{array}$$

然而这个矩阵是库拉托斯基的两个基本非平面图之一的基本回路矩阵，故$[NU]$不满足条件1。因此$[NU]$不是最小不可实现矩阵。这是一个矛盾。所以G_b不是$G(-c)$。

结构C　考虑图4-4-1(c)中的G_c。若$p<2$（即枝r_2，…，r_k都不在H_1中），则G_c变成了G_d，对此将在后面讨论。因此我们假设$p\geqslant 2$。我们不短路r_1，而将枝r_2短路，容易看出，剩下的枝r_1，r_3，…，r_k不可能由2-同构运算变成一条路径。因此G_c不是$G(-c)$。

结构D　考虑图4-4-1(d)中的G_d。如果我们不短路r_1而短路r_2，为了使G_d成为$G(-c)$的一种可供选择的结构，G_d只能与G_a或G_c相同。因此G_d不是$G(-c)$。

结构E　考虑图4-4-1(e)中的G_e。对于$k>3$，如果我们短路除r_1外的任何一个枝，为了使G_e成为$G(-c)$的一种可供选择的结构，G_e变成图4-4-1中另外一个图。然而我们发现，这些图都不可能是$G(-c)$。因此，G_e仅当$k=3$时可以成为$G(-c)$，这种结构如图4-4-5所示。

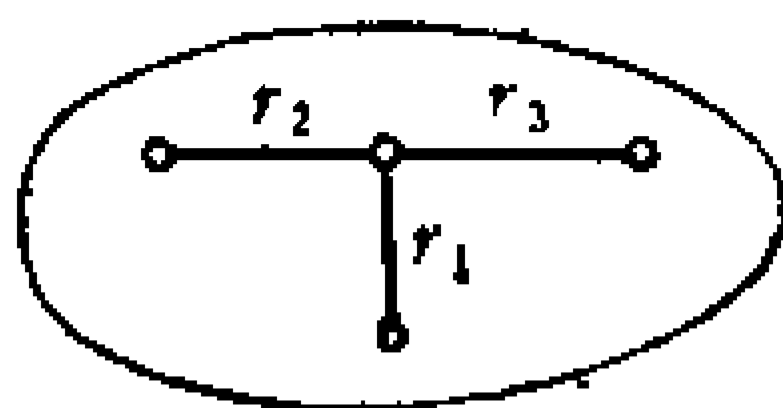


图4-4-5　$k=3$时的G_e

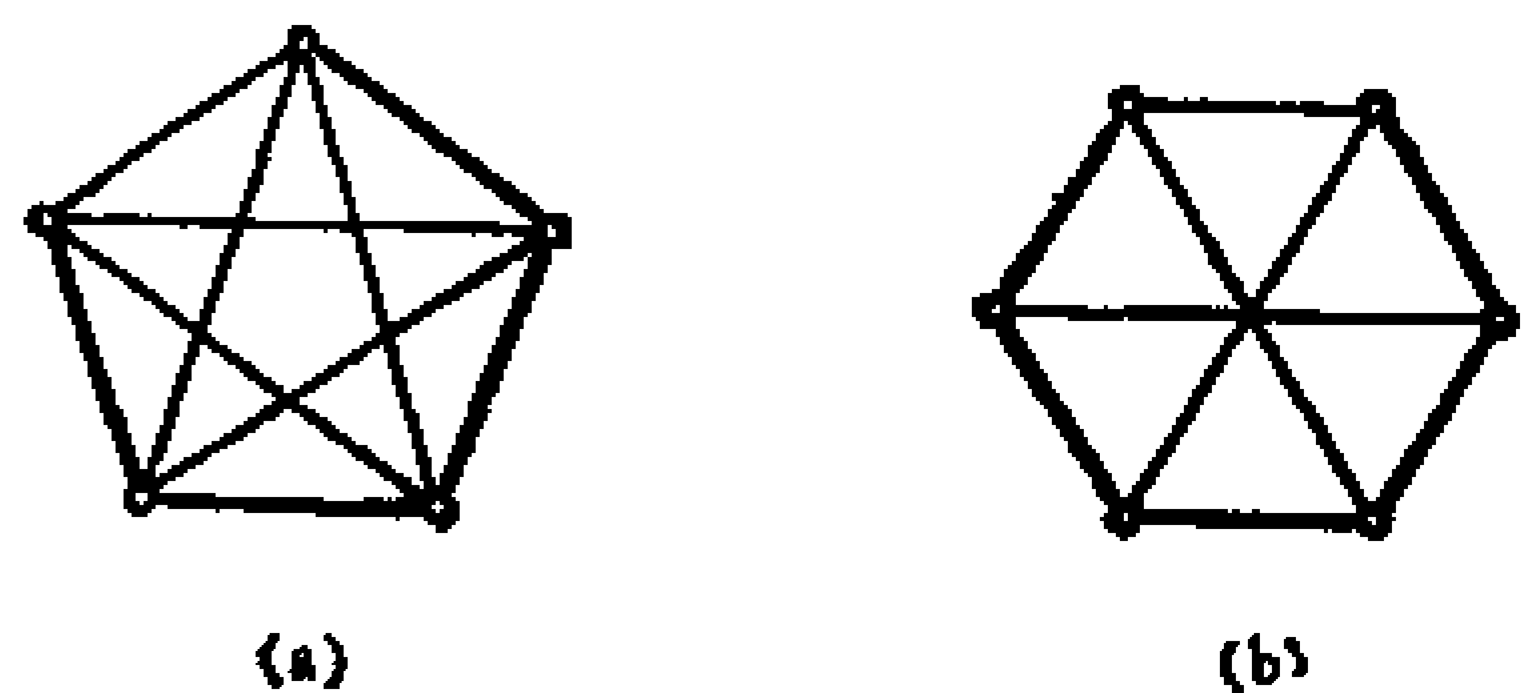
现在，我们可以断定$k\leqslant 3$。注意k是$[NU]$中列c的非零元数目。这对于选取$[NU]$的任一正规形式的任何一列都一定成立，所以我们可以得出这样的结论：N'中的任何一列有两个或三个非零元。这里$[N'U]$是$[NU]$的任何一种正规形式。这就证明了定理。　(证毕)

对于N的行，我们有与上述关于列的定理相同的性质。

定理4-4-5　设$[NU]$是一个最小不可实现矩阵，则在$[NU]$的任一正规形式$[N'U]$中，N'的任一行或者有两个非零元，或者有三个非零元。

证明：　我们只需要说明，当$[NU]$是最小不可实现矩阵时，$[N^t\underline{U}]$也是最小不可实现矩阵，其中$\underline{U}$是一个单位矩阵，N^t是N的转置。首先，我们要说明$[N^t\underline{U}]$满足条件4。假定$[NU]_{-r}$和$[N_{-c}U]$是非平面图的割集矩阵，则$[NU]_{-r}$和$[N_{-c}U]$包含库拉托斯基的两个基本平面图中某一个的割集矩阵。这就意味着，$[NU]_{-r}$和$[N_{-c}U]$有这样的正规形式，其中某一列里有三个以上的非零元，因为我们可以选取图4-4-6(a)和(b)所示的树。这就违背了定理4-4-4。故$[NU]_{-r}$和$[N_{-c}U]$都是平面图的割集矩阵。因此，$[N^t_{-r}\underline{U}]$和$[N^t\underline{U}]_{-c}$都是割集矩阵。这表明$[N^t\underline{U}]$满足条件4。对于条件1，假定$[N^t\underline{U}]$包含两个基本非平面图中某一个的回路矩阵，因为$[N^t\underline{U}]_{-c}$是一个割集矩阵，故$[N^t\underline{U}]$本身就是两个基本非平面图之一的回路矩阵，因此$[NU]$必然是

一个割集矩阵，这是一个矛盾。



(a)　　　　　　　　(b)

图4-4-6　基本非平面图和所选取的树

$[N'\underline{U}]$必定满足条件2，因为若$[N_0U_0]$是在$[N'\underline{U}]$的一个正规形式中，则$[N_0^{\prime}U_0]$是在$[NU]$的一个正规形式中。这里U_0是单位矩阵。这对于$[N_0^{\prime}U_0]$也为真。最后，$[N'\underline{U}]$不可能是一个割集矩阵，因为如果它是割集矩阵，则$[NU]$是一个非平面图的回路矩阵，这就违背了条件1．因此$[N'\underline{U}]$满足条件3。这样，$[N'\underline{U}]$是一个最小不可实现矩阵，因此据定理4-4-4，此定理为真。　　　　　　　　　　　　　　　　　　（证毕）

下一个定理和定理4-4-3给出了托特介绍的可实现性条件。

定理4-4-6　最小不可实现矩阵不存在。

证明：　如果一个矩阵不是割集矩阵，则其中必至少有一列，在这一列中至少有三个1．并且，据定理4-4-5，N的任一行有两个或三个1．因此，可以假设一个最小不可实现矩阵$[NU]$的子矩阵N为具有下面的形状的矩阵：

$$N=\begin{bmatrix} 1 & 1 & a_{13} & 0 & \cdots \\ 1 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ 1 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

首先我们考虑$a_{13}=1$的情况。在这种情况下，$[NU]$为

$$
[N\ \ U]=\left[\begin{array}{ccccc|cccccc}
1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & & & \\
1 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & 0 & 1 & 0 & & 0 & \\
1 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 & 0 & 1 & & & \\
0 & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \\
0 & & & & & 0 & 0 & 0 & & & 1
\end{array}\right]
$$

设 $a_{22}=a_{32}$，如果 $a_{22}=a_{32}=1$。则N的第一、第二列相同，因为据定理 4-4-4，N的每一行最多有三个 1。但是，删除这两列中的一列，不可能使剩余的矩阵可实现为基本割集矩阵。这就说明，$[N\,U]$ 不是最小可实现矩阵。因此 $a_{22}=a_{32}=1$ 是不可能的。当 $a_{22}=a_{32}=0$ 时，我们有

$$
[N\ \ U]=\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc|cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & & 1' & 2' & 3' & & & \\
\end{array}\\
\left[\begin{array}{ccccc|cccccc}
1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & & & \\
1 & 0 & a_{23} & a_{24} & \cdots & 0 & 1 & 0 & & 0 & \\
1 & 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 & 0 & 1 & & & \\
0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\
0 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

交换列 1 和列1′，我们有

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc|cccccc}
1' & 2 & 3 & 4 & & 1 & 2' & 3' & & & \\
\end{array}\\
\left[\begin{array}{ccccc|cccccc}
1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & & & \\
0 & 0 & a_{23} & a_{24} & \cdots & 1 & 1 & 0 & & 0 & \\
0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots & 1 & 0 & 1 & & & \\
0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\
0 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

为了使之成为正规形式，我们必须把第一行加（模 2）到第二和

第三行，得到

$$\begin{array}{ccccc|cccccc}
1' & 2 & 3 & 4 & & 1 & 2' & 3' & & & \\
1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & & & \\
1 & 1 & 1+a_{23} & a_{24} & \cdots & 0 & 1 & 0 & & & \\
1 & 1 & 1+a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 & 0 & 1 & & & 0 \\
0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 & 0 & 0 & & 1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & & \ddots \\
0 & & & & & & & & & & 1
\end{array}$$

由定理4-4-4，列2和列1′一定相等，故$[N\ U]$不是一个最小不可实现矩阵。因此$a_{22}\neq a_{32}$。不失一般性，设$a_{22}=1$，$a_{32}=0$，

$$[N\quad U]=\left[\begin{array}{ccccc|cccccc}
1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & & & \\
1 & 1 & a_{23} & a_{24} & \cdots & 0 & 1 & 0 & & & \\
1 & 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 & 0 & 1 & & & 0 \\
0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\
0 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]$$

类似地，$a_{23}\neq a_{33}$。由定理4-4-5，这一结论对$[N'U]$也为真。因此$a_{22}\neq a_{23}$，$a_{32}\neq a_{33}$。于是行

$$[N\,U]=\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ \\
\end{array}
\begin{array}{ccccc|cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & & 1' & 2' & 3' & & & \\
1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & & & \\
1 & 1 & 0 & a_{24} & \cdots & 0 & 1 & 0 & & & \\
1 & 0 & 1 & a_{34} & \cdots & 0 & 0 & 1 & & & 0 \\
0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 & 0 & 0 & & 1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & & \ddots \\
0 & & & & & & & & & & 1
\end{array}$$

假定$a_{42}\neq a_{43}$。不失一般性，设$a_{42}=1$，$a_{43}=0$，则交换列2和列1′，并将行1加到行2、4，使所得矩阵成为正规形式，如此作下去，在列3中将至少产生四个1。这样，由定理4-4-4，$[N\,U]$

不是一个最小不可实现矩阵。因此$a_{42}=a_{43}$。

如果 $a_{42}=a_{43}=1$，我们有

$$[N\ \ U]=\left[\begin{array}{cccccccccccc}1&1&1&0&\cdots&1&0&0&&&&\\1&1&0&a_{24}&\cdots&0&1&0&&&&\\1&0&1&a_{34}&\cdots&0&0&1&&&&0\\0&1&1&a_{44}&\cdots&0&0&0&&1&&\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&0&&\ddots&\\0&&&&&&&&&&&1\end{array}\right]$$

可以看出，N_4^1是这个矩阵的一个子矩阵，故[$N\,U$]不是一个最小不可实现矩阵。因此 $a_{42}=a_{43}=0$。若对 $r>4$，任一$(r,2)$元是 1，我们可以将行 r 和行 4 变换，然后交换属于U的列，使所得矩阵成为正规形式。这样，$a_{42}=a_{43}=0$ 就意味着对 $r=4,5,\cdots$，$a_{r2}=a_{r3}=0$，当 $s\geqslant4$ 时，考虑[$N'U$]，这一结论对a_{2t}和 a_{3t}也为真，于是我们有

$$[N\ \ U]=\left[\begin{array}{cccccc|ccc|c}1&1&1&0&\cdots&0&1&0&0&\\1&1&0&0&\cdots&0&0&1&0&0\\1&0&1&0&\cdots&0&0&0&1&\\0&0&0&&&&0&0&0&\\\vdots&\vdots&\vdots&&N'&&\vdots&\vdots&\vdots&U'\\0&0&0&&&&0&0&0&\end{array}\right]$$

若[$N\,U$]不是割集矩阵，我们可以看出，[$N'U'$]一定不是割集矩阵。因此，当$a_{13}=1$时，[NU]不是一个最小不可实现矩阵。

对于$a_{13}=0$，[$N\,U$]变成

$$[N\ \ U]=\left[\begin{array}{cccccc|c}1&1&0&0&\cdots&0&\\1&a_{22}&a_{23}&a_{24}&\cdots&&\\1&a_{32}&a_{33}&a_{34}&\cdots&&U\\0&&&&&&\\\vdots&&&&&&\\0&&&&&&\end{array}\right]$$

如果 $a_{22}=a_{32}$，$[NU]$ 不可能成为一个最小不可实现矩阵。因此 $a_{22}=1$，$a_{32}=0$，即

$$[N\ \ U]=\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 1 & 1 & a_{23} & & & & \\ 1 & 0 & a_{33} & & & & U \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{array}\right]$$

若$a_{23}=1$，$[NU]$与 $a_{13}=1$ 时的形式相同。并且，若对 $p>3$，N 中元素$(2,p)$是 1，我们可以把它移到 (2，3) 位置。所以在N中 $a_{23}=a_{24}=\cdots=0$。但是这样就使N的行 1 和行 2 相同了。故在 $a_{13}=0$ 时，$[NU]$ 不是最小不可实现矩阵。现在我们可以断定，最小不可实现矩阵不存在。这就证明了定理4-4-6。　　（证毕）

我们可以看出，任何一个满足条件 1，2 而不是基本割集矩阵的矩阵，都可以被缩成为满足条件4的矩阵。因此定理 4-4-6 意味着，任一不是基本割集矩阵的矩阵都不满足条件 1 和 2。这就是定理 4-4-3 的逆。

定理4-4-7（托特）　矩阵 $[NU]$ 是一个基本割集矩阵，当且仅当$[NU]$的任何正规形式都不包含：(1)$[N_0U_0]$；(2)$[N_0'\vdots U_0']$；(3)库拉托斯基的两个基本非平面图中任一个的基本回路矩阵。

由式(3-4-24)给出的割集矩阵和回路矩阵之间的关系，定理4-4-7可修改如下。

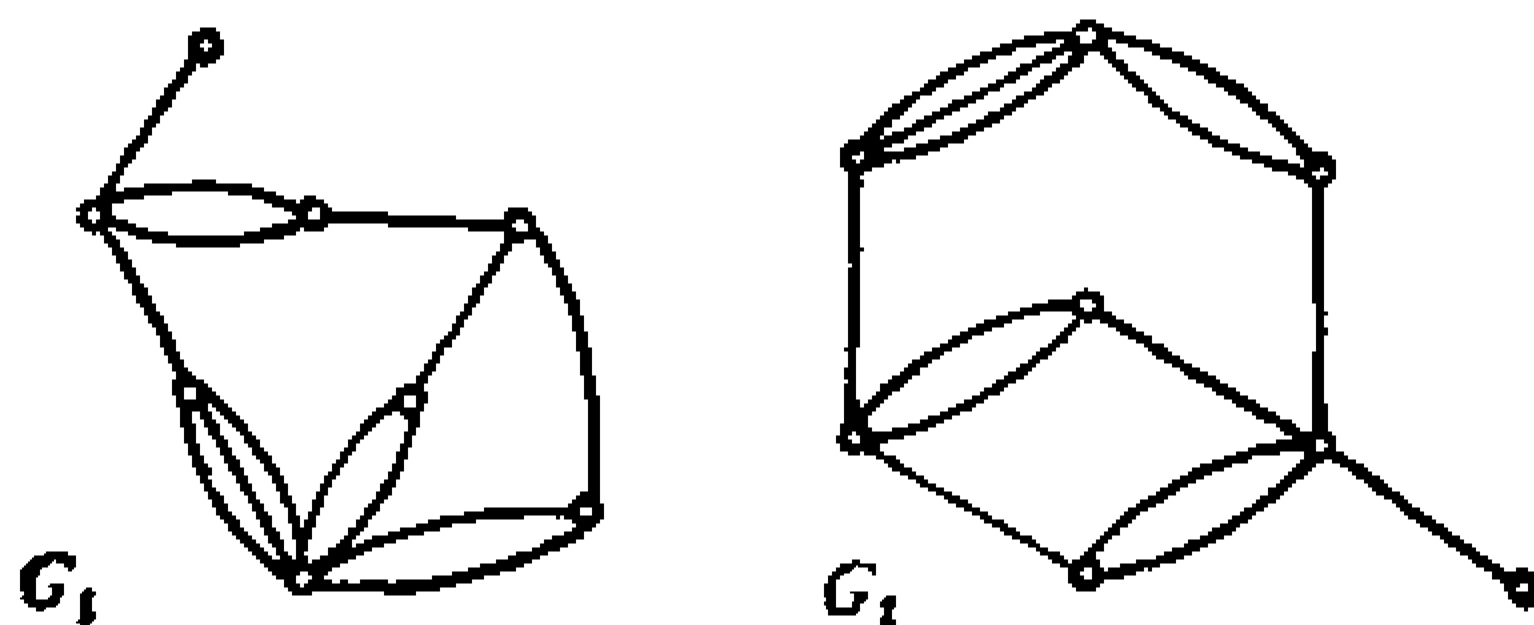
定理4-4-8　矩阵 $[NU]$ 是一个基本回路矩阵，当且仅当$[NU]$的任何正规形式都不包含：(1)$[N_0U_0]$；(2)$[N_0'\vdots U_0']$；(3)库拉托斯基的两个基本非平面图中任一个的基本割集矩阵。

习　　题

1. 设Q_1和Q_2分别是线图G_1和G_2的割集矩阵，假定$Q_1=DQ_2$，其中D是一个由 1 和 0 组成的非奇异矩阵．我们可以说G_1和G_2是互为2-同构的吗？

2. 几个不同的线图可能有相同的基本割集矩阵吗？

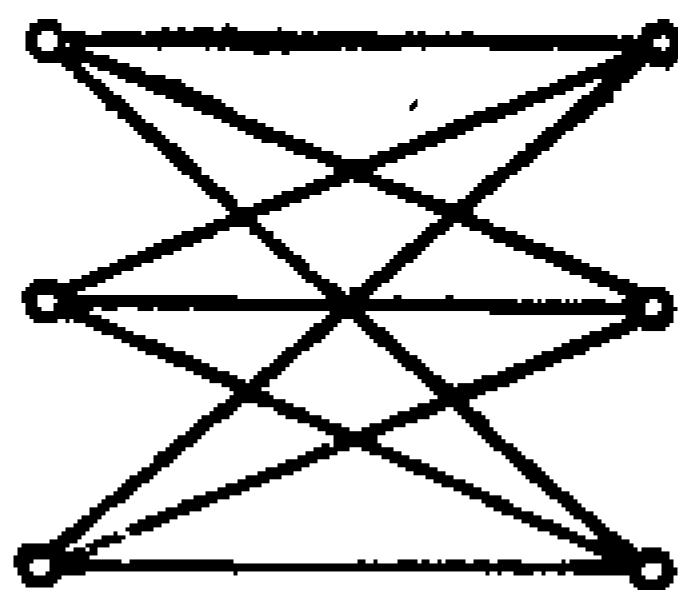
3. 判断图P-4-3中的两个线图是否互为2-同构。



图P-4-3

4. 不画出线图，怎样判断它是否为一个平面图？

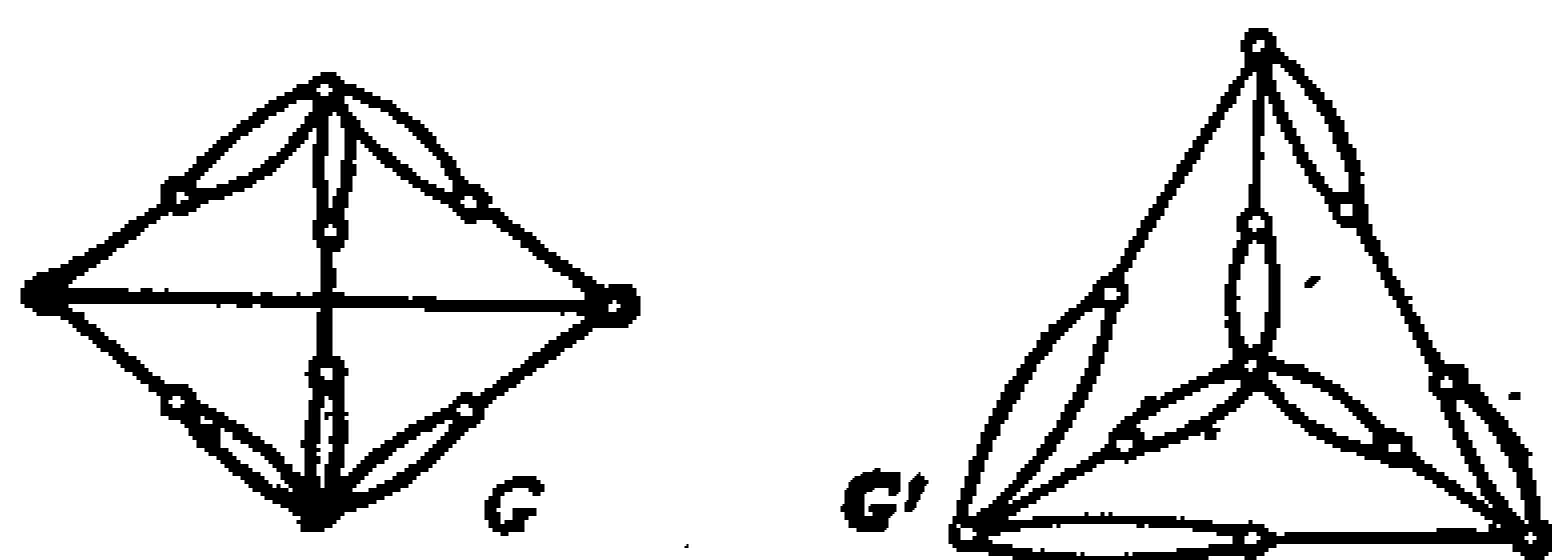
5. 图P-4-5中的线图是平面的吗？



图P-4-5

6. 叙述一种判断两个线图是否同胚的简单办法。

7. 判断图P-4-7中的线图G和G'是否同胚。



图P-4-7

8.设G_1和G_2都是线图，它们的基本回路矩阵分别是B_1和B_2。假定B_1（非空）可由删除B_2的某些行和零列得到。我们可以对G_1和G_2下什么结论？

9.如果一个线图中每一个顶点的度都是3，则称此线图为3度图。图4-3-14所示库拉托斯基的两个基本非平面图之一，就是一个3度图，记此图为N_3。证明或否定，如果3度图G的一个割集矩阵不包含N_3的割集矩阵为其子矩阵，则G是平面的。

10.证明引理4-4-1。

第五章　特殊割集和伪割

5-1　分离两个确定顶点的割集

现在，我们要考虑这样一个问题，在一个连通线图G中，我们要删去一部分边，以破坏两个顶点i和j之间的所有路径。设H是一个边集合，如果从G中删去H的所有边，就能破坏$\{P_{ij}\}$里所有的路径，那么G中i和j之间的任一条路径，至少有一条边在H中。这里，$\{P_{ij}\}$是顶点i和j之间所有路径的集体（见定义1-4-3）。

让我们看看删去H的全部边后所得到的图G'。G'必至少包含两个最大连通子图（它们有可能仅是一些孤立的顶点），这两个子图之一包含顶点i，而另一个包含顶点j。因此G'的秩至少要比G的秩少1。这说明集合H中有一个子集是割集。在式(2-2-5)中，我们已经知道，从线图G中删去割集$S=\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$的所有边，将产生两个子图$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)$和$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_1)$。如果$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)$包含顶点$i$，而$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_1)$包含顶点$j$，则删除$S$中全部边将破坏$i$和$j$之间的所有路径。因此，要使集合$H$成为满足下面性质的最小边集：若删去其中所有的边，就将破坏$\{P_{ij}\}$中所有的路径，那么，H一定是一个特殊的割集$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$，它使得$i\in\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_1)$，$j\in\mathscr{E}(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_1)$。为了叙述的方便，我们采用如下定义。

定义5-1-1　对于割集$S=\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$，如果$i\in\Omega_1$，$j\in\bar{\Omega}_1$，那么就说$S$分离了顶点$i$和$j$。

由这个定义，我们可以说，要使集合H是一个能破坏i，j

间所有路径的最小集合，H必定是一个分离顶点 i 和 j 的割集。

定理5-1-1 如果在一个连通线图G中，删去集合 S 的全部边，将破坏顶点 i 和 j 之间的所有路径，但若只删去S的一部分而非全部边，则不能破坏 i 和 j 之间的所有路径，那么S是一个分离 i 和 j 的割集.反之，如果从线图G中删去割集$S=\mathscr{S}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$的所有边，那么将破坏从$\Omega_1$中一个顶点到 $\bar{\Omega}_1$ 中一个顶点的全部路径。

为了表明一个割集是否分离两个确定的顶点，我们采用符号$S(i;j)$ 和 $S(ij;.)$把割集分成两类。

定义5-1-2 符号$S(i;j)$表示分离顶点 i 和 j 的一类割集，符号$S(ij;.)$表示不分离顶点 i 和 j 的一类割集.

例5-1-1 考虑图5-1-1所示的线图。设$\Omega_1=(1, 2)$，则割集$S=\mathscr{S}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$ 由边 b，c，d 组成。因为顶点 1 在Ω_1中，顶点 3 在$\bar{\Omega}_1$中，所以割集S分离顶点 1 和顶点 3，我们用符号$S(1;3)$表示之。另一方面，如果我们感兴趣的顶点是 1 和 2，那么割集S就不会分离它们，我们用符号$S(12;.)$表示之。如果设$S_1=(a, b, c)$，那么可以看出，S_1不分离顶点 1 和 3，于是我们用符号$S(13;.)$表示之。

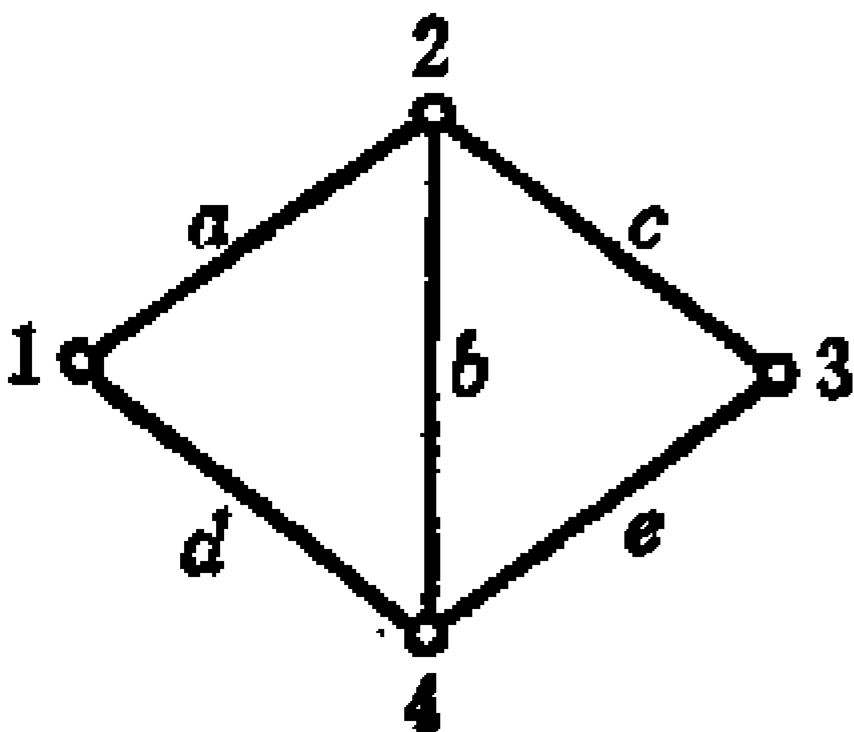


图5-1-1 一个线图

经常会有这样的需要：对于两个确定的顶点，要找出分离它们的所有割集。如果我们能从一个线性无关割集的集合来生成这些割集，比起直接从一个线图中找出所有这样的割集来，可能要简单些。

在 2-3 节中，我们曾得到一个结论：集体$\{S\}$是环和运算下的阿贝尔群。并且，在$\{S\}$中有 $n_v-\rho$ 个生成元，由它们经环和运算可以生成$\{S\}$中所有的集合。显然，分离顶点 i 和 j 的割集

也都在$\{S\}$中。但是，为了只把这些分离顶点 i 和 j 的割集找出来，还必须知道关于$S(i;j)$和$S(ij;.)$这两类割集的某些东西，即

1.如果我们对$S(i;j)$类中的两个割集作环和,〔或者对$S(ij;.)$类中的两个割集作环和〕*,将得到哪一类的割集？

2.$S(i;j)\oplus S(ij;.)$是哪一类的割集？

我们知道，两个割集的环和可能是一个割集，也可能是割集的无重边并。不过，我们首先要来研究两个割集的环和是割集的情况。

定理5-1-2 如果两个割集的环和 $S_1(i;j)\oplus S_2(i;j)$ 是一个割集，那么这个割集不把顶点 i 和 j 分离开。如果 $S_1(i;j)\oplus S_2(ij;.)$ 是割集，那么它把顶点 i 和 j 分离开。如果两个割集的环和$S_3(ij;.)\oplus S_4(ij;.)$是割集，那么它不把顶点 i 和 j 分离开.

证明： 对于第一部分的证明，我们可考虑图 2-3-1 所示的线图。假定顶点 i 在 Ω_{11} 里，顶点 j 在 Ω_{22} 里。因此 $S_1(i;j)$ 和 $S_2(i;j)$由式(2-3-13)和式 (2-3-14) 给出，其中 $\Omega_1=\Omega_{11}\cup\Omega_{12}$，$\Omega_2=\Omega_{11}\cup\Omega_{21}$。于是，用$\Omega$代替$\Omega_c$，据式（2-3-17），

$$S_1(i;j)\oplus S_2(i;j)=\mathscr{E}(\Omega_3\times\bar{\Omega}_3) \qquad (5\text{-}1\text{-}1)$$

其中$\Omega_3=\Omega_{11}\cup\Omega_{22}$。因为顶点 i 和 j 都在Ω_3中，故定理的第一部分是正确的。用同样的方法，易证定理的第二、三部分。（证毕）

例如，考虑图5-1-2所示的线图。可以看出，割集$S_1=(a,d)$不分离顶点 i 和 j，但割集 $S_2=(b,d)$ 分离顶点 i 和 j。由于$S_1\oplus S_2$也是割集,故据定理 5-1-2,$S_1\oplus S_2=S_4$分离顶点 i 和 j。

我们已经看到，所有的割集，割集的无重边并和空集的集体$\{S\}$构成一个阿贝尔群。在$\{S\}$中，有 $n_v-\rho$ 个生成元（线性无关割集)，它们能生成$\{S\}$中的所有元素。例如，在图5-1-2所示的线图中，用割集S_1，S_2，S_3即可将$\{S\}$中所有元素表示为：

---

* 括号中一句是译者加的，以与下文一致．——译注

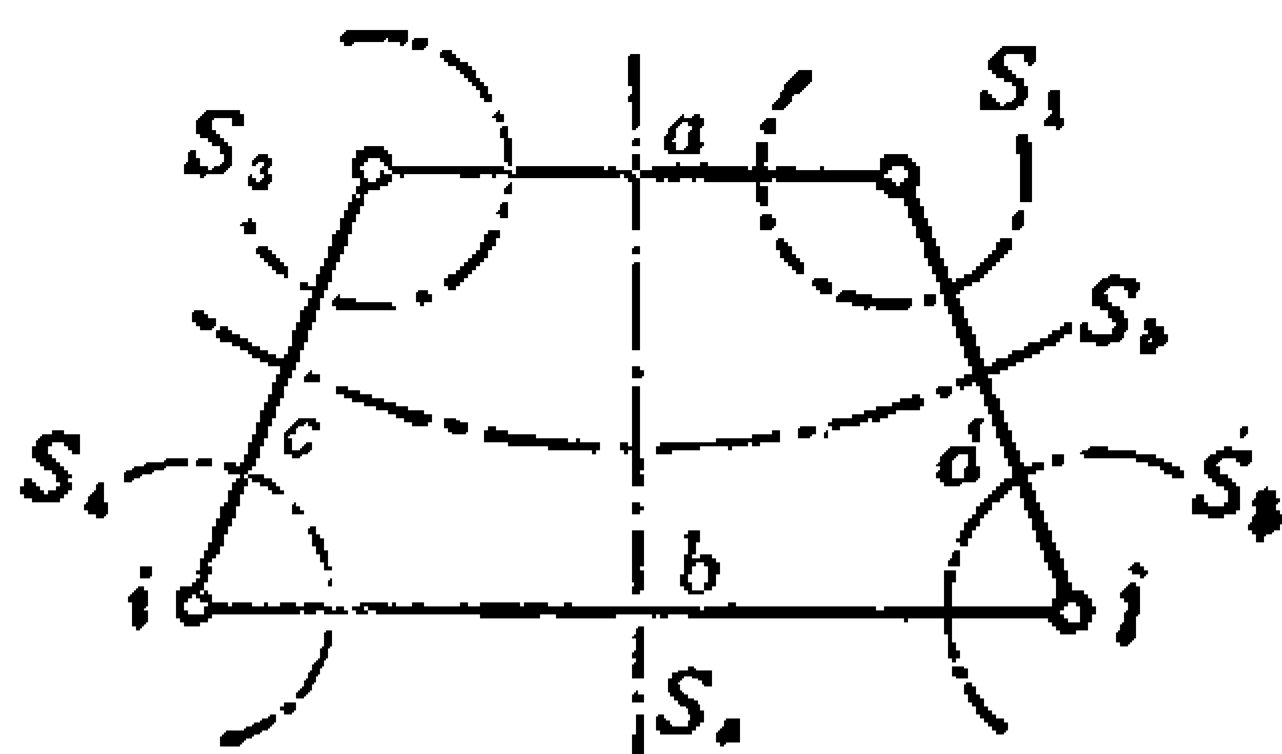


图5-1-2　一个线图

$$\{S\}=\{\phi,\ S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_1\oplus S_2,\ S_1\oplus S_3,\ S_2\oplus S_3,\ S_1\oplus S_2\oplus S_3\}$$

可以看出，S_2，$S_1\oplus S_2$ 和 $S_1\oplus S_2\oplus S_3$ 都是分离顶点 i 和 j 的割集。如果我们把割集的无重边并$S_2\oplus S_3$也算进去，则集体

$$\{S(i;j)\}=\{S_2,\ S_1\oplus S_2,\ S_2\oplus S_3,\ S_1\oplus S_2\oplus S_3\}$$

具有这样的性质：其中每一个元都包含S_2。注意，在我们所选取的线性无关割集 S_1，S_2，S_3 中，只有 S_2 是分离了顶点 i 和 j 的。并且，分离 i 和 j 的全部割集的集体为 $\min\{S(i;j)\}$ （见定义1-6-1）。但是，在定理5-1-2中，并没有考虑$S_2\oplus S_3$ 和 $S_1\oplus S_2\oplus S_3$这样两种情况。因此，我们还要补充研究这两种情形：（1）两个割集的环和不是割集；（2）三个以上割集的环和。下面几个定理给出了当所得结果不是割集时，两个割集环和的性质。

定理5-1-3　如果两个割集的环和 $S_1(i;j)\oplus S_2(ij;.)$ 不是割集，则它可表示为割集 S'_1，S'_2，…，S'_p 的无重边并，使得在 S'_1，S'_2，…，S'_p中，恰有一个分离顶点 i 和 j 的割集。

证明：假定 $S_1(i;j)$ 和 $S_2(ij;.)$ 分别由式（2-3-13）和式(2-3-14)表示。并设顶点 i 在Ω_{11}中，顶点 j 在Ω_{21}中，其中$\Omega_1=\Omega_{11}\cup\Omega_{12}$，$\Omega_2=\Omega_{11}\cup\Omega_{21}$。于是，用$\Omega$代替$\Omega_c$，据式（2-3-17），删除$S_1(i;j)\oplus S_2(ij;.)$中所有边得到的图由$\mathscr{G}(\Omega_3\times\Omega_3)$和$\mathscr{G}(\bar{\Omega}_3\times$

$\bar{\Omega}_3$）所构成，其中 $\Omega_3=\Omega_{11}\cup\Omega_{22}$。我们注意到，$i\in\Omega_3$，$j\in\bar{\Omega}_3$。假定$\mathscr{E}(\Omega_3\times\Omega_3)$由 k 个最大连通子图所构成，而$\mathscr{E}(\bar{\Omega}_3\times\bar{\Omega}_3)$由 m 个最大连通子图构成，如图2-3-7所示。不失一般性，设$i\in g_{a1}$，$j\in g_{b1}$。而且，在图2-3-8中，由g_{c1}包含g_{b1}，故顶点 j 在 g_{c1}中。于是，从图2-3-8中，我们可以看出，$\mathscr{E}(\Omega_{a1}\times\bar{\Omega}_{a1})$里有一个割集分离了顶点 i 和顶点 j。设这个割集是S'_1。显然，在割集的无重边并 $S_1(i;j)\oplus S_2(ij;.)$ 的各个割集中，S'_1 是唯一的一个分离顶点 i 和顶点 j 的割集。（证毕）

考虑图 5-1-2 所示的线图。设 $S_a(i;j)=(a,b)$，$S_b(ij;.)=(c,d)$，则$S_a\oplus S_b=(a,b,c,d)$，它是割集的无重边并。这里有一个问题，即这个割集的无重边并是由哪些割集组成的。显然，构成这个割集的无重边并的一个割集集合，就由$S_a(i;j)$和$S_b(ij;.)$组成。另一个集合可看作 $S_1=(a,d)$ 和 $S_4=(b,c)$。还有一个集合是$S_2=(b,d)$和$S_3=(a,c)$。换句话说，割集的无重边并（a，b，c，d）可以分别看成下面几组割集的无重边并：（1）S_a和S_b，（2）S_1和S_4，（3）S_2和 S_3。定理5-1-3说明，在这几组割集中，一定有一组，其中恰包含一个分离 i 和 j 的割集。下面的定理告诉我们，这几组割集中，任何一组都恰包含一个分离 i 和 j 的割集。

定理5-1-4 假定在一个线图G中，顶点 i 和 j 之间存在一条路径。如果两个割集的环和$S_1(i;j)\oplus S_2(ij;.)$不是一个割集，则无论将$S_1(i;j)\oplus S_2(ij;.)$表示为怎样一个割集的无重边并，其中总恰有一个割集，是分离顶点 i 和 j 的。

证明： 与定理 5-1-3 的证明作同样的假设，则可得到图 2-3-7 和图 2-3-8 所示的线图。注意，顶点 j 在g_{b1}中。由于边集$\mathscr{E}(\Omega_{a1}\times\Omega_{b1})$的边都在 $S_1(i;j)\oplus S_2(ij;.)$中，而构成这个割集的无重边并的各个割集之间，没有公共的边，所以这个边集一定恰好在其中的一个割集之中。另一方面，为了分离顶点 i 和 j，割

集中必然要包含集合$\mathscr{E}(\Omega_{a1}\times\Omega_{b1})$。 （证毕）

对于两个割集的环和$S_1(i;j)\oplus S_2(i;j)$及$S_1(ij;.)\oplus S_2(ij;.)$，如果所得的结果不是一个割集，则有以下定理。

定理5-1-5 如果两个割集的环和$S_1(i;j)\oplus S_2(i;j)$不是一个割集，那么它可以表示为割集S'_1，S'_2，…，S'_p的无重边并，其中，或者恰有两个分离顶点i和j的割集，或者没有分离i和j的割集。

证明： 我们采用与定理 5-1-3 的证明相同的假设，只是这时$j\in\Omega_{22}$。因此，在图 2-3-7 所示的线图中，顶点i和j有两种可能的位置。假定顶点i和j都在g_{a1}中，则显然$S'_1,S'_2\cdots,S'_p$都不分离顶点i和j。假定顶点i在g_{a1}中，顶点j在g_{a2}中，则由定理5-1-3的证明，显然在$\mathscr{E}(\Omega_{a1}\times\bar{\Omega}_{a1})$中恰有一个割集分离顶点$i$和$j$，在$\mathscr{E}(\Omega_{a2}\times\bar{\Omega}_{a2})$中也恰有一个割集分离顶点$i$和$j$。因此，我们选取这些割集来构成割集的无重边并时，其中恰有两个分离顶点i和j的割集。 （证毕）

定理5-1-6 如果两个割集的环和$S_1(i;j)\oplus S_2(i;j)$不是一个割集，则无论将$S_1(i;j)\oplus S_2(i;j)$表示成怎样一个割集的无重边并，其中或者恰包含两个分离顶点i和j的割集，或者不包含分离顶点i和j的割集。

证明： 我们采用与定理 5-1-5 的证明相同的假设。当顶点i和j都在g_{a1}中时，显然没有分离顶点i和j的割集。因此，我们假定顶点$i\in g_{a1}$，顶点$j\in g_{a2}$。在图2-3-9中，由于对$r=1$，2，…，n，g_{a2}必在g_{cr}中的某一个里，故我们假定g_{a2}在g_{c1}里，如图5-1-3所示。

在g_{c1}中，把从g_{a1}和g_{a2}的顶点连接到g_{c1}里除g_{a2}外的那些顶点的边删去，则所得图的最大连通子图是g_{d1}，g_{d2}，…，g_{du}以及g_{a2}。换句话说，当$\mathscr{E}(\Omega_{a1}\times\Omega_{d1})$，$\mathscr{E}(\Omega_{a1}\times\Omega_{d2})$，…，$\mathscr{E}(\Omega_{a1}\times\Omega_{dl})$，$\mathscr{E}(\Omega_{d1}\times\Omega_{a2})$，$\mathscr{E}(\Omega_{d2}\times\Omega_{c2})$，…，$\mathscr{E}(\Omega_{du}\times\Omega_{a2})$（其中，

对$r=1, 2, \cdots, u$，Ω_{dr} 是 g_{dr} 中所有顶点的集合）被删去时，这些子图变成g_{c1}的最大连通子图。注意，从g_{e1}中顶点到 g_{c1} 中顶点的边，都是与g_{d1}，g_{d2}，$\cdots$，g_{dt} 中顶点相连的边。另一个方面，由于我们假设g_{c1}是连通的，故从g_{e2}中顶点连接到 g_{c1} 中其余的顶点的边，就是与子图 g_{d1}，g_{d2}，$\cdots$，g_{dt}，g_{dt+1}，$\cdots$，g_{du} 的各顶点相连的边。

可以看出，由 $\mathscr{E}(\Omega_{e1}\times\Omega_{d1})$，$\mathscr{E}(\Omega_{e1}\times\Omega_{d2})$，$\cdots$，$\mathscr{E}(\Omega_{e1}\times\Omega_{dt})$，$\mathscr{E}(\Omega_{e2}\times\Omega_{d1})$，$\mathscr{E}(\Omega_{e2}\times\Omega_{d2})$，$\cdots$，$\mathscr{E}(\Omega_{e2}\times\Omega_{dt})$ 中的边组成的割集的无重边并，不论以何种方式组成，或者包含两个分离 i 和 j 的割集，或者不包含分离 i 和 j 的割集。我们还可以看出，由其余的边组成割集的无重边并，无论以何种方式组成，都不可能有分离 i 和 j 的割集。因此定理为真。 （证毕）

定理5-1-7 如果两个割集的环和$S_1(ij;.)\oplus S_2(ij;.)$不是一

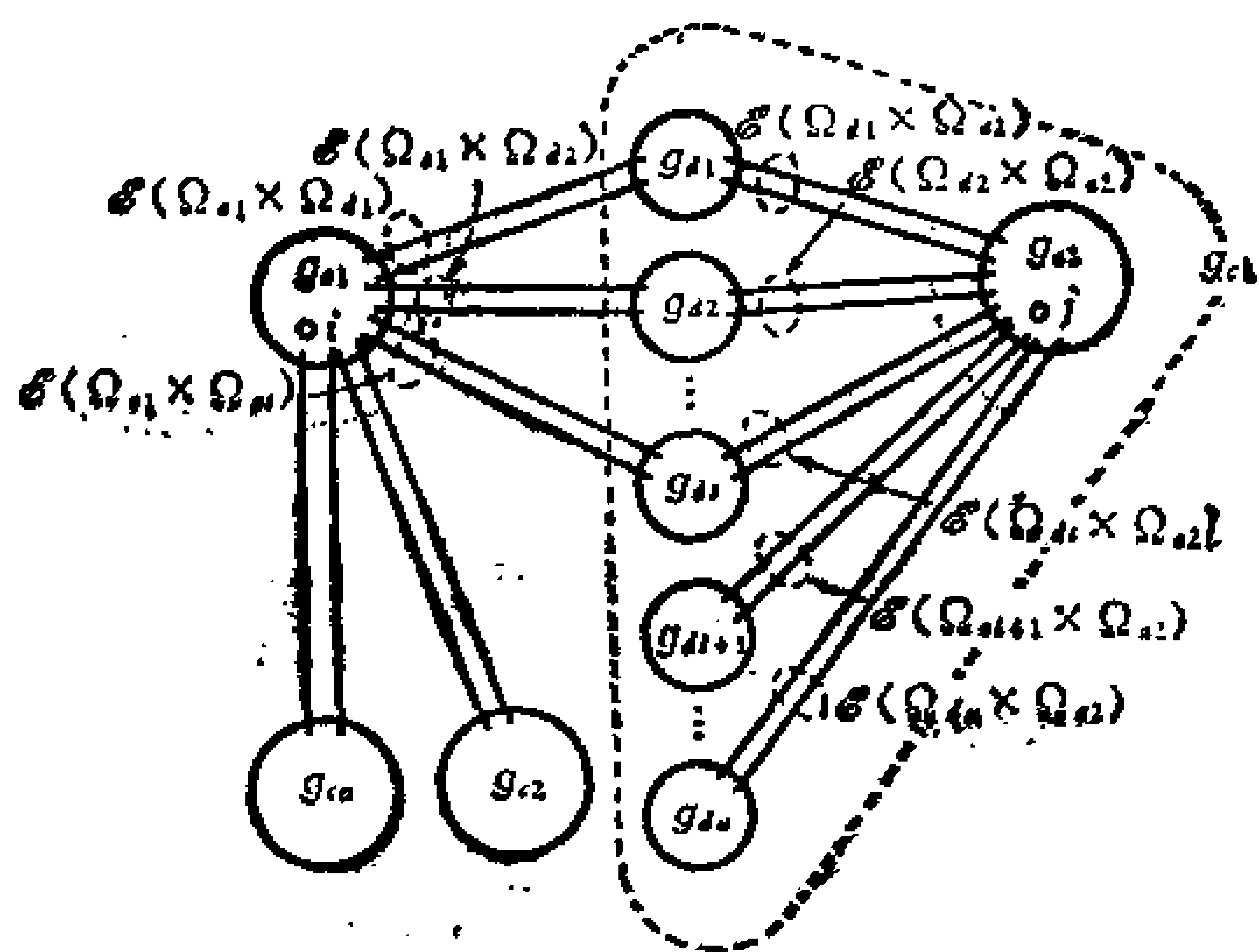


图5-1-3 最大连通子图g_{d1}，g_{d2}，$\cdots$，g_{du}

个割集，那么无论将 $S_1(ij;.)\oplus S_2(ij;.)$ 表示成怎样一个割集的无重边并，其中或者恰包含两个分离顶点 i 和 j 的割集，或者没有分离顶点 i 和 j 的割集*。

这个定理的证明与定理 5-1-6 的证明相似。

在图5-1-4中，有两个线图。图5-1-4(a)是 $S_1(i;j)\oplus S_2(i;j)$ 的一个例子，它表明了 $S_1(i;j)\oplus S_2(i;j)$ 的两种可能的表示方法，即我们可以取 S_{a1} 和 S_{a2} 来构成这个割集的无重边并，也可以取 S_{b1} 和 S_{b2} 来构成这个割集的无重边并。注意，S_{a1} 和 S_{a2} 都分离顶点 i 和 j，而 S_{b1} 和 S_{b2} 都不分离顶点 i 和 j。

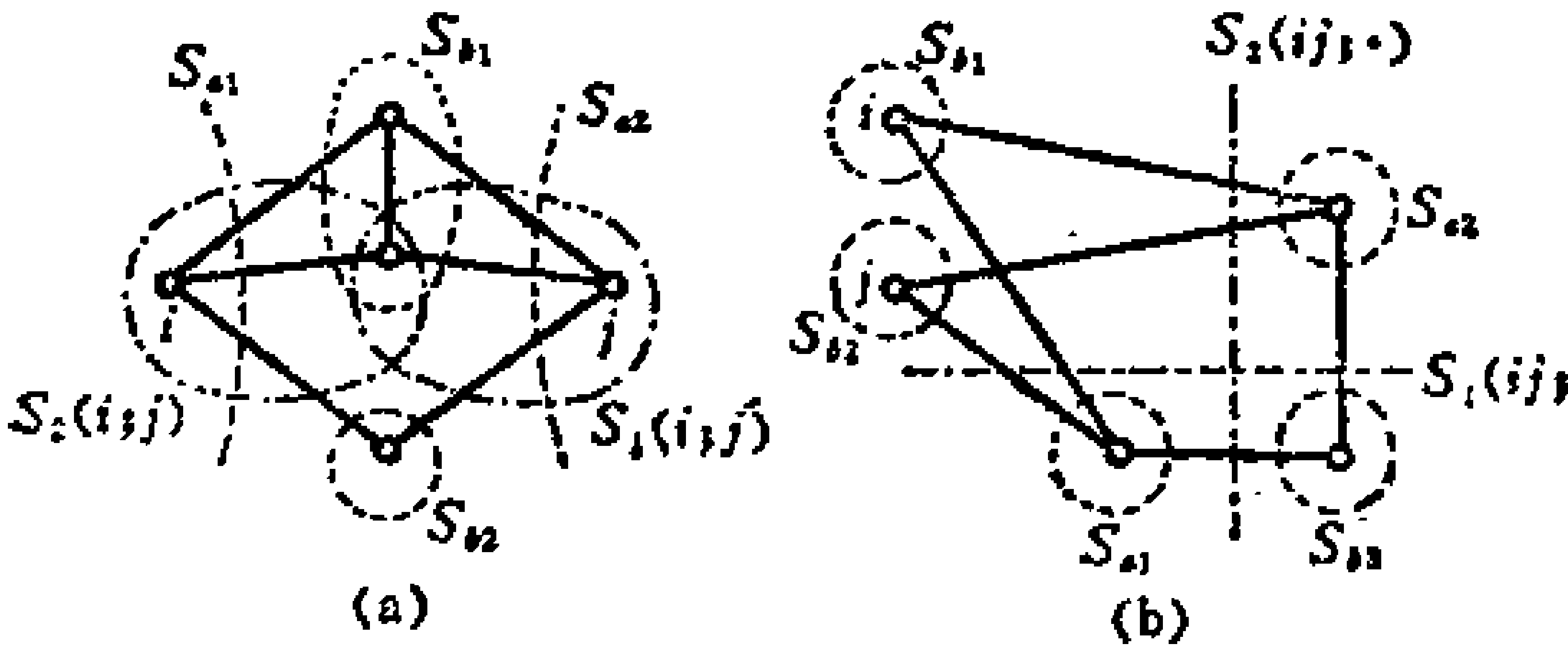


图5-1-4

(a) $S_1(i;j)\oplus S_2(i;j)$ 的例子；(b) $S_1(ij;.)\oplus S_2(ij;.)$ 的例子

在图5-1-4(b)中，将 $S_1(ij;.)\oplus S_2(ij;.)$ 表示为割集的无重边并，有三种不同的选择割集的方法。因为 $S_1(ij;.)$ 和 $S_2(ij;.)$ 没有公共边，故这两个割集就可以组成一个割集的无重边并。如果取 S_{a1} 和 S_{a2}，二者都不分离顶点 i 和 j，我们又得到 $S_1(ij;.)\oplus S_2(ij;.)$ 的一种表示法。如果我们用 S_{b1}，S_{b2} 和 S_{b3} 来表示 $S_1(ij;.)\oplus S_2(ij;.)$，就得到恰有两个割集分离顶点 i 和 j 的情形。

正如我们早先所讨论的，每一个割集都可以表示为一些生成

---

* 定理最后一句，照原文直译为"或者包含若干个分离顶点 i 和 j 的割集"，疑有误，现据上下文作了改动。——译注

元的环和。显然分离两个确定顶点的割集也可以用同样的方法来表示。因此，为了由一些生成元的环和来生成分离两个确定顶点的所有割集，我们应当了解三个以上割集的环和，而这又相当于了解两个割集的无重边并的环和。为此，我们把符号 $S(i;j)$ 和 $S(ij;.)$的定义推广如下。

定义5-1-3 如果集合 $S=\mathscr{S}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$ 具有这样的性质：$i\in\Omega_1$，$j\in\bar{\Omega}_1$，则说S分离了 i 和 j，记为 $S(i;j)$；如果集合 $S=\mathscr{S}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$ 具有这样的性质：i 和 j 都在Ω_1（或$\bar{\Omega}_1$）中，则 S 不把 i 和 j 分离开，记为$S(ij;.)$。注意，这里S是一个割集，或者是一个割集的无重边并。

用这个定义，可以将定理 5-1-2 到定理 5-1-7 推广为如下形式。

定理5-1-8 $S_1(i;j)\oplus S_2(i;j)$ 与 $S'_1(ij;.)\oplus S'_2(ij;.)$的环和不分离顶点 i 和 j，而$S''_1(i;j)\oplus S''_2(ij;.)$分离顶点 i 和 j。

这个定理的证明与前面几个定理的证明是相同的。

在一个线图G中，假定每一个顶点代表一个岛，每一条边代表两个岛之间的一座桥。于是问题就变成：要使两个指定的岛 i 和 j 之间没有路径，找出必须破坏的桥的最少数目。为了回答这个问题，我们定义边集合S的值为这个集合中边的数目，记为$V[S]$。又设$\{S^0(i;j)\}$是分离 i 和 j 的所有割集的集合，$\{S(i;j)\}$是所有分离 i 和 j 的割集和割集的无重边并的集合。那么，被破坏的桥的最少数目N是

$$N=\min\{V[S];S\in\{S^0(i;j)\}\} \tag{5-1-2}$$

对于任何一个分离顶点 i 和 j 的割集的无重边并S，总存在一个割集S'，它是S的真子集，并且分离顶点 i 和 j。因此

$$\min\{V[S];S\in\{S^0(i;j)\}\}=\min\{V[S];S\in\{S(i;j)\}\} \tag{5-1-3}$$

这样，我们只需要生成 $\{S(i;j)\}$ 中所有的集合即可，而无需

知道它们中哪些是割集。作为一个例子，我们考虑图 5-1-5 中的图G。据定理 3-1-4，要生成一个图中所有的割集和割集的无重边并，我们只要知道 n_v-1 个线性无关的关联集即可。在这个例子里，$n_v=5$。假定我们选取下列关联集作为 n_v-1 个线性无关的集合：

$$S(i)=(1,2,3,4)$$
$$S(j)=(5,6,7,8)$$
$$S(v_1)=(3,5,6)$$
$$S(v_2)=(2,7,9)$$

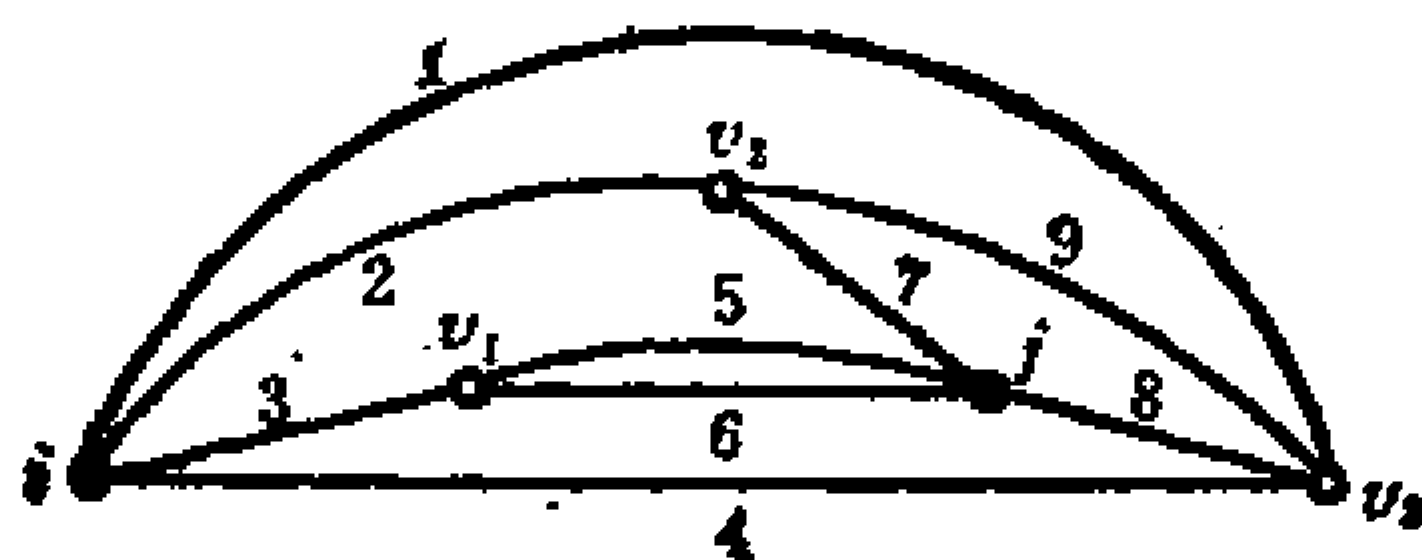


图5-1-5 线图G及顶点 i 和 j

据定理5-1-8，$\{S(i;j)\}$中任一集合必须包含$S(i)$或$S(j)$，但不能同时包含这两个割集。注意，在这些线性无关集合中，只有$S(i)$和$S(j)$分离顶点 i 和 j。因此我们可取$S(i)$或$S(j)$，与另两个关联集$S(v_1)$和$S(v_2)$作各种可能的组合，来得到$\{S(i;j)\}$：

$$S(i)=(1,2,3,4)$$
$$S(i)\oplus S(v_1)=(1,2,4,5,6)$$
$$S(i)\oplus S(v_2)=(1,3,4,7,9)$$
$$S(i)\oplus S(v_1)\oplus S(v_2)=(1,4,5,6,7,9)$$
$$S(j)=(5,6,7,8)$$
$$S(j)\oplus S(v_1)=(3,7,8)$$
$$S(j)\oplus S(v_2)=(2,5,6,8,9)$$
$$S(j)\oplus S(v_1)\oplus S(v_2)=(2,3,8,9)$$

于是我们可以看出，$N=3$，应当破坏的桥是3，7，8。

割集类$S(i;j)$的重要应用之一，是用于通讯网络领域，其中，两个顶点之间的容量与$S(i;j)$类中的一个割集有直接的关系。这个内容，将在以后的章节中讨论。

5-2 伪　　割

考虑两个互相对偶的线图G_1和G_2。在4-3节中，我们曾发现，G_1的任一个回路对应于G_2的一个割集。这里，我们将介绍一种称为伪割的子图，它具有与路径相似的性质。并且，我们将看到，G_1中的任一路径与对偶图G_2中的一个伪割对应。我们从研究G_2中与G_1的一条路径对应的子图开始。

设e是G_1的一条边，其端点为顶点i和j。设e'是G_2中与边e对应的边。这里，G_1和G_2是互相对偶的。考虑G_1中顶点i和j之间的一条路径$P\ (\neq e)$。我们知道，$(e)\cup P$是G_1的一个回路，而G_2中存在一个与G_1的回路$(e)\cup P$对应的割集S。因此，G_2中与G_1的路径P对应的子图是$S\oplus(e')$。显然，该集合$S\oplus(e')$不是一个割集。我们称这样的集合为关于边e'的伪割。

在G_1中，考虑顶点i和j之间两条不同的路径P_1和P_2。假定P_1和P_2都不包含边e，则在G_2中存在两个伪割$S_1\oplus(e')$和$S_2\oplus(e')$，其中S_1和S_2分别是G_2中对应于G_1的回路$P_1\cup(e)$和$P_2\cup(e)$的割集。我们知道，$P_1\oplus P_2$或为回路，或为回路的无重边并，因此G_2中与$P_1\oplus P_2$对应的子图必为割集或割集的无重边并。由

$$[S_1\oplus(e')]\oplus[S_2\oplus(e')]=S_1\oplus S_2 \qquad (5\text{-}2\text{-}1)$$

根据定理2-3-2，我们可以看出，G_2中的对应子图确为割集或割集的无重边并。换句话说，关于同一条边的两个伪割的环和或为割集，或为割集的无重边并。前面，我们已定义了一个线图的路

径，不论这个线图是平面的还是非平面的。下面我们要定义关于一条边的伪割。

定义5-2-1 关于边e'的伪割U是一个边的集合，

$$U=S\oplus(e') \tag{5-2-2}$$

其中S或为包含边e'的割集，或为空集。

由这个定义，显然关于同一条边的两个伪割的环和或为割集，或为割集的无重边并。

为了简便，我们定义符号$\{S\}$和$\{S^0\}$如下。

定义5-2-2 符号$\{S\}$表示所有割集，割集的无重边并和空集的集体。符号$\{S^0\}$是所有割集和空集的集体。即

$$\{S^0\}=\min\{S\} \tag{5-2-3}$$

（见定义1-6-1）

现在，我们来进一步推广伪割的定义。

定义5-2-3 设U_1是$\{S\}$中一个集合的真子集，则集体$\{U\}_{U_1}$定义为

$$\{U\}_{U_1}=\min\{U_1\oplus S; S\in\{S\}\} \tag{5-2-4}$$

其中，$\{U\}_{U_1}$里的每一个集合称为关于U_1的伪割或集体$\{U\}_{U_1}$中的伪割。

由此定义，显然伪割不是割集。但是，关于U_1的两个伪割的环和，或为割集，或为割集的无重边并。为了说明这一点，设U_a和U_b在$\{U\}_{U_1}$中，则U_a和U_b可以表示为

$$U_a=U_1\oplus S_1 \tag{5-2-5}$$

$$U_b=U_1\oplus S_2 \tag{5-2-6}$$

其中S_1和S_2都在$\{S\}$中。因此

$$U_a\oplus U_b=U_1\oplus S_1\oplus U_1\oplus S_2=S_1\oplus S_2 \tag{5-2-7}$$

显然它或为割集，或为割集的无重边并。假定$U_a=U_1$，则

$$U_a\oplus U_b=U_1\oplus U_1\oplus S_2=S_2 \tag{5-2-8}$$

它仍是一个割集。

定理5-2-1 任意两个关于U_1的伪割的环和或为割集，或为割集的无重边并。

这个定理直接导出下一个定理。

定理5-2-2

$$\{U\}_{U_1}\otimes\{U\}_{U_1}=\{S^0\} \quad (5\text{-}2\text{-}9)$$

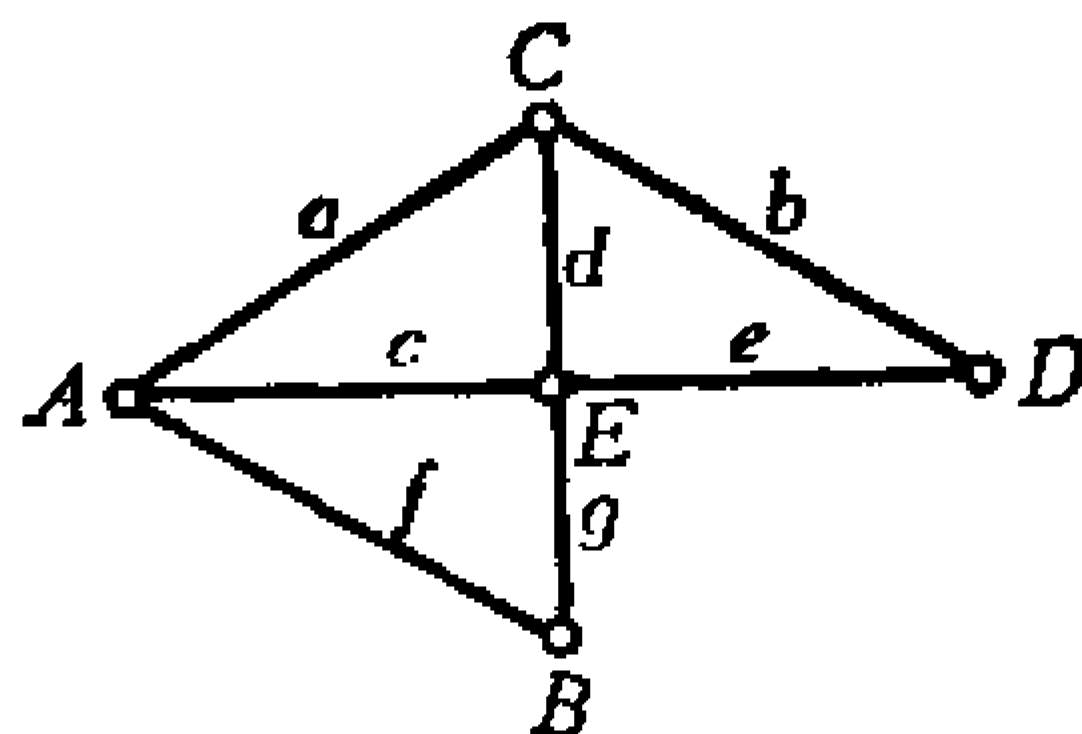


图5-2-1 一个线图

例5-2-1 考虑图5-2-1所示的线图，设$U_1=(a)$，则

$$\{U\}_a=\{(a),(c,f),(b,d),(d,e),(c,g)\}$$

$$\{U\}_a\otimes\{U\}_a=\{\phi,(a,c,f,),(a,b,d),(a,d,e),(a,c,g)\\(b,c,d,f),(c,d,e,f),(f,g),(b,e),\\(b,c,d,g),(c,d,e,g)\}$$

它是$\{S^0\}$．注意，从例2-3-3中我们知道，

$$\{S\}=\{\phi,(a,c,f),(a,b,d),(a,d,e),(a,c,g),(b,e),\\(f,g),(c,d,e,f),(a,b,c,e,f),(a,d,e,f,g),\\(b,e,f,g),(b,c,d,f),(c,d,e,g),(a,b,c,e,g)\\(a,b,d,f,g),(b,c,d,g)\}$$

在定义5-2-3中，集体$\{U\}_{U_1}$由$\min\{U_1\oplus S;S\in\{S\}\}$给出．如果$U_1$是$S$中的一个割集，则据定理2-3-2，$\min\{S\oplus S';S'\in\{S\}\}$显然等于$\{S^0\}$。

定理5-2-3 设S是$\{S\}$中的一个集合，则

$$\{S^0\}=\min\{S\oplus S';\ S'\in\{S\}\} \quad (5\text{-}2\text{-}10)$$

注意，如果我们在式(5-2-10)的右边将$\{S\}$换成$\{S^0\}$，可能就得不到等式，即我们只能说

$$\{S^0\}\supset\min\{S\oplus S';\ S'\in\{S^0\}\} \quad (5\text{-}2\text{-}11)$$

以下两个定理是显然的。

定理5-2-4

$$\{S^0\}\otimes\{S^0\}=\{S^0\} \tag{5-2-12}$$

定理5-2-5

$$\{U\}_{U_1}\otimes\{S^0\}=\{U\}_{U_1} \tag{5-2-13}$$

前面说过，如果路径P_1和P_2在$\{P_{ij}\}$（见定义1-4-3）中，则

$$\begin{aligned}\{P_{ij}\}&=\min\{P_1\oplus E;\ E\in\{E\}\}\\&=\min\{P_2\oplus E;\ E\in\{E\}\}\end{aligned}$$

（定理1-6-12）。现在我们看到，$\{U\}_{U_1}$有类似的性质。

定理5-2-6 设U_2在$\{U\}_{U_1}$中，则

$$\{U\}_{U_2}=\{U\}_{U_1} \tag{5-2-14}$$

证明： 因为U_2在$\{U\}_{U_1}$中，故存在一个割集S'，使得

$$U_2=U_1\oplus S' \tag{5-2-15}$$

于是

$$\begin{aligned}\{U\}_{U_2}&=\min\{U_2\oplus S;\ S\in\{S\}\}\\&=\min\{U_1\oplus S'\oplus S;\ S\in\{S\}\}\\&=\min\{U_1\oplus S'';\ S''\in\{S\}\}\end{aligned} \tag{5-2-16}$$

（证毕）

例如，在例 5-2-1 中，(c,f) 在$\{U\}_a$里，取 $U_1=\{c,f\}$，我们有

$$\begin{aligned}\{U\}_{(cf)}&=\min\{(c,f)\oplus S;\ S\in\{S\}\}\\&=\{(c,f),(a),(c,g),(d,e),(b,d)\}\end{aligned}$$

这一结果与$\{U\}_a$相同。

下面一个定理与考虑路径集体的定理 1-6-9 非常相似。

定理5-2-7 设S是$\{S\}$中的一个割集。又设U_1，U_2，…，U_k是S的真子集，在这些集合U_1，U_2，…，U_k中，任两个之间都没有公共边，并且所有这些集合U_1，U_2，…，U_k的并集是S。则

$$\{U\}_{U_1}\otimes\{U\}_{U_2}\otimes\cdots\otimes\{U\}_{U_k}=\{S^0\} \tag{5-2-17}$$

如果我们能证明下一个定理，就可以用归纳法来证明这个定理。

定理5-2-8 设U_0是一个割集的真子集。又设U_1和U_2是U_0的真子集，U_1和U_2没有公共边，且U_1与U_2的并集是U_0。则

$$\{U\}_{U_1} \otimes \{U\}_{U_2} = \{U\}_{U_0} \qquad (5\text{-}2\text{-}18)$$

证明： 我们要证明：（1）对任意的$U'_0 \in \{U\}_{U_0}$，存在$U'_1 \in \{U\}_{U_1}$和$U'_2 \in \{U\}_{U_2}$，使得$U'_1 \oplus U'_2 = U'_0$；（2）对任意的$U'_1 \in \{U\}_{U_1}$和$U'_2 \in \{U\}_{U_2}$，$U'_1 \oplus U'_2$在$\{U\}_{U_0}$中，或者$U'_1 \oplus U'_2$的一个真子集在$\{U\}_{U_0}$中。

对于（1），设

$$U'_0 = U_0 \oplus S' \qquad (5\text{-}2\text{-}19)$$

其中$S' \in \{S\}$。因为

$$U_1 \oplus U_2 = U_0 \qquad (5\text{-}2\text{-}20)$$

我们有

$$U_1 \oplus U_2 \oplus S' = U'_0 \qquad (5\text{-}2\text{-}21)$$

如果$U_1 \oplus S'$在$\{U\}_{U_1}$中，则因$U_2 \in \{U\}_{U_2}$，这两个伪割$U_1 \oplus S'$和U_2即为所求的两个集合。当$U_2 \oplus S'$在$\{U\}_{U_2}$中时，这个结论也正确。因此，我们只须考虑，既非$U_1 \oplus S' \in \{U\}_{U_1}$，又非$U_2 \oplus S' \in \{U\}_{U_2}$的情况。在这种情况下，$\{S\}$中存在集合$S_1$和$S_2$，使得

$$U_1 \oplus S_1 \subsetneqq U_1 \oplus S' \qquad (5\text{-}2\text{-}22)$$

$$U_2 \oplus S_2 \subsetneqq U_2 \oplus S' \qquad (5\text{-}2\text{-}23)$$

其中$U_1 \oplus S_1$在$\{U\}_{U_1}$中，$U_2 \oplus S_2$在$\{U\}_{U_2}$中（根据式5-2-4）。因为$U_1 \oplus U_2 \oplus S'$在$\{U\}_{U_0}$中，我们有

$$U_1 \oplus U_2 \oplus S_1 \supsetneqq U_1 \oplus U_2 \oplus S' \qquad (5\text{-}2\text{-}24)$$

注意$U_1 \oplus U_2 \oplus S_1$不在$\{U\}_{U_0}$中。否则，由于我们假设$U_1 \oplus S_1 \in \{U\}_{U_1}$，这种情况就变得与上一种情况相同。

由式(5-2-24)，

$$S_1-(U_1\cup U_2)\supset S'-(U_1\cup U_2) \quad (5\text{-}2\text{-}25)$$

类似地，由式(5-2-22)和式(5-2-23)，我们有

$$S'-U_1\supset S_1-U_1 \quad (5\text{-}2\text{-}26)$$

和

$$S'-U_2\supset S_2-U_2 \quad (5\text{-}2\text{-}27)$$

由于$U_2\neq S_2$，故这两个等式给出

$$\begin{aligned}(S'-U_1)\cup(S'-U_2)\supset&(S_1-U_1)\cup(S_2-U_2)\\ &\supsetneqq S_1-U_1\\ &\supsetneqq S_1-(U_1\cup U_2)\end{aligned} \quad (5\text{-}2\text{-}28)$$

因为这个式子的左边等于$S'-(U_1\cup U_2)$，我们有

$$S'-(U_1\cup U_2)\supsetneqq S_1-(U_1\cup U_2) \quad (5\text{-}2\text{-}29)$$

但是，由式(5-2-25)，$S'-(U_1\cup U_2)$是$S_1-(U_1\cup U_2)$的子集，这是一个矛盾。因此当$U_1\oplus S'\in\{U\}_{U_1}$和$U_2\oplus S'\in\{U\}_{U_2}$都不成立时，所求集合是存在的，这就证明了(1)。

对于(2)，设$U'_1=U_1\oplus S'_1$，$U'_2=U_2\oplus S'_2$，这里S'_1和S'_2都在$\{S\}$中，则

$$U'_1\oplus U'_2=U_1\oplus S'_1\oplus U_2\oplus S'_2=U_0\oplus S'' \quad (5\text{-}2\text{-}30)$$

它一定在$\{U\}_{U_0}$中，除非在$\{U\}_{U_0}$中存在$U_0\oplus S''$的一个真子集。

（证毕）

例5-2-2 图5-2-1所示线图的$\{S\}$是

$$\begin{aligned}\{S\}=\{&\phi,(a,c,f),(a,b,d),(a,d,e),(a,c,g),(b,e),\\ &(f,g),(c,d,e,f),(a,b,c,e,f),(a,d,e,f,g),\\ &(b,e,f,g),(b,c,d,f),(c,d,e,g),(a,b,c,e,g),\\ &(a,b,d,f,g),(b,c,d,g)\}\end{aligned}$$

由$U_1=(a)$，得

$$\begin{aligned}\{U\}_a&=\min\{(a)\oplus S;\ S\in\{S\}\}\\ &=\{(a),(c,f),(b,d),(d,e),(c,g)\}\end{aligned}$$

由$U_1=(c)$，得

$$\{U_c\} = \min\{(c)\oplus S;\ S\in\{S\}\}$$
$$=\{(c),(a,f),(a,g),(d,e,f),(b,d,f),(d,e,g),(b,d,g)\}$$

因此

$$\{U\}_a\oplus\{U\}_c=\{(a,c),(f),(g),(c,d,e),(b,c,d)\}=\{U\}_{(ac)}$$

另外，注意到(f)在$\{U\}_{(ac)}$中，因此，据定理5-2-6，

$$\{U\}_{(ac)}=\{U\}_f$$

而由 $\{U\}_f=\min\{(f)\oplus S;\ S\in\{S\}\}$

也可得到$\{U\}_{(ac)}$。

当一条路径仅由一条边e组成时，据定理1-6-10，我们有

$$\{P(e)\}=\min\{(e)\oplus C;\ C\in\{C\}\} \tag{5-2-31}$$

注意$\{C\}$是所有回路和空集的集体。当U_1仅由一条边组成时，也有同样的情况。

定理5-2-9 对于线图中的一条边e，

$$\{U\}_e=\min\{(e)\oplus S;\ S\in\{S^0\}\} \tag{5-2-32}$$

注意，一般地说，$\{S^0\}$中元素的数目比$\{S\}$中元素的数目要少得多。

证明： 设$U\in\{U\}_e$。假定

$$U=(e)\oplus S$$

其中S是割集$S_1, S_2,\cdots,S_p$的无重边并。因为要使U在$\{U\}_e$中，S_1，S_2，$\cdots$，S_p中的某一个必须包含边e．设$e\in S_1$，则用$(e)\oplus S_1$代替$(e)\oplus S$，它一定在$\{U\}_e$中。因此，$U=(e)\oplus S$中的S必为割集。（证毕）

注意，如果U_1中的边不止一条，则

$$\{U\}_{U_1}\supset\min\{U_1\oplus S;\ S\in\{S^0\}\} \tag{5-2-33}$$

如果我们知道$\{S^0\}$而不是$\{S\}$，以下定理对$U_1=\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$给出了$\{U\}_{U_1}$。

定理5-2-10 设$U_1=\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$，则

$$\{U\}_{U_1} = \{U\}_{e_1} \otimes \{U\}_{e_2} \otimes \cdots \otimes \{U\}_{e_k} \tag{5-2-34}$$

用定理5-2-8易证明这个定理。

在例5-2-2中，

$$\{S^0\} = \{\phi, (a,c,f), (a,b,d), (a,d,e), (a,c,g), (b,e), (f,g), (c,d,e,f), (b,c,d,f), (c,d,e,g), (b,c,d,g)\}$$

例如，要得到 $\{U\}_{(cd)}$，我们可以不用式（5-2-4），而用下面的方法求出$\{U\}_c$和$\{U\}_d$：

$$\{U\}_c = \min\{(c) \oplus S; \ S \in \{S^0\}\}$$
$$= \{(c), (a,f), (a,g), (d,e,f), (b,d,f), (d,e,g), (b,d,g)\}$$

$$\{U\}_d = \min\{(d) \oplus S; \ S \in \{S^0\}\}$$
$$= \{(d), (a,b), (a,e), (c,e,f), (b,c,f) (c,e,g), (b,c,g)\}$$

于是

$$\{U\}_{(cd)} = \{U\}_c \otimes \{U\}_d$$
$$= \{(c,d), (a,b,c), (a,c,e), (e,f), (b,f), (e,g), (b,g), (a,d,f), (a,d,g)\}$$

把一个线图映射到一个圆环的表面上。如果我们需要用删去一些边的方法，破开围绕着圆环中心孔的所有回路，那么，由这些必须删去的边组成的集合，只要其任何一个真子集都不具备这样的功能，就构成一个伪割。例如，图5-2-2所示，就是这种情况。$\{S\}$是所有

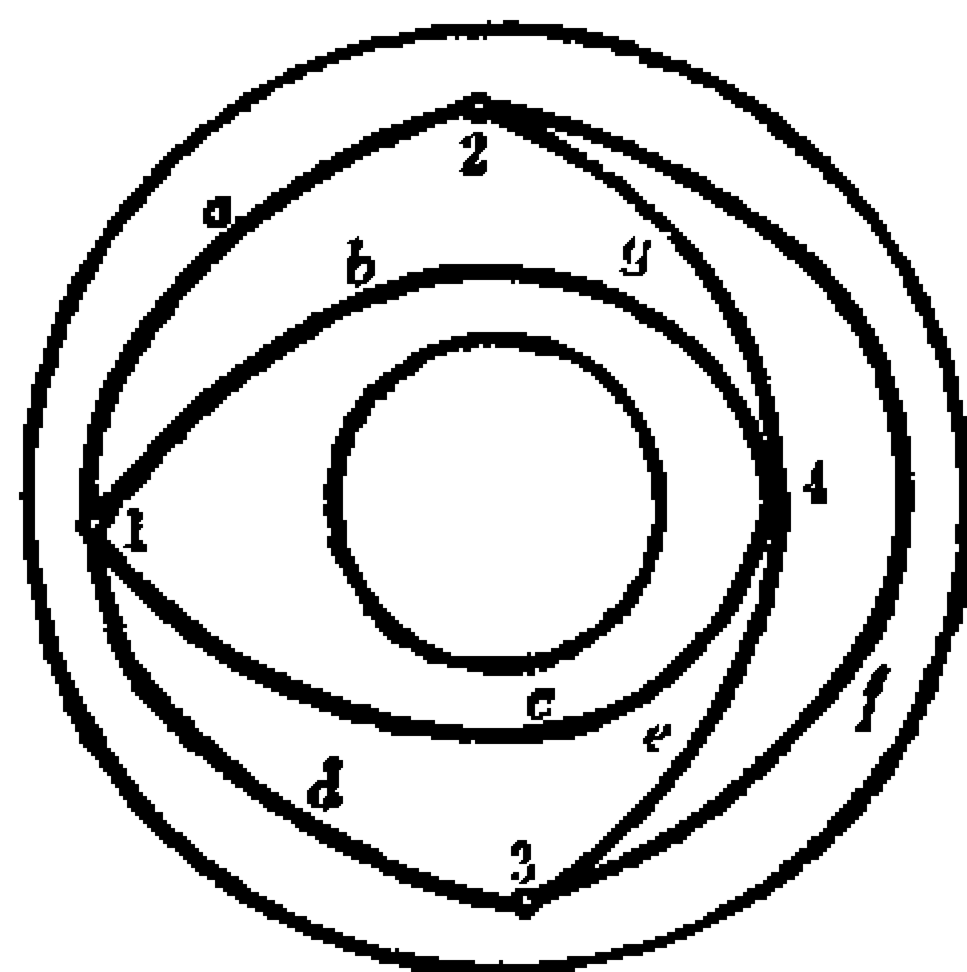


图5-2-2 圆环上的一个线图

割集。割集的无重边并和空集的集体。由于$\{S\}$可以由$n_{v_1}-1$个线性无关的关联集得到，所以我们从以下三个关联集，即可得到关于U_1的伪割集合：

$$S(1)=(a,b,c,d)$$
$$S(2)=(a,f,g)$$
$$S(3)=(d,e,f)$$

取$U_1=(c,d)$，显然它能破开所有围绕圆环中心孔的回路，我们有

$$U_2=(c,d)\oplus S(1)=(a,b)$$
$$U_3=(c,d)\oplus S(2)=(a,c,d,f,g)$$
$$U_4=(c,d)\oplus S(3)=(c,e,f)$$
$$U_5=(c,d)\oplus S(1)\oplus S(2)=(b,f,g)$$
$$U_6=(c,d)\oplus S(1)\oplus S(3)=(a,b,d,e,f)$$
$$U_7=(c,d)\oplus S(2)\oplus S(3)=(a,c,e,g)$$
$$U_8=(c,d)\oplus S(1)\oplus S(2)\oplus S(3)=(b,d,e,g)$$

其中，边集U_1，U_2，U_4，U_5，U_7和U_8具有这样的功能：删去其中任何一个，都能破开围绕圆环中心孔的所有回路，而删去这些集合的真子集，则不能达到这个目的。显然，这些边集构成$\{U\}_{U_1}$。

考虑两个伪割U_a和U_b的环和，其中$U_a\in\{U\}_{U_1}$，$U_b\in\{U\}_{U_2}$：

$$U_a\oplus U_b=(S_a\oplus U_1)\oplus(S_b\oplus U_2)=S_a\oplus S_b\oplus(U_1\oplus U_2)$$
$$=S_c\oplus U \tag{5-2-35}$$

其中S_a，S_b，S_c在$\{S\}$中，而

$$U=U_1\oplus U_2 \tag{5-2-36}$$

因为这里不保证U是$\{S\}$中某一割集的真子集，根据上面的定义，$S_c\oplus U$不一定是一个伪割。但是任意两个集合$S_c\oplus U$和$S_d\oplus U$满足

$$(S_c\oplus U)\oplus(S_d\oplus U)=S_e$$

其中S_c，S_d，S_e都在$\{S\}$中，这就是说，任意两个这样的集合的

环和在$\{S\}$中。因此，我们推广伪割的定义，使其包括这种集合。

定义5-2-4 对于边的集合$\mathscr{E}$，关于$\mathscr{E}$的伪割的集合$\{U\}_{\mathscr{E}}$定义为

$$\{U\}_{\mathscr{E}}=\min\{\mathscr{E}\oplus S;\ S\in\{S\}\} \tag{5-2-37}$$

由这个定义，我们有以下定理。

定理5-2-11 设$\{U\}_{U_1}$和$\{U\}_{U_2}$分别是关于U_1和U_2的伪割的集合，则

$$\{U\}_{U_1}\otimes\{U\}_{U_2}=\{U\}_{U_1\oplus U_2} \tag{5-2-38}$$

证明：由运算$\otimes$的定义

$$\begin{aligned}\{U\}_{U_1}\otimes\{U\}_{U_2}&=\min\{U_a\oplus U_b;U_a\in\{U\}_{U_1},U_b\in\{U\}_{U_2}\}\\&=\min\{S_a\oplus U_1\oplus S_b\oplus U_2;S_a,S_b\in\{S\}\}\\&=\min\{S\oplus(U_1\oplus U_2);S\in\{S\}\}\end{aligned} \tag{5-2-39}$$

此即$\{U\}_{U_1\oplus U_2}$的定义。　　　　（证毕）

考虑一个集体$[\{U\},\{S^0\}]$，它是由关于一切可能边集的所有伪割集合组成的。注意，如果边集是空集ϕ，则$\{U\}_\phi=\{S^0\}$。因此集体$[\{U\},\{S^0\}]$中包含所有的割集和空集的集合$\{S^0\}$。对于$[\{U\},\{S^0\}]$中任何集合R_a，R_b和R_c，我们有以下结果：

1．$R_a\otimes R_b=R_b\otimes R_a\in[\{U\},\{S^0\}]$.

2．在$[\{U\},\{S^0\}]$中存在$\{S^0\}$，使得$R_a\oplus\{S^0\}=R_a$

3．$R_a\otimes R_a=\{S^0\}$.

4．$R_a\otimes(R_b\otimes R_c)=(R_a\otimes R_b)\otimes R_c$.

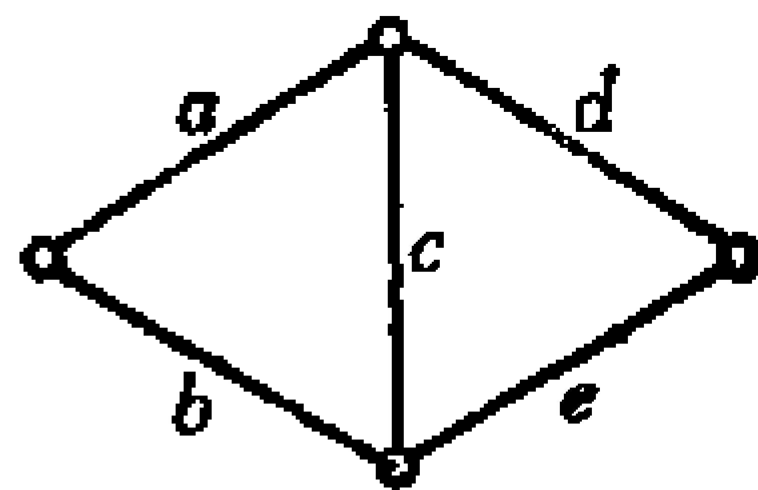


图5-2-3　线图G

因此，$[\{U\},\{S^0\}]$是环积运算$\otimes$下的阿贝尔群。

例5-2-3 考虑图5-2-3所示的线图。为了得到$\{S\}$，我们选

取线性无关割集$S_1=(a,b)$，$S_2=(a,c,e)$ 和 $S_3=(d,e)$。然后我们作运算

$$S_1\oplus S_2=(b,c,e)=S_4$$
$$S_1\oplus S_3=(a,b,d,e)=S_5$$
$$S_2\oplus S_3=(a,c,d)=S_6$$
$$S_1\oplus S_2\oplus S_3=(b,c,d)=S_7$$

因此

$$S=\{S_1,S_2,S_3,S_4,S_5,S_6,S_7,\phi\}$$

我们可以看出

$$S^0=\{S_1,S_2,S_3,S_4,S_6,S_7\phi,\}$$

设$U_1=(a)$，则

$$\{U\}_{U_1}=\min\{U_1\oplus S_i;\ S_i\in\{S\}\}$$
$$=\{(a),(b),(c,e),(c,d)\}$$

注意，

$$\{U\}_{U_1}\otimes\{U\}_{U_1}=\{\phi,(a,b),(a,c,e),(a,c,d),(b,c,e),$$
$$(b,c,d,),(d,e)\}$$
$$=\{S^0\}$$

设$U_2=(e)$，则

$$\{U\}_{U_2}=\{(e),(a,c),(d),(b,c)\}$$

设$U_3=(c)$，注意

$$U_1\oplus U_2\oplus U_3=S_2$$

和 $$U_p\cap U_q=\phi \qquad 对于 1\leqslant p<q\leqslant 3$$

现在

$$\{U\}_{U_1}\otimes\{U\}_{U_2}=\min\{U_a\oplus U_b;U_a\in\{U\}_{U_1},U_b\in\{U\}_{U_2}\}$$
$$=\{(a,e,),(c),(a,d),(b,e),(b,d)\}$$
$$=\{U\}_{U_3}$$

容易看出

$$\{U\}_{U_1}\otimes\{U\}_{U_2}\otimes\{U\}_{U_3}=\{U\}_{U_3}\otimes\{U\}_{U_3}=\{S^0\}$$

设$U_4=(b,c)$，则

$$\{U\}_{U_4}=\{(b,c),(a,c),(e),(d)\}$$

现在

$$\{U\}_{U_4}\otimes\{U\}_{U_1}=\{(c),(b,e),(b,d),(a,e),(a,d)\}$$
$$=\{U\}_{U_2}$$

这是因为

$$\{U\}_{U_4}\otimes\{U\}_{U_1}=\{U\}_{U_4\oplus U_1}=\{U\}_{(abc)}=\{U\}_{S_1\oplus(c)}$$
$$=\{U\}_{(c)}=\{U\}_{U_3}$$

在研究路径时，我们曾见到过一种集合，它是一条路径和若干回路的无重边并集。关于伪割和割集，我们也有类似的集合。

定义5-2-4 集合Y称为伪割和若干割集的无重边并集，如果

$$Y=U\oplus S \tag{5-2-40}$$

并且

$$U\cap S=\phi \tag{5-2-41}$$

其中U是一个伪割，而S或为一个割集，或为割集的无重边并。

定义5-2-5 设$\{U\}_U$是关于边集U的所有伪割的集体，则符号$\{Y_U\}$是$\{U\}_U$中所有伪割，伪割U和若干割集的无重边并集以及空集的集体。

可以看出

$$\{Y_U\}=\{U\oplus S;\ S\in\{S\}\} \tag{5-2-42}$$

而且，由伪割集体的定义，我们可以看出

$$\min\{Y_U\}=\{U\}_U \tag{5-2-43}$$

例5-2-4 在例5-2-3中，我们发现

$$\{U\}_{U_1}=\{(a),(b),(c,e),(c,d)\}$$

我们又知道

$$\{S\}=\{\phi,(a,b),(a,c,e),(d,e),(b,c,e),(a,b,d,e),$$
$$(a,c,d),(b,c,d)\}$$

于是

$$\{Y_{U_1}\} = \{U \oplus S; U \in \{U\}_{U_1}, S \in \{S\}\}$$
$$= \{(a),(b),(c,e),(c,d),(a,b,c,e),$$
$$(a,b,c,d),(a,d,e),(b,d,e)\}$$

由下式可以得到同样的集体：

$$\{Y_{U_1}\} = \{U_1 \oplus S; S \in \{S\}\}$$
$$= \{(a),(b),(c,e),(a,d,e),(a,b,c,e),$$
$$(b,d,e),(c,d)(a,b,c,d)\}$$

$\{Y_U\}$的一个有趣的性质由以下定理给出。

定理5-2-12 $\{Y_U\}$中奇数个集合的环和是$\{Y_U\}$中的集合，偶数个集合的环和是$\{S\}$中的集合。

由式(5-2-42)，证明是显然的，注意关于U的所有伪割都在$\{Y_U\}$中。

这个定理说明，如果我们把$\{Y_U\}$中的所有集合和$\{S\}$中的所有集合收集到一起，就得到环和运算下的一个群。换句话说，将$[Y_U,S]$定义为$\{Y_U\}$和$\{S\}$中所有集合的集体，我们就可以说$[Y_U,S]$是环和运算下的阿贝尔群。前面说过，$\{S\}$是所有割集，割集的无重边并和空集的集体。

5-3 阿贝尔群

我们已经研究了以下一些子图的集体，它们都是阿贝尔群。

$\{E\}$：所有回路，回路的无重边并和空图的集体。

$\{E,M_{ij}\}$：$\{M_{ij}\}$和$\{E\}$中所有集合组成的集体。其中，$\{M_{ij}\}$是M_{ij}类中所有M图集体，它们或为一条路径，或为一条路径和若干回路的无重边并。

$[\{\tau\},\{C\}]$：形如$\{\tau_{(i_1i_2\cdots i_r)}\}$的所有集体和$\{C\}$组成的集体.其中$\{C\}$是所有回路和空集的集体，$\{\tau_{(i_1i_2\cdots i_r)}\}$是$\tau_{(i_1i_2\cdots i_r)}$类

中所有 τ 图的集体。

$\{S\}$：所有割集，割集的无重边并和空集的集体。

$\{S,Y_U\}$：$\{Y_U\}$和$\{S\}$中所有集合的集体。其中$\{Y_U\}$是关于U的所有伪割，以及一个关于U的伪割和若干割集的无重边并的集体.（U是一个边集）.

$[\{U\},\{S^0\}]$：形如$\{U\}_{up}$的所有集体和$\{S^0\}$组成的集体。其中$\{S^0\}$是所有割集和空集的集体。

我们还知道，在$\{E\}$中有$n_e-n_v+\rho$个线性无关的集合，$\{E\}$中所有的集合都可以由它们生成.类似地，在$\{S\}$中有$n_v-\rho$个线性无关的集合，$\{S\}$中所有的集合可以由它们生成。前面说过，n_e是线图的边数，n_v是顶点数，ρ是最大连通子图的个数。$\{E, M_{ij}\}$，$[\{\tau\}, \{C\}]$，$\{S, Y_U\}$和$[\{U\},\{S^0\}]$中线性无关集合的数目尚不知道。

定理5-3-1 在$\{E,M_{ij}\}$中存在着$n_e-n_v+\rho+1$个线性无关的集合。

证明：由M_{ij}的定义，我们可以看出

$$\{M_{ij}\}=\{M\oplus E;\ E\in\{E\}\} \tag{5-3-1}$$

其中M是$\{M_{ij}\}$中的一个集合。显然，$\{E\}$中$n_e-n_v+\rho$个线性无关的集合也都是$\{E,M_{ij}\}$中线性无关的集合。并且，据式(5-3-1)，$\{M_{ij}\}$中任何一个集合M与$\{E\}$中任何一个线性无关的集合都是线性无关的。因此，在$\{E,M_{ij}\}$中至少有$n_e-n_v+\rho+1$个线性无关的集合。

因为$\{M_{ij}\}$中任一个集合都可以由M和$E\in\{E\}$的环和表示，而$\{E\}$中任一集合可以表示为$\{E\}$中线性无关集合的环和。所以我们容易看出，在$\{E,M_{ij}\}$中不会有多于$n_e-n_v+\rho+1$个线性无关的集合。 （证毕）

类似地，由已知$\{S\}$中有$n_v-\rho$个线性无关的集合，我们有以下定理。

定理5-3-2 在$\{S, Y_U\}$中恰有$n_e-\rho+1$个线性无关的集合，这里$\{Y_U\}\neq\{S\}$。

设1，2，…，n_v是一个不可分线图的顶点。于是容易看出，$\{\tau_{(12)}\}$，$\{\tau_{(13)}\}$，…$\{\tau_{(1n_v)}\}$是线性无关的。对于任何一对顶点i和j，这里$1<i\neq j$，由定理1-7-8，$\{\tau_{(ij)}\}$可以表示为

$$\{\tau_{(ij)}\}=\{\tau_{(i1)}\}\otimes\{\tau_{(1j)}\} \tag{5-3-2}$$

另外，任一集合$\{\tau_{(i_1i_2\cdots i_r)}\}$可以表示为

$$\{\tau_{(i_1\cdots i_r)}\}=\{\tau_{(1i_1)}\}\otimes\{\tau_{(1i_2)}\}\otimes\cdots\otimes\{\tau_{(1i_r)}\} \tag{5-3-3}$$

并且，据定理1-6-9和1-7-6，

$$\{\tau_{(i1\cdots i_r)}\}\otimes\{\tau_{(i1\cdots i_r)}\}=\{C\} \tag{5-3-4}$$

定理5-3-3 对于一个不可分线图，在$[\{\tau\},\{C\}]$中存在n_v-1个线性无关集合。

对于$[\{U\},\{S^0\}]$，设$t=(e_1, e_2, \cdots, e_n)$是一个树（在分离图的情况是一个林），而$(b_1, b_2, \cdots, b_m)$是对应于$t$的弦集，这里$n=n_v-\rho$，且$n+m=n_e$.我们要说明，集合$\{U\}_{b_1}, \{U\}_{b_2}, \cdots, \{U\}_{b_m}$是线性无关的，而添加另外任何一个集合$\{U\}_{\mathscr{E}}$，这里$\mathscr{E}\neq(b_p)$，$1\leqslant p\leqslant m$，都会使它们线性相关。

因为不存在只包含$(b_1, b_2, \cdots, b_m)$中的边的割集，故$\{U\}_{b_1}$，$\{U\}_{b_2}$，…，$\{U\}_{b_m}$的任何一个组合的环积都不等于$\{S^0\}$. 因此，这些集合是线性无关的。

假定$\mathscr{E}=(e_r)$，$1\leqslant r\leqslant n$。我们知道，存在一个关于t的基本割集S_{e_r}，使得S_{e_r}包含边e_r。设这个割集是$(b_{i_1}, b_{i_2}, \cdots, b_{i_k}, e_r)$，其中$1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m$. 则据定理5-2-7，

$$\{U\}_{b_{i_1}}\otimes\{U\}_{b_{i_2}}\otimes\cdots\otimes\{U\}_{b_{i_k}}\otimes\{U\}_{e_r}=\{S^0\} \tag{5-3-5}$$

或

$$\{U\}_{b_{i_1}}\otimes\{U\}_{b_{i_2}}\otimes\cdots\otimes\{U\}_{b_{i_k}}=\{U\}_{e_r} \tag{5-3-6}$$

因此，$\{U\}_{b_1}$，$\{U\}_{b_2}$，…，$\{U\}_{b_m}$，$\{U\}_{e_r}$是线性相关的。

设$\mathscr{E}$是一个多于一条边的集合，比如说

$$\mathscr{E}=(b_{i_1}, \cdots, b_{i_p}, e_{j_1}, \cdots, e_{jq})$$

那么，据定理5-2-8，

$$\{U\}_{\mathscr{E}}=\{U\}_{b_{i_1}}\otimes\cdots\otimes\{U\}_{b_{i_p}}\otimes\{U\}_{c_{j_1}}\otimes\cdots\otimes\{U\}_{c_{j_q}}$$

(5-3-7)

根据式(5-3-6)，对于$r=1,\cdots,q$，每一个集合$\{U\}_{c_{j_r}}$都可以用$\{U\}_{b_1}$，$\{U\}_{b_2}$，$\cdots$，$\{U\}_{b_m}$中集合的环积来表示，因此$\{U\}_{b1}$，$\cdots$，$\{U\}_{bm}$，$\{U\}_{\mathscr{E}}$是线性相关的。又显然

$$\{U\}_{\mathscr{E}}\otimes\{U\}_{\mathscr{E}}=\{S^0\} \qquad (5\text{-}3\text{-}8)$$

因此，我们有定理5-3-4。

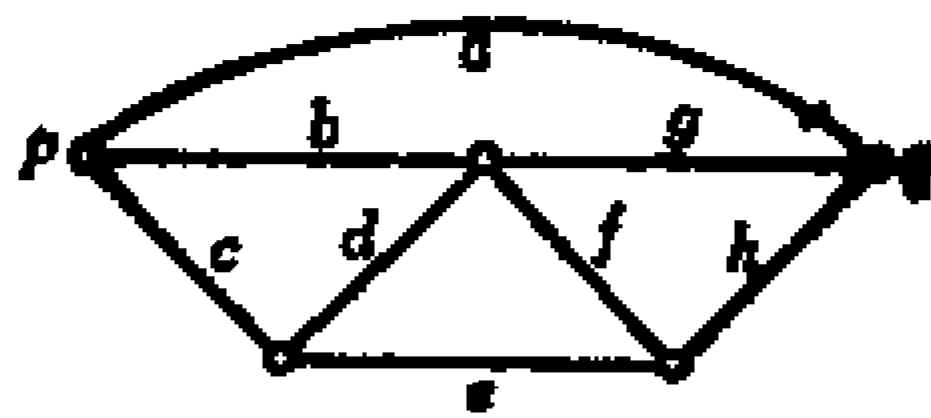
定理5-3-4 在[$\{U\}$，$\{S^0\}$]中恰有$n_e-n_v+\rho$个线性无关的集合。

这些集体有多种应用。例如，$\{E,M_{ij}\}$类的集体与开关网络有关。[$\{\tau\}$，$\{C\}$]的一个有意思的应用是用来得到一个线图中所有可能的树。因为一个树是一个有n_v-1条边，且在任意一对顶点之间恰有一条路径的集合，$\{\tau_{(i_1i_2\cdots i_r)}\}$中任何一个包含$n_v-1$条边的集合都是一个树。于是，知道了[$\{\tau\}$，$\{C\}$]，我们就可以得到所有可能的树。

习题

1.图P-5-1中线图G的割集$S_1=(a,b,c)$，$S_2=(c,d,f,h)$，$S_3=(e,f,h)$，$S_4=(b,d,f,g)$，找出分离顶点p和q的所有可能的割集。

2.设S是一个不分离顶点i和j的割集。证明存在一条从i到j的路径P，使得P和S没有公共边。



图P-5-1

3.设S是一个分离顶点i和j的割集。证明从i到j的任一路径都包含S中的一条边。

4.设$\{P_{ij}\}$是从i到j的所有路径的集合。又设S是一个边集。那么，如果对于所有$P\in\{P_{ij}\}$，

$$S \cap P \neq \phi$$

而S的任一真子集S'具有这样的性质：对于某个$P \in \{P_{ij}\}$，

$$S' \cap P = \phi$$

证明S是一个割集。

5.假定$S(i;j) \oplus S(j;k)$是一个割集，证明或否定

$$S(i;j) \oplus S(j;k) = S(i;k)$$

6.求出图P-5-1中线图关于$u=(e,f)$的所有可能的伪割。

7.哪一种线图和边集从u满足：对于$\{U\}_u$中所有的U_1和U_2，$U_1 \oplus U_2$是一个割集？

8.下式是否成立？

$$\{U\}_{u_1} \otimes \{U\}_{u_2} = \{S\}$$

其中$\{U\}_{u_1} \neq \{U\}_{u_2}$。

9.设e_1，e_2，$\cdots$，e_n都是一个线图中的边。

$$\{U\}_{(e_1)} \otimes \{U\}_{(e_2)} \otimes \cdots \otimes \{U\}_{(e_n)}$$

是伪割的集合或$\{S\}$吗？

10.证明定理5-1-8。

11.证明定理5-2-3。

12.证明定理5-2-4。

13.证明定理5-2-7。

第六章　有 向 线 图

6-1　有向线图的关联矩阵和回路矩阵

当一条边的两个端点是有序的时，我们称这条边是有向的，或称此边为有向边。通常采用线段上的一个箭头来表示一条有向边的方向，如图6-1-1(a)所示。如果一个线图的所有边都具有方向，则说此线图是有向的，或称为有向线图（简称为有向图）。图6-1-2所示的线图就是一个有向图。为了定义回路，割集等，我们定义有向图的对应无向图如下。

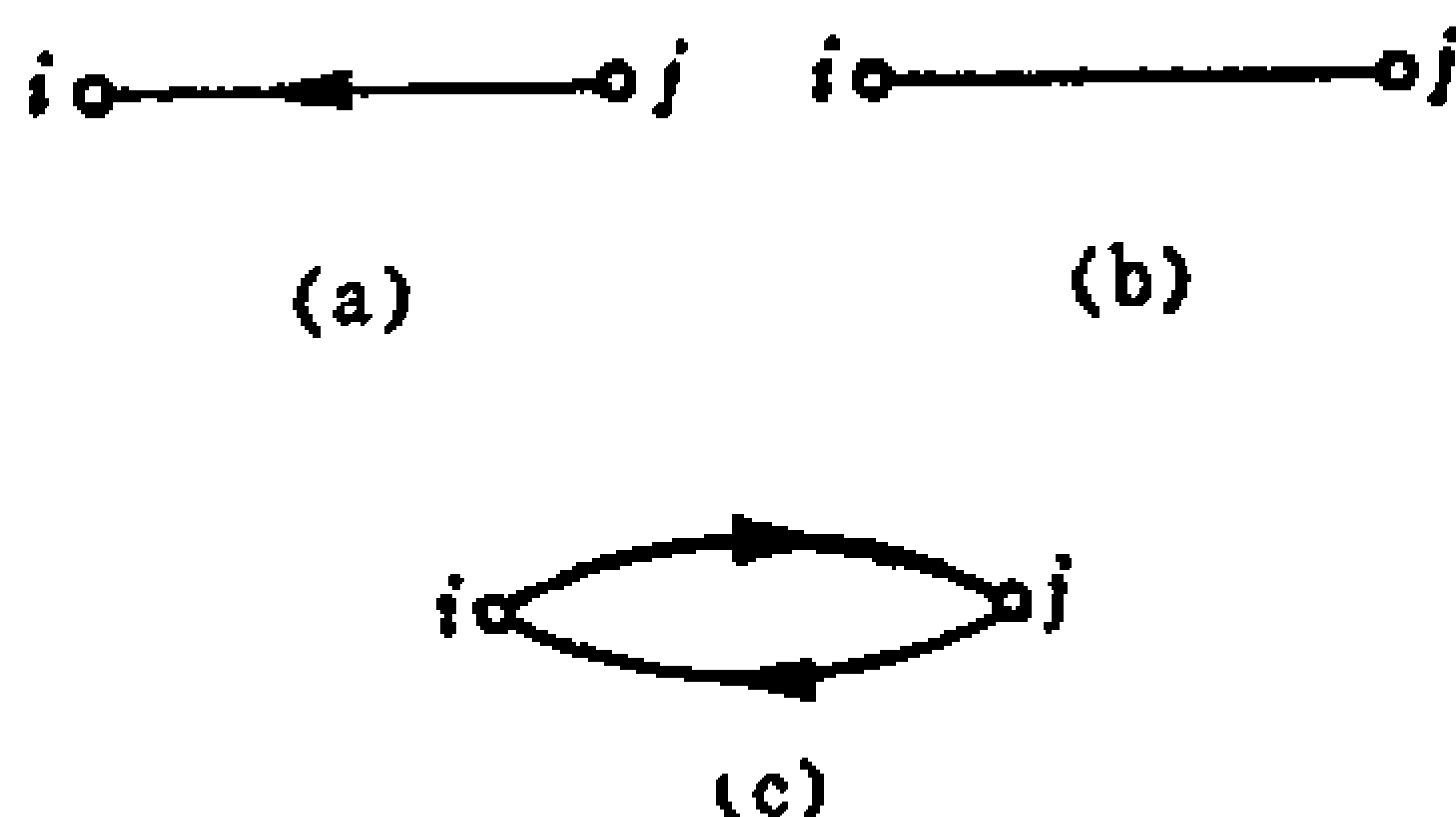


图6-1-1

(a)有向边；(b)无向边；(c)两条有向边

定义6-1-1　把有向图G_d的每一条有向边用无向边替换得到无向图G_u，我们称线图G_u为有向图G_d的对应无向图。

作为一个例子，图6-1-3所示的线图就是图6-1-2所示有向图的对应无向图。

定义6-1-2　如果一个有向图的对应无向图是连通的，则称

此有向图是连通的。

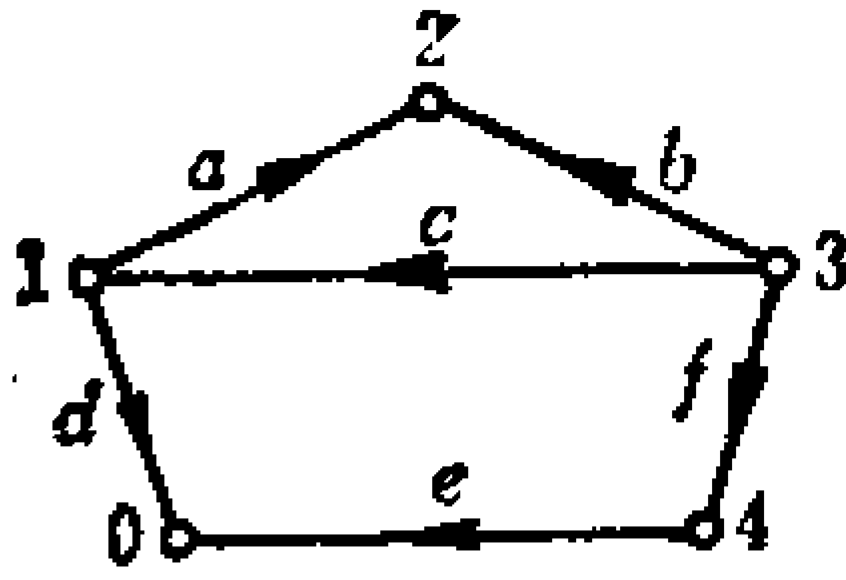


图6-1-2　有向图

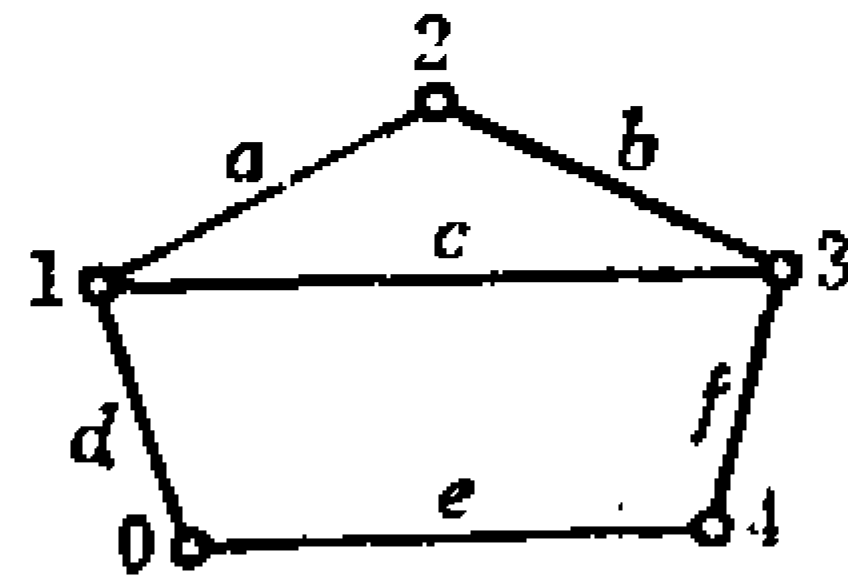


图6-1-3　对应的无向图

例如，图6-1-2中的有向图是连通的，因为图6-1-3中对应的无向图是连通的。用同样的方法，我们还可以定义可分图，分离图和最大连通子图。

由于有向图和无向图之间的区别在于边是否有方向，那么，适当地定义有向图的回路，割集，路径等等，我们将会看到，无向图的所有这些性质在有向图中也适用。另一方面，有向图的某些特殊子图，如有向回路，有向路径，半割等，在有向图的应用中是非常重要的，当然它们与回路，路径，割集是有差别的，这些将在本章的后面进行研究。

重要的是要注意这样的场合：有向边可用无向边来替换，反之亦然。例如，我们会看到，对于集中线性双向的电网络，每条有向边都能用无向边代替。如果我们研究从一个顶点到另一个顶点的流，则图6-1-1(c)的两条有向边可以用图6-1-1(b)中的一条无向边代替。然而，也有这样的情况，有向边和无向边具有完全不同的性质，因而这些边的交换几乎是不可能的。作为一个例子，如果我们研究通讯网中的同步流，则图6-1-1所有的结构是不同的，这些将在后面的章节中看到。我们首先研究有向图与无向图类似的部分。

表示有向图中每一条边的位置和方向的一种方法，是采用穷举关联矩阵，其定义如下。

定义6-1-3　一个有n_v个顶点和n_e条边的有向线图的穷举关

联矩阵，是$n_v \times n_e$阶矩阵$A_e = [a_{ij}]$，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若边 } j \text{ 与顶点 } i \text{ 关联，且方向离开顶点 } i\\ -1 & \text{若边 } j \text{ 与顶点 } i \text{ 关联，且方向指向顶点 } i\\ 0 & \text{若边 } j \text{ 不与顶点 } i \text{ 关联}\end{cases}$$

例如，图6-1-2中有向图的穷举关联矩阵A_e是

$$A_e=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\0\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

注意，对于一个有向图来说，A_e的每列中恰有两个非零元（一个是+1，另一个是-1）。而一个无向图的A_e中每列中恰有两个1。

在前面已经看到，一个无向图的穷举关联矩阵的秩是$n_v-\rho$，这一结论对有向图也适用。

定理6-1-1 一个有向图穷举关联矩阵的秩是$n_v-\rho$，这里n_v是线图的顶点数，ρ是最大连通子图的数目。

证明的方法与无向图的相同，只是把各元素作为实数。

定义6-1-4 把一个连通有向图的穷举关联矩阵A_e删去一行得到的矩阵A称为关联矩阵，与A_e中被删去的行对应的顶点称为参考点。

前面我们曾用同样的方法对无向图的关联矩阵作了定义，当$\rho>1$时，我们定义关联矩阵如下。

定义6-1-5 由删去一个有向图的A_e的ρ行得到矩阵A，若其秩为$n_v-\rho$，则称A为关联矩阵，这里ρ是有向图中最大连通子图的数目。

有向图关联矩阵的这个定义和无向图关联矩阵的定义也是相同的。

前面讨论过，在无向图的情况下，一个关联矩阵的任一非奇异大子阵的行列式等于1。但是，一个有向图关联矩阵的非奇异大子阵的行列式不一定等于1。

设G是一个由ρ个最大连通子图组成并含有n_v个顶点的有向图，A_S是其关联矩阵A的一个$n_v-\rho$阶的非奇异子矩阵，则在A_S中至少存在一列，其中仅包含一个非零元素。因为若不是这样，则A_S中的每列都有两个非零元素，一个是$+1$，另一个是-1，这样A_S的行列式是零，这与A是非奇异的的假设矛盾。设$a_{ik}=\pm1$，而在A_S的第k列中除a_{ik}外所有元素是零。由$|A_S|$按第k列元素展开的展开式，有

$$|A_S| = \pm(-1)^{i+k}|A_{S_{ik}}| \qquad (6\text{-}1\text{-}1)$$

其中$A_{S_{ik}}$是由A_S删去第i行和第k列得到的方子阵。如果$A_{S_{ik}}$中没有恰含一个非零元的列，则$|A_{S_{ik}}|=0$，据式(6-1-1)，就有$|A_S|=0$。但由假设，$|A_S|\neq0$，因此，在$A_{S_{ik}}$中必至少有一列只含一个非零元。

设$A_{S_{ik}}$的(p,q)元是±1。则

$$|A_S| = \pm(-1)^{i+k}(\pm1)(-1)^{p+q}|A_{S_{ik},pq}| \qquad (6\text{-}1\text{-}2)$$

其中$A_{S_{ik},pq}$是由$A_{S_{ik}}$删去行p和列q得到的方子阵，现在，我们可以看出A_S的行列式或者为$+1$，或者为-1。

在一个连通有向图中，设子图T代表一个树。线图T的关联矩阵A_T是n_v-1阶方阵，n_v是T中的顶点数。因为连通有向图的关联矩阵的秩是n_v-1，故A_T是非奇异的，所以在一个连通有向图的关联矩阵中，如果一个n_v-1阶子阵的各列对应于一个树的树枝，则这个子阵是非奇异的。反过来，一个连通有向图G的关联矩阵中，如果一个n_v-1阶方子阵A_S是非奇异的，则对应于A_S的子图（即由A_S的列所对应的边构成的子图）必然连通，且

必包含n_v-1条边和n_v个顶点。因此，对应于A_S的n_v-1阶非奇异子阵的子图，是G中的一个树。现在，我们进一步把这个结论推广。

定理6-1-2 设A是一个包含ρ个最大连通子图的有向图的关联矩阵，当且仅当一个子图是林（$\rho=1$时是树）时，A的与此子图相对应的大子阵是非奇异的，这样的非奇异大子阵的行列式是$+1$或-1。

例6-1-1 图6-1-2所示线图的关联矩阵A是

$$A=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}a&b&c&d&e&f\end{array}\\\left[\begin{array}{cccccc}1&0&-1&1&0&0\\-1&-1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&1\\0&0&0&0&1&-1\end{array}\right]\end{array}$$

这里顶点0是参考点。如果我们取A的方子阵

$$A_S=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}a&b&d&e\end{array}\\\left[\begin{array}{cccc}1&0&1&0\\-1&-1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\end{array}$$

则

$$A_{S_{44}}=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}a&b&d\end{array}\\\left[\begin{array}{ccc}1&0&1\\-1&-1&0\\0&1&0\end{array}\right]\end{array}$$

和

$$A_{S_{44,32}}=\begin{array}{c}\\1\\2\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}a&d\end{array}\\\left[\begin{array}{cc}1&1\\-1&0\end{array}\right]\end{array}$$

最后，

$$A_{s_{44,22,11}} = \begin{matrix} a \\ 2[-1] \end{matrix}$$

因此，

$$|A_s| = |A_{s_{44}}| = -|A_{s_{44,22}}| = |A_{s_{44,22,11}}| = -1$$

注意，边 a，b，d，e 组成一个树。

如果我们取矩阵A的A_s为

$$A_s = \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} a & b & d & f \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

则可发现

$$|A_s| = 1$$

其中，边 a，b，d，f 组成一个树。

如果我们取A_s为

$$A_s = \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

则A_s的行列式是零，而边a,b,c,d不组成树。

为了使有向图和无向图中的回路能有相同的性质，我们象定义无向图中的回路那样来定义有向图中的回路。因为一个无向图的回路矩阵中每一行表示一个回路，我们也用有向图的回路矩阵的每一行来表示一个回路。我们采用如下定义。

定义6-1-6 有向图的回路是对应无向图的回路加上一个由顶点循环次序确定的方向。我们用一个箭头来代表回路的方向。

例如，在图6-1-4中，C_1,C_2,C_3 表示回路。类似地，可以定义回路的无重边并。

定义6-1-7 有向图中回路的无重边并是若干回路的并集，其中任两个回路都没有公共边。

定义6-1-8 有向图的穷举回路矩阵$B_e=[b_{ij}]$的元素b_{ij}定义为

$$b_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若边 } j \text{ 在回路 } i \text{（或回路的无重边并 } i \text{）中，} \\ & \text{且边的方向和回路(回路的无重边并)方向一致} \\ -1 & \text{若边 } j \text{ 在回路 } i \text{（或回路的无重边并 } i \text{）中，} \\ & \text{且边的方向和回路（回路的无重边并）方向相反} \\ 0 & \text{若边 } j \text{ 不在回路 } i \text{（或回路的无重边并 } i \text{）中}\end{cases}$$

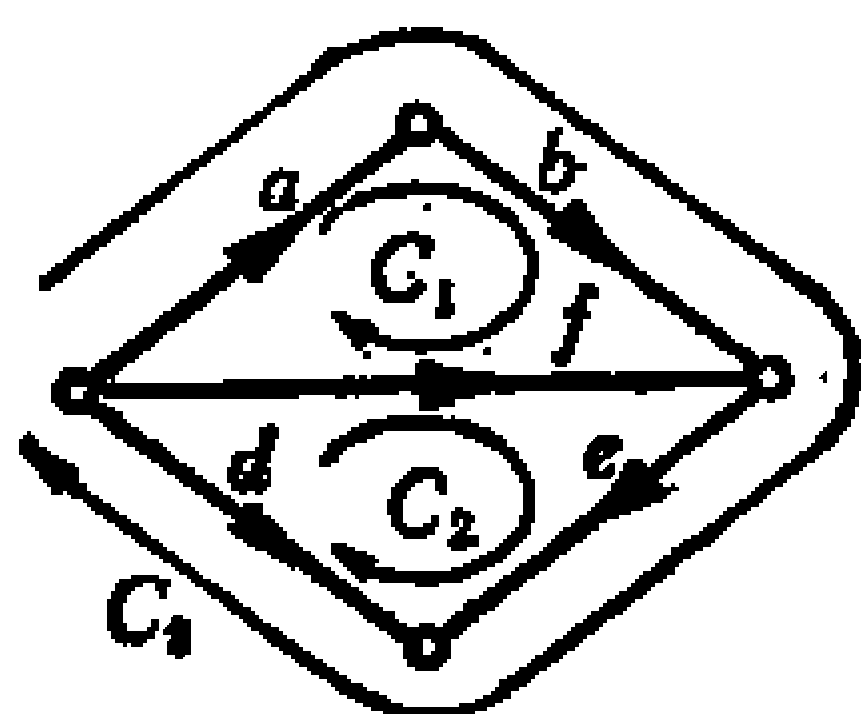


图6-1-4　有向回路的表示法

例如，图6-1-4所示有向图的穷举回路矩阵是

$$B_e=\begin{matrix} & a & b & d & e & f \\ C_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ C_2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ C_3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0\end{matrix}$$

与无向图的情况一样，我们定义一个有向图的基本回路集合和基本回路矩阵如下。

定义6-1-9 设G是一个包含n_v个顶点和n_e条边的连通有向图，又设t是G中的一个树，e_p是弦，$p=1,2,\cdots,n_e-n_v+1$.关于树t的基本回路C_p是$t\cup(e_p)$中一回路，其方向与弦e_p的方向一致。

所有基本回路C_1，$C_2,\cdots,C_{n_e-n_v+1}$的集合称为关于树t的基本回路集。

例6-1-2 在图6-1-5所示的连通有向图中，设树t是(a，b，c)，则子图$t\cap(e_1)$中的回路C_1加上与弦e_1的方向一致的方向，如图6-1-6(a)所示，它在关于t的基本回路集之中。可以看出，图6-1-6中的回路C_1,C_2和C_3构成关于t的基本回路集。

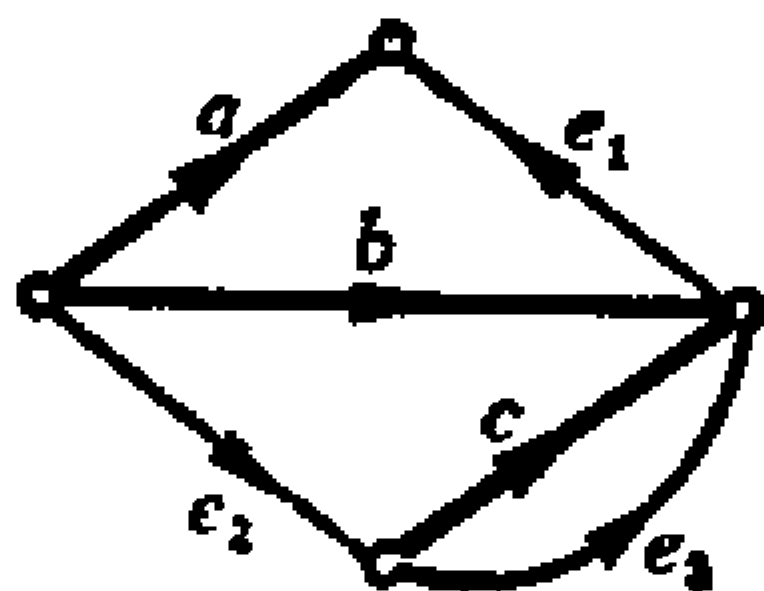


图6-1-5 一个有向图

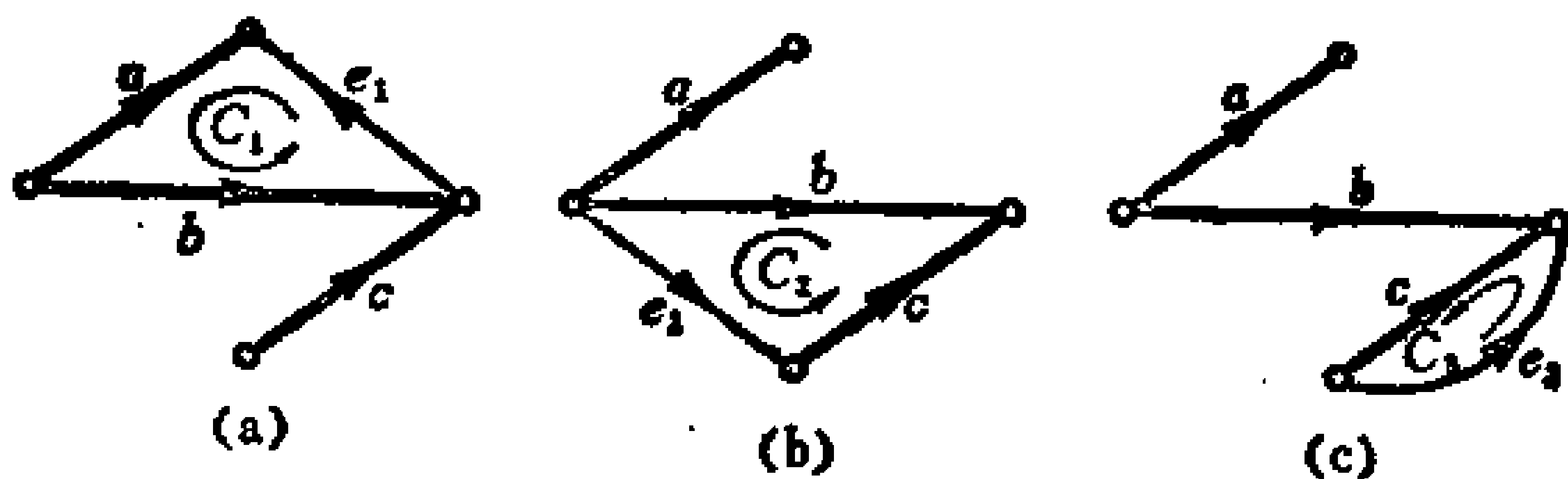


图6-1-6 关于树$t=(a,b,c)$的基本回路集
(a)$t\cup(e_1)$和C_1；(b)$t\cup(e_2)$和C_2；(c)$t\cup(e_3)$和C_3

对于分离有向图，我们定义关于一个林的基本回路集如下。

定义6-1-10 设G是一个包含n_v个顶点，n_e条边和ρ个最大连通子图的有向图。设t是林，e_p是弦，$p=1,2,\cdots,n_e-n_v+\rho$。关于林$t$的基本回路$C_p$是$t\cup(e_p)$中的一回路，其方向与弦$e_p$的方向一致。所有基本回路$C_p(p=1,2,\cdots,n_e-n_v+\rho)$的集合称为关于林$t$的基本回路集。

下面将会看到，选取弦的方向作为包含该弦的基本回路的方向，就使得在构成一个基本回路矩阵时，得到一个单位阵。

定义6-1-11 设G是一个包含n_v个顶点，n_e条边和ρ个最大连通子图的有向图．设$(e_1, e_2, \cdots, e_{n_e-n_v+\rho})$是关于林$t$（当$\rho=1$时即为树$t$）的弦集，又设$B_e$是$G$的穷举回路矩阵，调整其列，使得前面$n_e-n_v+\rho$个列对应于弦$e_1, e_2, \cdots, e_{n_e-n_v+\rho}$，则$B_e$的子矩阵$B_f$称为关于林$t$的基本回路矩阵，如果$B_f$的行$p$对应于$t\cup(e_p)$中基本回路$C_p$，$p=1, 2, \cdots, n_e-n_v+\rho$。

由此定义容易看出，基本回路矩阵B_f可表示为

$$B_f=[UB_{f_{12}}] \tag{6-1-3}$$

其中的U是单位矩阵。

例6-1-3 图6-1-7中有向图关于树$t=(e, f, g, h)$的基本回路矩阵B_f是

$$B_f=\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \end{array}$$

因为一个有向线图的基本回路矩阵B_f是穷举回路矩阵B_e的子矩阵，故B_e的秩至少是$n_e-n_v+\rho$，这里n_e是边数，n_v是顶点数，ρ是此有向线图中最大连通子图的个数。

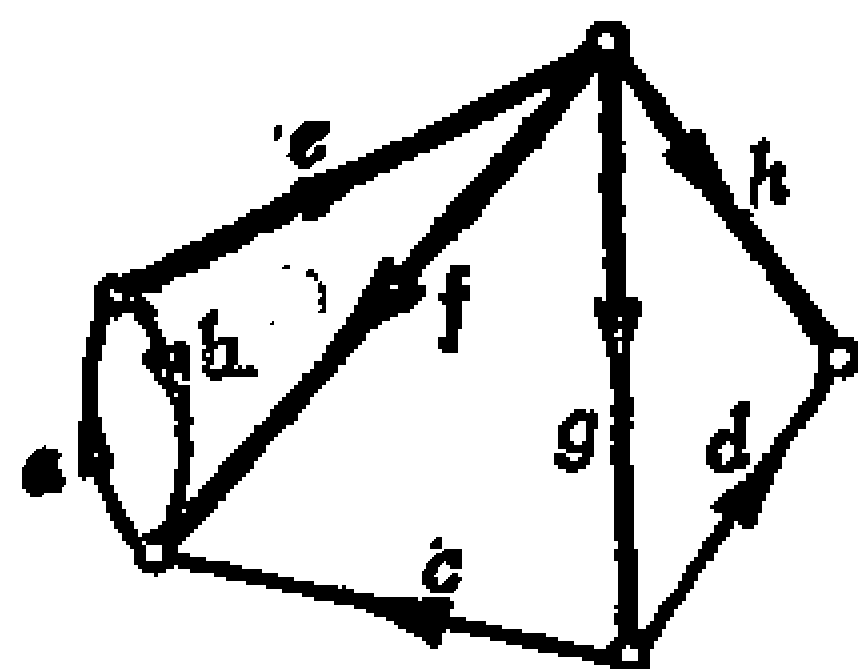


图6-1-7 一个有向图

为了求出穷举回路矩阵的秩，我们要利用有向线图的关联矩阵和回路矩阵的正交性。注意，对于一个无向图，$B_eA'_e=0$是建立在模2代数上的，但是，这里我们用的是实整数。

设

$$A_e=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_{n_v}\end{bmatrix}\quad 和\quad B_e=\begin{bmatrix}B_1\\B_2\\\vdots\\B_n\end{bmatrix}$$

分别为一个有向图的穷举关联矩阵和穷举回路矩阵，则乘积 $A_eB_e^t$ 是

$$\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_{n_v}\end{bmatrix}[B_1^tB_2^t\cdots B_n^t]=\begin{bmatrix}A_1B_1^t & A_1B_2^t & \cdots & A_1B_n^t\\A_2B_1^t & A_2B_2^t & \cdots & A_2B_n^t\\ & & \cdots & \\A_{n_v}B_1^t & A_{n_v}B_2^t & \cdots & A_{n_v}B_n^t\end{bmatrix} \tag{6-1-4}$$

其中
$$A_iB_j^t=\sum_{k=1}^{n_e}a_{ik}b_{jk} \tag{6-1-5}$$

可以看出，只有当边 p 与顶点 i 关联，且在回路 j（或回路的无重边并 j）中时，$a_{ip}b_{jp}$ 才非零。假定边 p 与顶点 i 关联且在回路 j 中，则除 p 外至少还有一条边与顶点 i 关联且在回路 j 中，设 q 是这样的一条边，如图6-1-8所示。

图6-1-8 回路 j 与边 p，q

a_{ip}（以及 a_{iq}）的正负取决于边 p（边 q）的箭头是指向顶点 i 还是离开 i。另一方面，b_{jp}(b_{jq}) 的正负取决于边 p（边 q）的箭头方向与回路 j（或回路的无重边并 j）的箭头方向是否一致。因此，如果 a_{ip} 的符号和 b_{jp} 的符号相同，则 a_{iq} 的符号必与 b_{jq} 的符号相反，而且在一个回路或回路的无重边并中，每一个顶点的度都是偶数。这样，在式(6-1-5)中，如果存在非零项，总是成对出现的，

其中一个是+1，另一个就是-1。因此

$$A_eB_e^t = 0 \tag{6-1-6}$$

且

$$B_eA_e^t = 0 \tag{6-1-7}$$

例如，图6-1-4中有向图G的穷举关联矩阵是

$$A_e = \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & d & e & f \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

G的穷举回路矩阵是

$$B_e = \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & d & e & f \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

因此

$$A_eB_e^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

注意，上式右边的0表示一个元素全为零的矩阵。

我们知道，一个穷举关联矩阵A_e的秩是$n_v-\rho$，由式(6-1-7)和西勒维斯特的零度定理（定理3-3-4），可以看出穷举回路矩阵B_e的秩最多是$n_e-n_v+\rho$。我们又知道，基本回路矩阵B_f的秩是$n_e-n_v+\rho$，而它又是B_e的子矩阵。

定理6-1-3 一个有向图的穷举回路矩阵B_e的秩是$n_e-n_v+\rho$，这里n_e是有向图的边数，n_v是顶点数，ρ是最大连通子图的数目。

由于穷举回路矩阵B_e的秩是$n_e-n_v+\rho$，故在B_e中有着 $n_e-n_v+\rho$行，使得其他各行都可以由这些行得到.这就说明，由 $n_e-n_v+\rho$行就足以知道一个有向图中所有回路的情况，因此，我们定义一个由B_e的这$n_e-n_v+\rho$行组成的回路矩阵B如下.

定义6-1-12 用符号B表示阶为$(n_e-n_v+\rho)\times n_e$的回路矩阵.B是取B_e的$n_e-n_v+\rho$行组成的，并且B的秩是$n_e-n_v+\rho$.

由这个定义，我们得到下面的有向图回路矩阵的重要性质.

定理6-1-4 有向图回路矩阵B的一个大子矩阵是非奇异的，当且仅当它的列对应于一个林（当$\rho=1$时是树）的所有弦.

回忆无向图的情况，正好有与此相同的性质.

证明：设有向图G的关联矩阵A分块为

$$A=[A_{11}A_{12}] \tag{6-1-8}$$

其中A_{12}对应林.又设回路矩阵B分块为

$$B=[B_{11}B_{12}] \tag{6-1-9}$$

这里，对所有的$i=1,2,\cdots n_e$，B的第i列和A的第i列对应于G中同一条边.由式(6-1-7)，我们有

$$BA'=[B_{11}B_{12}]\begin{bmatrix}A_{11}'\\A_{12}'\end{bmatrix}=B_{11}A_{11}'+B_{12}A_{12}'=0 \tag{6-1-10}$$

由定理6-1-2，A_{12}是非奇异的，于是我们可以用$(A_{12}')^{-1}$乘式(6-1-10)，得到

$$B_{11}A_{11}'(A_{12}')^{-1}+B_{12}=0 \tag{6-1-11}$$

或

$$B_{12}=-B_{11}A_{11}'(A_{12}')^{-1} \tag{6-1-12}$$

这样，B可表示为

$$B=B_{11}[U-A_{11}'(A_{12}')^{-1}] \tag{6-1-13}$$

由于B是回路矩阵，要使B的秩等于B的行数，则B_{11}必为

非奇异的.另一方面，B_{11}的列对应于A_{11}的列，而A_{11}的列对应于关于一个林的所有弦，因此，如果B的一个大子阵的列对应于所有的弦，则此大子阵是非奇异的。

下面，假定回路矩阵B被分块为

$$B=[\underline{B}_{11}\ \underline{B}_{12}] \tag{6-1-14}$$

其中$\underline{B}_{11}$是非奇异的，现在我们把一个关联矩阵A分块为

$$A=[\underline{A}_{11}\ \underline{A}_{12}] \tag{6-1-15}$$

使得对所有的$i=1,2,\cdots,n_e$，A的第i列和B的第i列对应G中同一条边。由式(6-1-5)，有

$$AB^t=\underline{A}_{11}\underline{B}_{11}^t+\underline{A}_{12}\underline{B}_{12}^t=0 \tag{6-1-16}$$

因此

$$\underline{A}_{11}=-\underline{A}_{12}\underline{B}_{12}^t(\underline{B}_{11}^t)^{-1} \tag{6-1-17}$$

由此式得到

$$A=\underline{A}_{12}[-\underline{B}_{12}^t(\underline{B}_{11}^t)^{-1}\ \ U] \tag{6-1-18}$$

因为A是关联矩阵，$\underline{A}_{12}$必为非奇异的。这样，据定理6-1-2，A_{12}的列对应一个林，因此$\underline{B}_{11}$的列对应关于林的所有弦。（证毕）

例6-1-4 考虑图6-1-9中有向图的回路矩阵B：

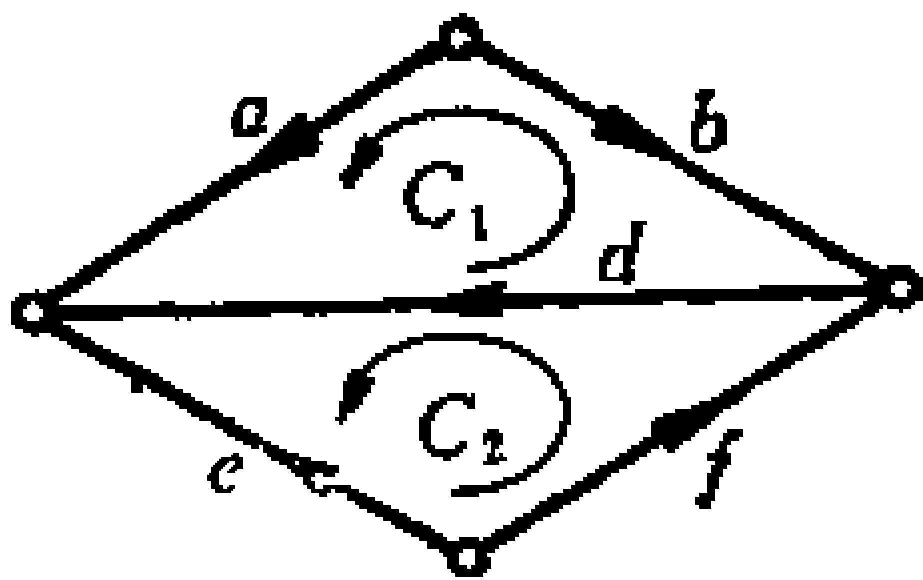


图6-1-9 有向图

$$B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

（列依次对应 $a\ b\ d\ e\ f$）

由列a和b组成的大子阵是奇异的，故边a和b不能构成关于任何一个树的弦集。另一方面，由列a和d组成一个非奇异大子阵，即

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

（列依次对应 $a\ d$）

边 a 和 d 组成关于树 $t=(b,e,f)$ 的弦集。另一个非奇异的大子阵由列 a 和 e 组成，它的行列式是

$$\begin{array}{cc} a & e \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

边 a 和 e 组成关于树 (b,d,f) 的弦集。注意在这种情况下行列式是-1。

6-2 初等树变换

在这一节里，我们要讨论线图的树的一个普遍性质，不论这个线图是有向的还是无向的，都具有这个性质。不过，我们只在讨论有向图的回路矩阵和割集矩阵的大子式的不变性时，才用到这个性质。

定义6-2-1 设 t_1 和 t_2 是线图 G 的树，两个树 t_1 和 t_2 之间的距离记为 $d(t_1,t_2)$，定义为

$d(t_1,t_2)=$ 在 t_1 内但不在 t_2 内的边的数目　　(6-2-1)

例如，假定

$$t_1-t_2=(e_1,e_2,\cdots,e_k) \qquad (6\text{-}2\text{-}2)$$

则

$$d(t_1,t_2)=k \qquad (6\text{-}2\text{-}3)$$

因为在任一个树中，边的数目都是 n_v-1，所以

$$d(t_1,t_2)=d(t_2,t_1) \qquad (6\text{-}2\text{-}4)$$

假定 t_1 和 t_2 的距离是 1，即

$$d(t_1,t_2)=1 \qquad (6\text{-}2\text{-}5)$$

设

$$t_1-t_2=(e) \qquad (6\text{-}2\text{-}6)$$

而

$$t_2 - t_1 = (e') \tag{6-2-7}$$

显然

$$t_1 \oplus (e, e') = t_2 \tag{6-2-8}$$

由式(6-2-8)确定的从树t_1到树t_2的变换，称为初等树变换。

定义6-2-2 如果边集$\mathscr{E}$中恰好包含两条边，则变换

$$t_1 \oplus \mathscr{E} = t_2 \tag{6-2-9}$$

称为从树t_1到t_2的初等树变换。

注意，集合$\mathscr{E}$必须是如下的集合：

$$\mathscr{E} = t_1 \oplus t_2 = (t_1 - t_2) \cup (t_2 - t_1) \tag{6-2-10}$$

因此，要使$\mathscr{E}$由两条边组成，这两个树的距离 d (t_1, t_2) 必 定是 1 。而且，如果两个树t_1和t_2相互距离为 1 ，则能给出由t_1到t_2 的初等树变换。若t_2可以从t_1经初等树变换得到，则t_1显然也能 从 t_2 经初等树变换得到。例如，考虑图6-1-7中线图的两个树t_1和 t_2，这里$t_1 = (e, f, g, h)$，$t_2 = (d, e, f, g)$，因为t_1和t_2的距离是$d(t_1, t_2) = 1$，我们能从t_1经过初等树变换得到t_2：

$$t_2 = t_1 \oplus (d, h)$$

同样，

$$t_1 = t_2 \oplus (d, h)$$

假定t_1和t_k都是线图G的树，设

$$t_1 - t_k = (e_1, e_2, \cdots, e_k) \tag{6-2-11}$$

$$t_k - t_1 = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \tag{6-2-12}$$

则t_1与t_k的距离是k，即

$$d(t_1, t_k) = k \tag{6-2-13}$$

假定我们在树t_1中添加边a_1，如图6-2-1所示。设C是由边a_1和树t_1一起构成的基本回路。树t_k不可能包含C中所有的边，因为据

定义，树中没有回路。于是，C中至少有一条边不在 t_k 中（这条边不会是a_1，因为a_1在t_k中），或

$$C-t_k \subset t_1-t_k \tag{6-2-14}$$

图6-2-1　树t_1与边a_1

设$e_1 \in (C-t_k)$，则从$t_1 \cup (a_1)$删除e_1，将产生一个树，这是因为$e_1 \in C$，而从$t_1 \cup (a_1)$中删除边e_1，只破坏$t_1 \cup (a_1)$中的回路C。设这个树是t_2，则

$$t_2=t_1 \oplus (a_1,\ e_1) \tag{6-2-15}$$

是一个初等树变换。进一步

$$t_2-t_k=(e_2,\cdots,e_k) \tag{6-2-16}$$

$$t_k-t_2=(a_2,\cdots,a_k) \tag{6-2-17}$$

$$d(t_2,t_k)=k-1 \tag{6-2-18}$$

由此，我们可以看到，存在一个树的序列$t_1,t_2,\cdots,t_{k-1},t_k$，使得所有相邻的树距离为 1 。换句话说，$t_k$ 可以由 t_1 经过逐次进行初等树变换得到。

定理6-2-1　设t_1和t_k都是连通图的树，如果$d(t_k,t_1)$为k，则t_k可以从t_1正好经过k次初等树变换得到。

例6-2-1　考虑图6-1-7中的线图，假定我们选取$t_1=(e,f,g,h)$和$t_k=(a,c,d,h)$，则

$$d(t_1,t_k)=3$$

且

$$t_k-t_1=(a,c,d)$$

添加边a到树t_1中，如图6-2-2所示，我们可以看到，有一个基本回路$C=(a,e,f)$，从$t_1 \cup (a)$中删去边e，就得到一个树$t_2=(a,f,g,h)$。

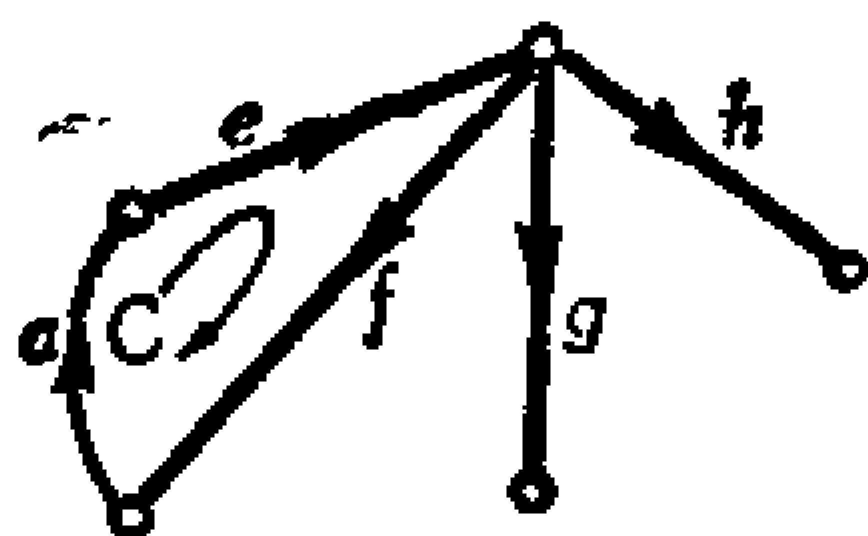


图6-2-2 树t_1和边a

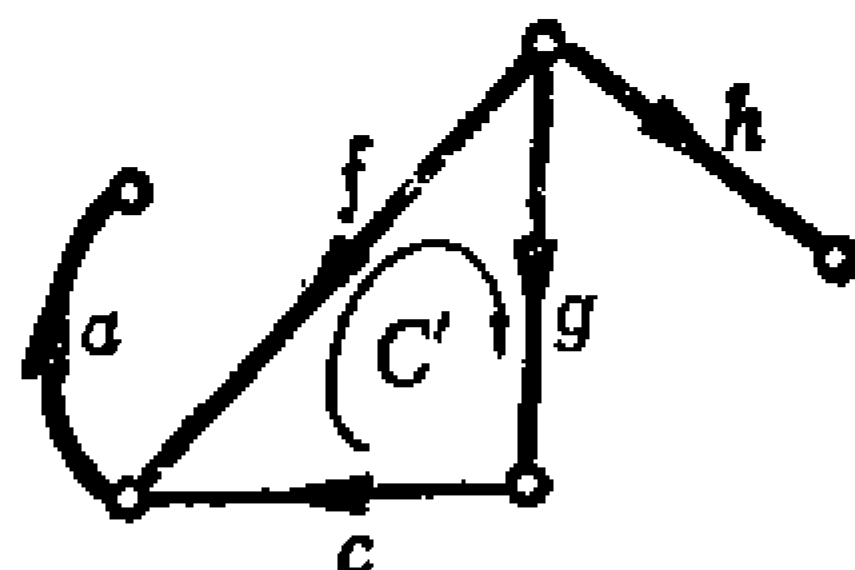


图6-2-3 树t_2和边c

因此

$$t_2 = t_1 \oplus (a, e)$$

是一个初等树变换。现在，我们有

$$t_k - t_2 = (c, d)$$

添加边c到树t_2中，如图6-2-3所示，可以得到关于树t_2的基本回路C'，这里

$$C' = (c, f, g)$$

于是，从$t_2 \cup (c)$中删去边f，得到由边a,c,g,h组成的树t_3。因此

$$t_3 = t_2 \oplus (c, f)$$

是一个初等树变换，对于t_3，我们有

$$t_k - t_3 = (d)$$

经过同样的过程，得到

$$t_k = t_3 \oplus (d, g)$$

显然，这是一个初等树变换。这样，我们得到树t_1, t_2, t_3, t_k的序列，其中每两个相邻树距离为1。我们已经说明，t_k可以由t_1经过三次初等树变换得到，这里t_1和t_k的距离是3。可以看出，对于分离线图，我们也可以定义一个初等林变换，并且可以说明，

任一林可以由另一个林经过逐次初等林变换得到。

6-3 回路矩阵的非零大子式的值

在6-1节中，我们发现一个关联矩阵的任一非奇异大子 阵 的行列式不是 +1就是 -1，然而，一个回路矩阵的非奇异大子阵的行列式可能既不是 +1，也不是 -1。例如，图6-3-1中有向图的一个回路矩阵是

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

由列 a 和 d 组成的大子阵的行列式是

$$\begin{matrix} a & d \end{matrix}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

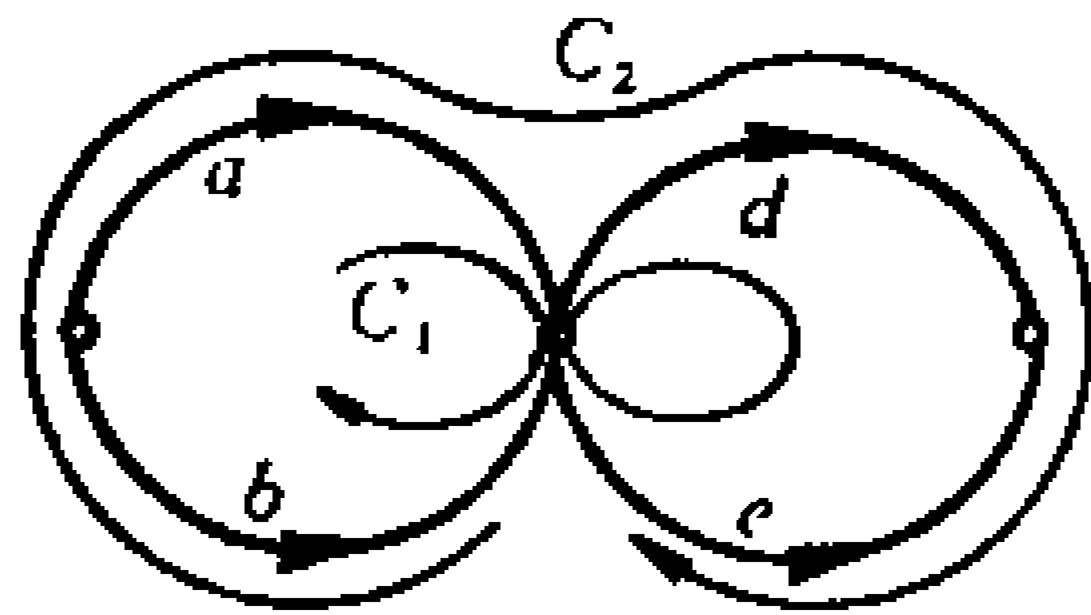


图6-3-1 有向图和回路C_1, C_2

但是，我们将看到，一个回路矩阵的所有非奇异大子阵的行列式的绝对值是相同的，这对于许多应用来说，是非常重要的性质。

设

$$B_f = [U B_{f_{12}}] \qquad (6\text{-}3\text{-}1)$$

是一个有向图G关于树t_1的基本回路矩阵，前面说过，$B_{f_{12}}$的列对应于树t_1的树枝。设B_{11}是B_f的一个非奇异大子阵，调整B_f的列，我们得到一个回路矩阵B_2

$$B_2 = [\underline{B}_{11} \ \ \underline{B}_{12}]$$

如果我们能说明，只要将B_2的行与行相加或者相减，如果需要的

话，在所得矩阵的某些行上乘上 -1，就能使B_2变成一个基本回路矩阵，那么我们就知道，$\underline{B}_{11}$的行列式或者为 $+1$，或者为-1。

因为我们已假定$\underline{B}_{11}$是非奇异的，故据定理6-1-4，B_{12}的列对应于一个树的枝，设此树为t_2。假定

$$d(t_1, t_2) = 1 \tag{6-3-3}$$

则可知道，应有边e_1和a_1，e_1在t_1中，a_1在t_2中，使得

$$t_2 = t_1 \oplus (a_1, e_1) \tag{6-3-4}$$

这是一个初等树变换。

考虑子图$t_1 \cup (a_1)$，这个子图中的回路是C，如图6-3-2所示。注意，据式(6-3-4)，有

$$t_1 \cup (a_1) = t_2 \cup (e_1) \tag{6-3-5}$$

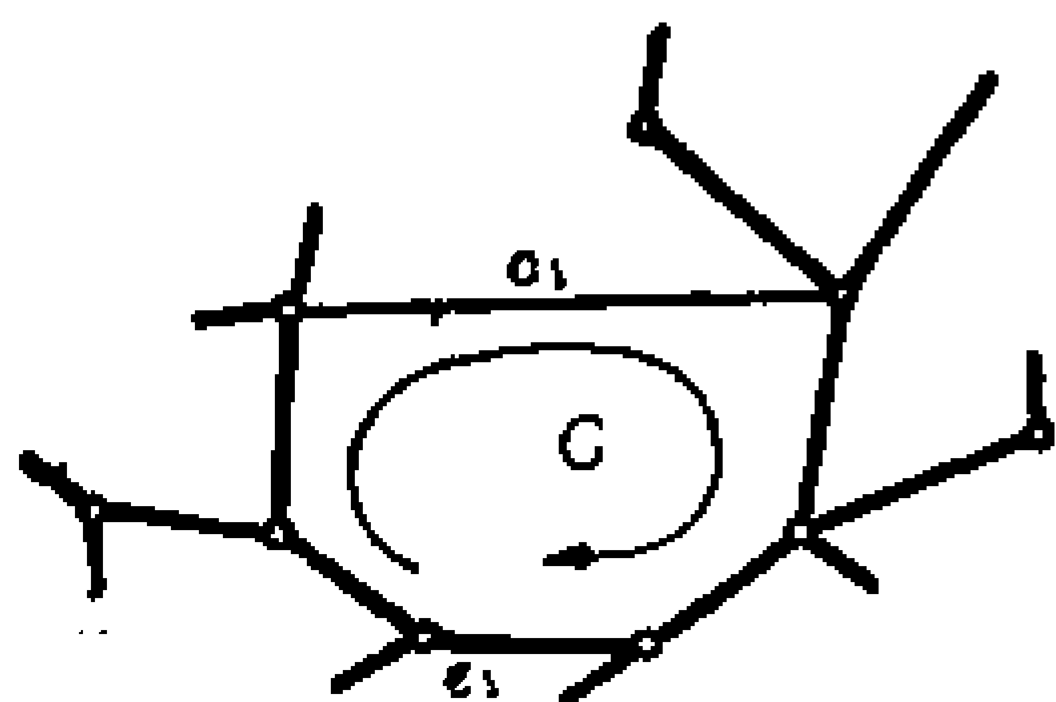


图6-3-2 树t_1和边a_1〔子图$t_1 \cup (a)$〕

设$\{C_1\}$是关于t_1的基本回路集合，注意B_f的行代表$\{C_1\}$中所有回路。设$\{C_2\}$是关于t_2的基本回路集合。显然，回路C既在$\{C_1\}$中又在$\{C_2\}$中。

设C_{12}，C_{13}，$\cdots$，C_{1k}是$\{C_1\}$中不含边e_1的回路，$C_{1k+1}, \cdots, C_{1m}$是$\{C_1\}$中包含边e_1的诸回路，这里的m是线图G中基本回路的数目。则容易看出$C_{12}, C_{13}, \cdots, C_{1k}$也在$\{C_2\}$中。

考虑$\{C_1\}$中的回路$C_{1p}(k+1 \leqslant p \leqslant m)$，如图6-3-3所示，可以看出$C_{1p}$不是关于$t_2$的基本回路，因为对于$t_2$来说，它包含两条弦$e_1$和$h_p$。但是，对于同一条弦$h_p$，在$\{C_2\}$中有一个包含它的相应的基本回路$C_{2p}$，注意$h_p$既是关于$t_1$的弦，又是关于$t_2$的弦，并且，我们可以看到

$$C_{2p}=C_{1p}\oplus C \qquad (6\text{-}3\text{-}6)$$

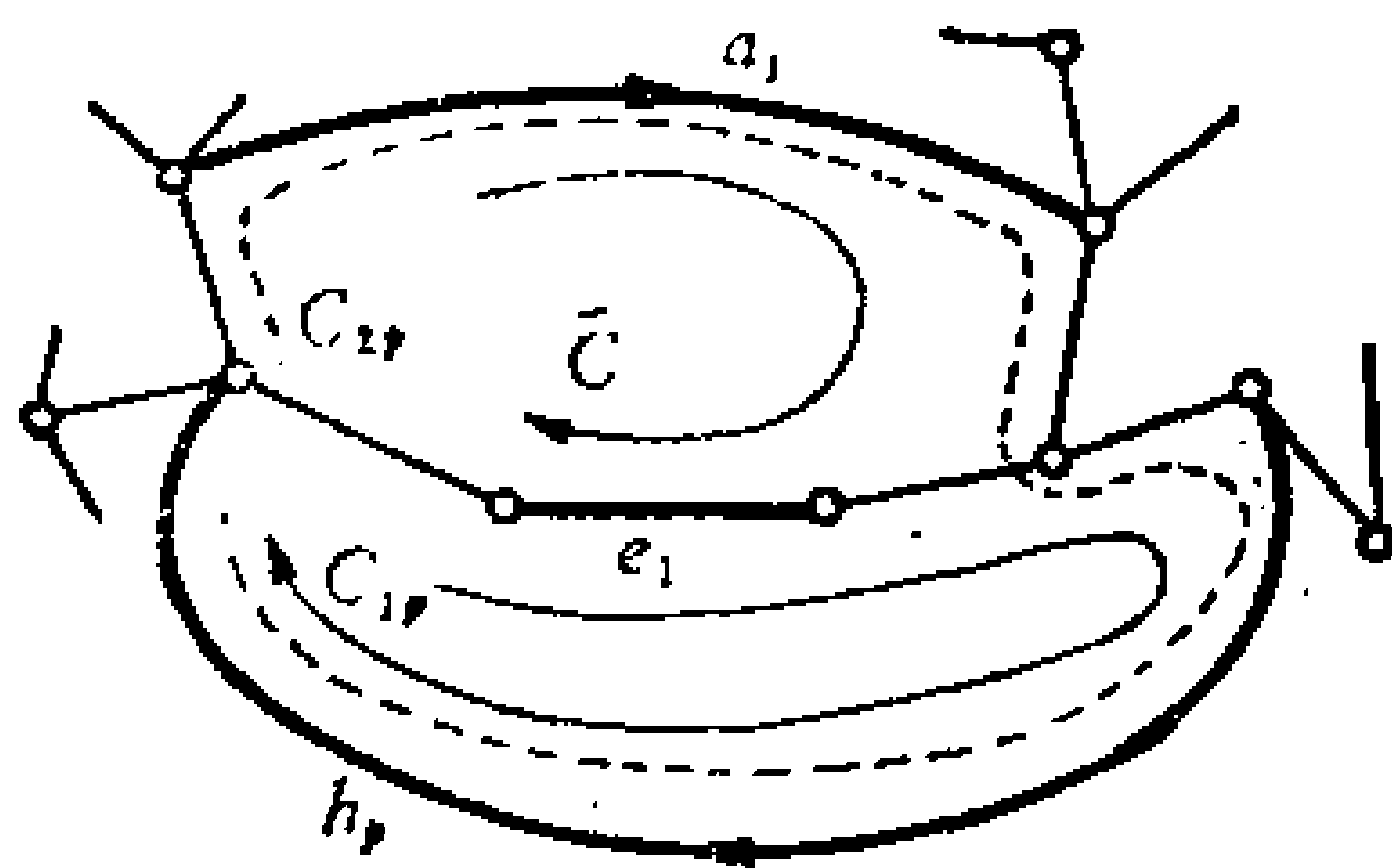


图6-3-3 回路C_{1p}

现在考虑矩阵B_2，为了简便，我们设B_2的第一行代表回路C，而第p行代表回路C_{1p}，$p=2,3,\cdots,m$。在B_f中，规定C的方向与a_1的方向一致，因为a_1是关于t_1的弦。为了使B_2成为一个关于t_2的基本回路矩阵，要用e_1来代替a_1作为弦。这样，要使B_2的第一行代表关于t_2的回路C，必须使C的方向与e_1的一致。如果关于t_2的C和关于t_1的C方向不一致，则在第一行上乘上-1。

因为对$2\leqslant p\leqslant k$，关于t_1的基本回路C_{1p}也是关于t_2的基本回路，故对$2\leqslant p\leqslant k$，B_2的这些行代表关于t_2的基本回路C_{2p}。

最后，对于$k+1\leqslant p\leqslant m$，由$B_2$的第$p$行代表的回路$C_{1p}$包含边$e_1$，因此$C_{1p}$不是关于树$t_2$的基本回路，所以，我们必须把$C_{1p}$变成对应的回路$C_{2p}$。由于$C_{1p}$和$C_{2p}$的方向都与弦$h_p$一致，而式（6-3-6）表明，从第$p$行中加上或者减去第一行（代表回路$C$），将得到一个新的第$p$行，它代表回路$C_{2p}$。因此，用把一行加或者减去其他行，必要时用-1乘上一行，以及调整行次序的方法，可以把式(6-3-2)中的回路矩阵B_2变成基本回路矩阵

$$B_{2f}=[U \quad B_{2f_{12}}] \qquad (6\text{-}3\text{-}7)$$

这些运算不改变B_f的任一非奇异大子阵行列式的绝对值。因此，B_f的一个非奇异大子阵和B_{2f}的对应非奇异大子阵(它们的列代表边的相同的集合）具有这样的性质：它们的行列式相同，但符号不同。并且，由于B_2的大子阵$\underline{B}_{11}$变成了B_{2f}中的U，可以看出，$\underline{B}_{11}$的行列式或者为$+1$，或者为-1。一般说来，若一个树与t_1距离为1，则B_f与关于此树的弦集对应的的任一大子式或为$+1$，或为-1。

调整B_{2f}的行和列，可以得到

$$B_3 = [\underline{\underline{B}}_{11} \quad \underline{\underline{B}}_{12}] \tag{6-3-8}$$

其中$\underline{\underline{B}}_{11}$是非奇异的。假定对应于$\underline{\underline{B}}_{12}$的列是树$t_3$，它与$t_2$距离为1。则可以看出，$\underline{\underline{B}}_{11}$的行列式或为$+1$，或为$-1$。因此$B_{2f}$的对应于关于树$t_3$（它与$t_1$距离为2）的弦集的大子式或为+1，或为-1。一般来说，对于一个与t_2距离为1的树，B_{2f}的任一个与关于此树的弦集对应的大子式，可选取为式(6-3-8)中的$\underline{\underline{B}}_{11}$。现在我们可以说，对于一个与$t_1$距离为2的树，$B_f$的任一个与关于此树的弦集对应的非零大子式或为+1，或为-1。

任何树均可由t_1经过逐次初等树变换得到，由这一事实，我们得到下面定理。

定理6-3-1 基本回路矩阵的任一非奇异大子阵的行列式或为+1，或为-1。

例6-3-1 图6-3-4所示有向图关于树$t_1=(g,h,i,j)$的基本回路矩阵B_f是

$$B_f = \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & d & f & g & h & i & j \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

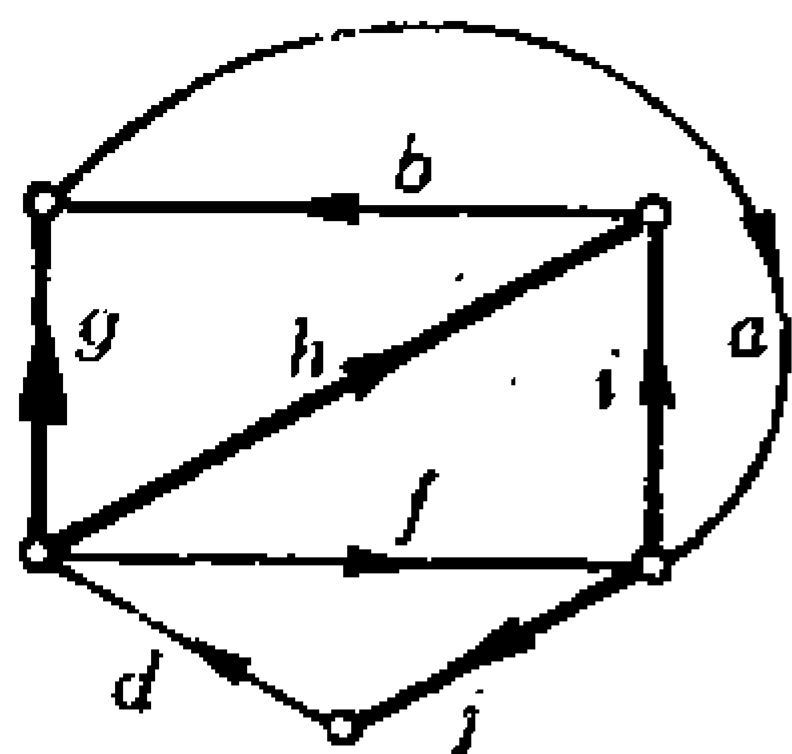


图6-3-4　有向线图

关于树 $t_2=(g,h,d,j)$ 的基本回路矩阵B_{2f}可由B_f经以下步骤得到：

1.交换列d和i，并以-1乘第三行：

$$\begin{array}{cccccccc} a & b & i & f & g & h & d & j \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.因为$t_2=t_1\oplus(i,d)$，故第三行对应于关于t_1和t_2二者的基本回路。利用这个回路，我们要把上述矩阵中的行（除第三行外）所表示的包含边i的回路变成不包含边i的回路。为此，我们把第三行乘上-1，加到第一行和第四行，所得的矩阵就是关于t_2的基本回路矩阵：

$$\begin{array}{cccccccc} a & b & i & f & g & h & d & j \end{array}$$
$$B_{2f}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

我们知道，与穷举回路矩阵B_3中的行相对应的任一回路，可以用基本回路矩阵B_f的行作线性组合得到。因此，有向图中秩为$n_e-n_v+\rho$的任一回路矩阵B可以表示为

$$B=DB_f \tag{6-3-9}$$

这里D是一个非奇异矩阵，因此，B的任一个非奇异大子阵的行列式等于$\pm|D|$。

定理6-3-2　设B是一个回路矩阵，又设B_{11}是B的一个非奇异大子阵，$|B_{11}|=k$，则B的任何非奇异大子阵的行列式等于$\pm k$。

例如，图6-3-1中有向图的回路矩阵是

$$B=\overset{\begin{matrix} a & b & d & e \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}$$

这个矩阵的非奇异子阵的行列式的绝对值是

$$\overset{\begin{matrix} a & d \end{matrix}}{\left\|\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right\|}=\overset{\begin{matrix} a & e \end{matrix}}{\left|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}\right|}=\overset{\begin{matrix} b & d \end{matrix}}{\left|\begin{matrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix}\right|}=\overset{\begin{matrix} b & e \end{matrix}}{\left\|\begin{matrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{matrix}\right\|}=2$$

关于$t=(b,e)$的基本回路矩阵B_f是

$$B_f=\overset{\begin{matrix} a & d & b & e \end{matrix}}{\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]}$$

选矩阵D为

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

我们有

$$DB_f=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\overset{\begin{matrix} a & d & b & e \end{matrix}}{\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]}=\overset{\begin{matrix} a & d & b & e \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}=B$$

列b和d交换了位置。注意，$|D|=2$。

6-4 割集矩阵

我们已用符号$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_2)$来表示从$\Omega_1$中的一个顶点连到$\Omega_2$中的一个顶点的边集合。在无向图中，由于边没有方向，故

$$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_2)=\mathscr{E}(\Omega_2\times\Omega_1) \tag{6-4-1}$$

然而，在有向图的情况下，

$$\mathscr{E}(\Omega_1\times\Omega_2)\neq\mathscr{E}(\Omega_2\times\Omega_1) \tag{6-4-2}$$

例如，在图6-4-1的有向图中，若$\Omega_1=(1,2)$，$\Omega_2=\overline{\Omega}_1$，则$\mathscr{E}(\Omega_1\times\overline{\Omega}_1)$是$(b,d,e)$，而$\mathscr{E}(\overline{\Omega}_1\times\Omega_1)$是空集。

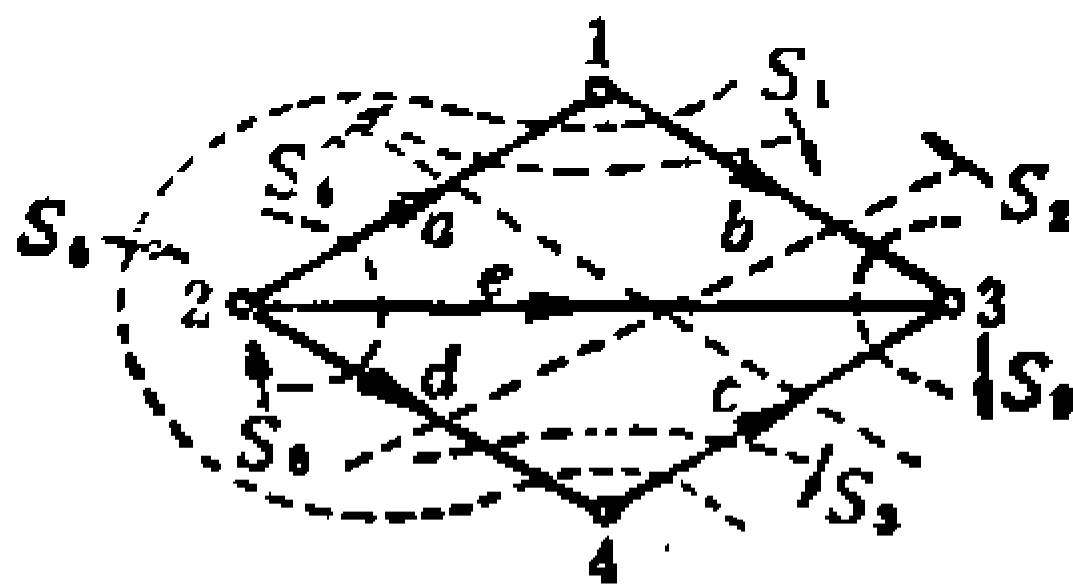


图6-4-1　有向图中的割集

假定删去线图G中割集S的所有边，得到两个连通子图G_1和G_2。设Ω_1是G_1中所有顶点的集合，$\overline{\Omega}_1$是G_2中所有顶点的集合。如果G是无向的，我们知道，$\mathscr{E}(\Omega_1\times\overline{\Omega}_1)$是割集$S$。但是，如果$G$是有向的，$\mathscr{E}(\Omega_1\times\overline{\Omega}_2)$就不一定是割集$S$了。在一个有向图中，割集$S$可以由下式表示：

$$S=\mathscr{E}(\Omega_1\times\overline{\Omega}_1)\cup\mathscr{E}(\overline{\Omega}_1\times\Omega_1) \tag{6-4-3}$$

定义6-4-1　在式（6-4-3）里，若割集S的$\mathscr{E}(\Omega_1\times\overline{\Omega}_1)$和$\mathscr{E}(\overline{\Omega}_1\times\Omega_1)$中，有一个（而不是两个）为空集，就称$S$为有向割集。

由于边有方向，故割集也具有方向。考虑割集$S=\mathscr{E}(\Omega_1\times\overline{\Omega}_1)\cup\mathscr{E}(\overline{\Omega}_1\times\Omega_1)$，$S$的方向或者是从$\Omega_1$到$\overline{\Omega}_1$，或者是从$\overline{\Omega}_1$到$\Omega_1$。为了简便，我们用一个箭头来表示割集的方向。例如，图6-4-2所示割集S的箭头表示S的方向是从Ω_1到$\overline{\Omega}_1$，这里Ω_1是G_1中所有顶点的集合。即使$S=\mathscr{E}(\Omega_1\times\overline{\Omega}_1)\cup\mathscr{E}(\overline{\Omega}_1\times\Omega_1)$是一个割集的无重边并，对$S$也只给出一个方向，或者是从$\Omega_1$到$\overline{\Omega}_1$，或者是从$\overline{\Omega}_1$到$\Omega_1$。

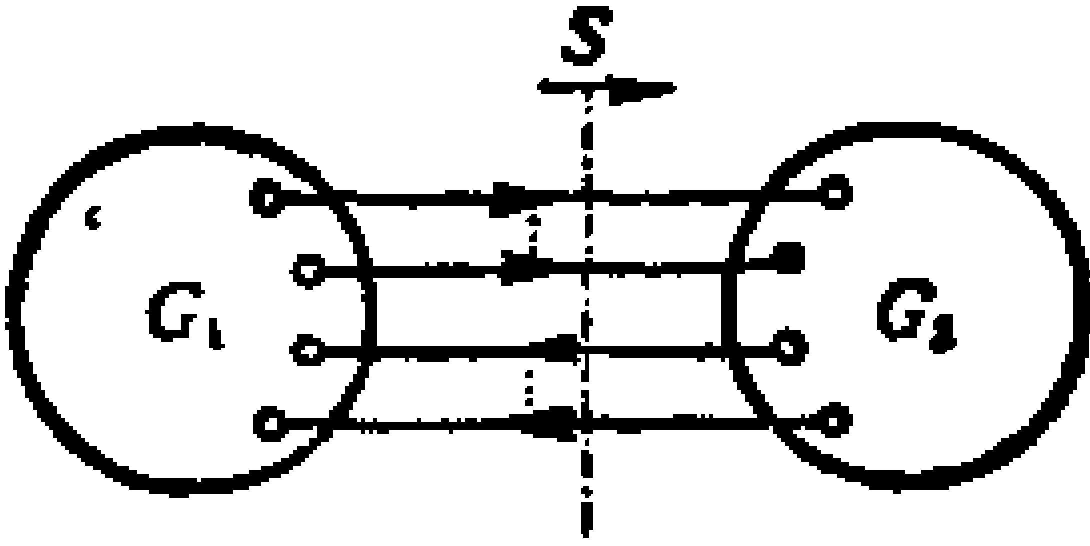


图6-4-2　割集及其方向

我们也可以不用Ω_1和$\bar{\Omega}_1$，而用两个顶点p和q，$p\in\Omega_1$，$q\in\bar{\Omega}_1$，来表示割集（或割集的无重边并）的方向。即我们可以说，割集S的方向是从顶点p到顶点q，这就暗示了，p和q是被S分离开的。

例6-4-1 图6-4-1中有向图的割集和割集的无重边并是

$$S_1=\mathscr{E}((1)\times(1))\cup\mathscr{E}((1)\times(1))=(a,b)$$

$$S_2=\mathscr{E}((1,2)\times(\overline{1,2}))\cup\mathscr{E}((\overline{1,2})\times(1,2))=(b,d,e)$$

$$S_3=\mathscr{E}((4)\times(\bar{4}))\cup\mathscr{E}((\bar{4})\times(4))=(c,d)$$

$$S_4=\mathscr{E}((1,3)\times(\overline{1,3}))\cup\mathscr{E}((\overline{1,3})\times(1,3))=(a,c,e)$$

$$S_5=\mathscr{E}((1,4)\times(\overline{1,4}))\cup\mathscr{E}((\overline{1,4})\times(1,4))=(a,b,c,d)$$

$$S_6=\mathscr{E}((2)\times(\bar{2}))\cup\mathscr{E}((\bar{2})\times(2))=(a,d,e)$$

$$S_7=\mathscr{E}((3)\times(\bar{3}))\cup\mathscr{E}((\bar{3})\times(3))=(b,c,e)$$

S_2,S_4,S_6,S_7都是有向割集，S_5是割集的无重边并，这些割集的方向可以象图6-4-1中那样选取。例如，S_5的方向是从(1,4)到(2,3)。如果用顶点1和2比用顶点集合(1,4)和(2,3)更简便，那么我们可以说，S_6的方向是从1到2。

现在，我们可以定义穷举割集矩阵如下。

定义6-4-2 有向图G的穷举割集矩阵Q_e的定义为

$$Q_e=[q_{ij}] \tag{6-4-4}$$

其中

$$q_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若边 } j \text{ 在割集（或割集的无重边并）} i \text{ 中，且边 } j \text{ 的方向与割集（或割集的无重边并集）} i \text{ 一致}\\ -1 & \text{若边 } j \text{ 在割集（或割集的无重边并）} i \text{ 中，且边 } j \text{ 的方向与割集（或割集的无重边并）} i \text{ 不一致}\\ 0 & \text{若边 } j \text{ 不在割集（或割集的无重边并）} i \text{ 中}\end{cases} \tag{6-4-5}$$

G中每一个割集和每个割集的无重边并由Q_e中的一行表示。

例如，图6-4-1中有向图的穷举割集矩阵Q_e是

$$Q_e=\begin{matrix} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{matrix}\begin{matrix} a & b & c & d & e \\ \left[\begin{matrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{matrix}\right] \end{matrix}$$

由穷举割集矩阵Q_e的定义，我们可以看出，Q_e的每一行代表一个割集或一个割集的无重边并。为了简便，我们用符号$R(S)$表示Q_e中代表割集（或割集的无重边并）S的行。设一个割集(或割集的无重边并）是

$$S_c=\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)\cup\mathscr{E}(\bar{\Omega}_1\times\Omega_1) \qquad (6\text{-}4\text{-}6)$$

其中$\Omega_1=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$，则由定理2-4-1，我们知道：

$$S_c=S_1\oplus S_2\oplus\cdots\oplus S_n \qquad (6\text{-}4\text{-}7)$$

其中

$$S_r=\mathscr{E}((v_r)\times(\bar{v}_r))\cup\mathscr{E}((\bar{v}_r)\times(v_r)) \qquad (6\text{-}4\text{-}8)$$

是对应顶点v_r的关联集，$r=1,2,\cdots n$。我们要看看是否有

$$R(S_c)=\sum_{r=1}^{n}R(S_r) \qquad (6\text{-}4\text{-}9)$$

其中S_c的方向是从Ω_1到$\bar{\Omega}_1$，而S_r的方向是从(v_r)到$(\bar{v}_r)$，$r=1,2,\cdots,n$。一种方法是检验$R(S_c)$的每一列是否等于$R(S_r)$中对应列的和。因为每一列代表一条边，故我们只要考虑两种类型的边，一种是S_c中的边，另一种不是S_c中的，而是S_r中的边。

类型1　设边e是S_c中的边，v_p和v_q是边e的两个端点，且边e

的方向是从v_p到v_q。则在$R(S_C)$中，列e是1还是-1，取决于是$v_p \in \Omega_1$，还是$v_q \in \Omega_1$。假定$v_p \in \Omega_1$，则$1 \leqslant p \leqslant n, q > n$。由于在$S_1, S_2, \cdots, S_n$中只有一个关联集$S_p$包含$e$，且在$R(S_p)$中列$e$为1，故对于这种情况，式(6-4-9)为真。我们容易证明，对于v_q在Ω_1中的情况，式(6-4-9)也为真。

类型2　假定边e不在S_C中。显然，若边e不在$S_1, S_2, \cdots, S_n$的任何一个中，则式(6-4-9)为真。因而，我们假设边e至少在这些关联集的一个之中，故边e的两个端点必在Ω_1中。设v_p和v_q是边e的两个端点，且边e的方向是由v_p到v_q。不失一般性，设$1 \leqslant p < g \leqslant n$，则在$S_1, S_2, \cdots, S_n$中，恰有两个关联集$S_p$和$S_q$包含边$e$。并且$R(S_p)$的列$e$是$+1$，$R(S_q)$的列$e$是-1。因此在这种情况下，式(6-4-9)为真。我们已假设关联集S_r的方向是由(v_r)到$(\bar{v}_r)$。如果我们不作此假设，就必须将式(6-4-9)修改如下：

$$R(S_C) = \sum_{r=1}^{n} k_r R(S_r) \qquad (6\text{-}4\text{-}10)$$

其中

$$k_r = \begin{cases} -1 & 若S_r的方向是由(\bar{v}_r)到(v_r) \\ 1 & 若S_r的方向是由(v_r)到(\bar{v}_r) \end{cases} \qquad (6\text{-}4\text{-}11)$$

这是因为据Q_e的定义，-1乘$R(S_r)$相当于改变S_r的方向。这一结果说明，一个穷举割集矩阵Q_e的任意一行，都可以由一个穷举关联矩阵A_e中若干行的线性组合得到。

定理6-4-1　一个有向图G的穷举割集矩阵的秩是$n_v-\rho$，这里n_v是G的顶点数，ρ是G中最大连通子图的数目。

由这个定理，我们可以看出，Q_e的任一个秩为$n_v-\rho$的子矩阵Q可表示为：

$$Q = DA \qquad (6\text{-}4\text{-}12)$$

其中D是一个非奇异矩阵。

因为

$$AB' = 0 \quad (6\text{-}4\text{-}13)$$

由式(6-1-6)，我们有

$$QB' = DAB' = 0 \quad (6\text{-}4\text{-}14)$$

定义6-4-2 设G是由ρ个最大连通子图组成的有向图。G的穷举割集矩阵Q_e的一个子矩阵Q称为G的割集矩阵，如果Q是由Q_e的$n_v-\rho$行组成，且Q的秩是$n_v-\rho$。

定理6-4-2 设Q和B分别是一个有向图的割集矩阵和回路矩阵，则有

$$QB' = 0 \quad (6\text{-}4\text{-}15)$$

$$BQ' = 0 \quad (6\text{-}4\text{-}16)$$

当一个割集矩阵是正规形式时，我们称它为有向图的基本割集矩阵。

定义6-4-3 一个形如

$$Q_f = [Q_{f_{11}} U] \quad (6\text{-}4\text{-}17)$$

的割集矩阵Q_f，称为基本割集矩阵。

除了对基本割集规定一个方向以外（这对于无向图是不需要的），一个有向图的基本割集矩阵可以用与无向图完全相同的方法得到。换句话说，对于一个给定的树t(当$\rho>1$时是林)，我们可以用找出无向图的基本割集集合的方法，找出有向图的基本割集集合，然后我们选取基本割集的方向，使其与t在此基本割集中的枝的方向一致。利用这个有向基本割集集合，我们可以得到基本割集矩阵为

$$Q_f = [Q_{11} U] \quad (6\text{-}4\text{-}18)$$

其中单位矩阵U的列对应于t的枝。例如，在图6-4-1所示的有向线图中，如果我们选取树t为$t=(a,d,e)$，则基本割集的集合由以下三个基本割集组成：

$$S_a = \mathscr{E}((2,3,4)\times(1)) \cup \mathscr{E}((1)\times(2,3,4))$$

$$S_d = \mathscr{E}((1,2,3)\times(4)) \cup \mathscr{E}((4)\times(1,2,3))$$

$$S_e = \mathscr{S}((1,2,4)\times(3)) \cup \mathscr{S}((3)\times(1,2,4))$$

其中S_a的方向是由(2,3,4)到(1)，S_d的方向是由(1,2,3)到(4)，S_e的方向是由(1,2,4)到(3)．因此，关于树t的基本割集矩阵Q_f是：

$$Q_f = \begin{matrix} \\ S_a \\ S_d \\ S_e \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} b & c & a & d & e \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cc:ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{matrix}$$

用关于同一个树（林）的基本割集矩阵和基本回路矩阵，由定理6-4-2得：

$$Q_f B_c' = [Q_{11} U]\begin{bmatrix} U \\ B'_{c_{12}} \end{bmatrix} = 0 \qquad (6\text{-}4\text{-}19)$$

故

$$Q_{11} = -B'_{c_{12}} \qquad (6\text{-}4\text{-}20)$$

也可以表示为

$$Q_f = [-B_c{}'_{12} U] \qquad (6\text{-}4\text{-}21)$$

类似地，我们可以将基本回路矩阵表示为：

$$B_c = [U - Q_{11}{}'] \qquad (6\text{-}4\text{-}22)$$

例如，在图6-4-1所示的有向线图中，根据关于树$t=(a,d,e)$的基本割集矩阵，我们有

$$Q_{11} = \begin{matrix} \begin{matrix} b & c \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

因此，关于有向线图中树t的基本回路矩阵是

$$B_c = \begin{matrix} \begin{matrix} b & c & a & d & e \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \end{matrix}$$

6-5　基本割集矩阵的可实现性

在3-5节中，我们为了检验一个矩阵是否为一个无向图的基本割集矩阵，使用了M子阵。这里我们将看到，可以用同样的方法来检验有向图的基本割集矩阵。不过，我们要先来研究有向图基本割集矩阵的一个性质。

定理6-5-1　设G'是将有向图G的所有边方向颠倒而得到的另一个有向图，如果矩阵$Q_f=[Q_{11}U]$是G的基本割集矩阵，那么Q_f也是G'的基本割集矩阵。

证明：当每一条边的方向被颠倒时，我们将割集的方向也颠倒，就得到相同的割集矩阵。

（证毕）

下一个定理表明了M子阵对的一个重要性质，它导出了有向图基本割集矩阵的一个可实现条件。

定理6-5-2　设矩阵$M_{1+2}=[M_{11}U]$关于行p的M子阵对是M_1和M_2。假定存在有向图$g_k(k=1,2)$，使得：(1)对于$k=1,2$，g_k的基本割集矩阵是M_k；(2)对于$k=1,2$，在g_k中存在顶点p，使得M_k中的行p，或(-1)乘行p代表关于顶点p的关联集。那么存在一个线图g_{1+2}，使得：(1)M_{1+2}是g_{1+2}的基本割集矩阵；（2）对于$M_k(k=1,2)$中除行p外的每一行q，如果行q或(-1)乘行q代表g_k中的一个关联集，则M_{1+2}中的行q或(-1)乘行q代表g_{1+2}中的一个关联集。

证明：我们用构造一个满足定理中条件的有向图g_{1+2}的方法，来证明这个定理。

因为$M_k(k=1,2)$是M_{1+2}关于行p的一个M子阵，所以在g_k中存在一个顶点p，M_k的行p或(-1)乘行p代表关于顶点p的关联集。换句话说，g_1中连接到顶点p的边和g_2中连接到顶点p的边是相

向的。设$(e_1, e_2, \cdots, e_m)$是g_1(及g_2)中与顶点 p 连接的所有边的集合。为了简便，如果g_1中e关于顶点p的方向与g_2中e关于顶点p的方向一致，我们就说g_1和g_2中边 e 的方向"一致"。否则，我们说g_1和g_2中边e的方向"不一致"。例如，如果g_1中边e的方向是离开顶点p，而g_2中e的方向是指向顶点p的，则g_1和g_2中e的方向不一致。另一方面，如果g_1中e的方向是离开顶点p，g_2中 e 的方向也是离开顶点p的，那么g_1和g_2中e的方向是一致的。

因为$M_k(k=1,2)$的行p或(-1) 乘行 p 代表 g_k 中的一个关联集，如果g_1和g_2中与顶点p相连的一条边的方向是一致的，那么，在g_1和g_2中，与顶点p相连的每一条边方向都是一致的。反之，如果g_1和g_2中与顶点p相连的一条边方向不一致，则在g_1和g_2中，与顶点p相连的每一条边方向都不一致。

情形 1　假定在g_1和g_2中，与顶点p相连的一条边方向不一致，如图6-5-1所示．设对$r=1,2,\cdots,m$，在g_1中v_{1r}和p是边e_r的端点，在g_2中v_{2r}和p是边e_r的端点，则我们可以这样来得到 g_{1+2}：从g_1和g_2中删去边$e_1, e_2, \cdots, e_m$，然后在v_{1r}和v_{2r}之间加上边e_r，$r=1,$

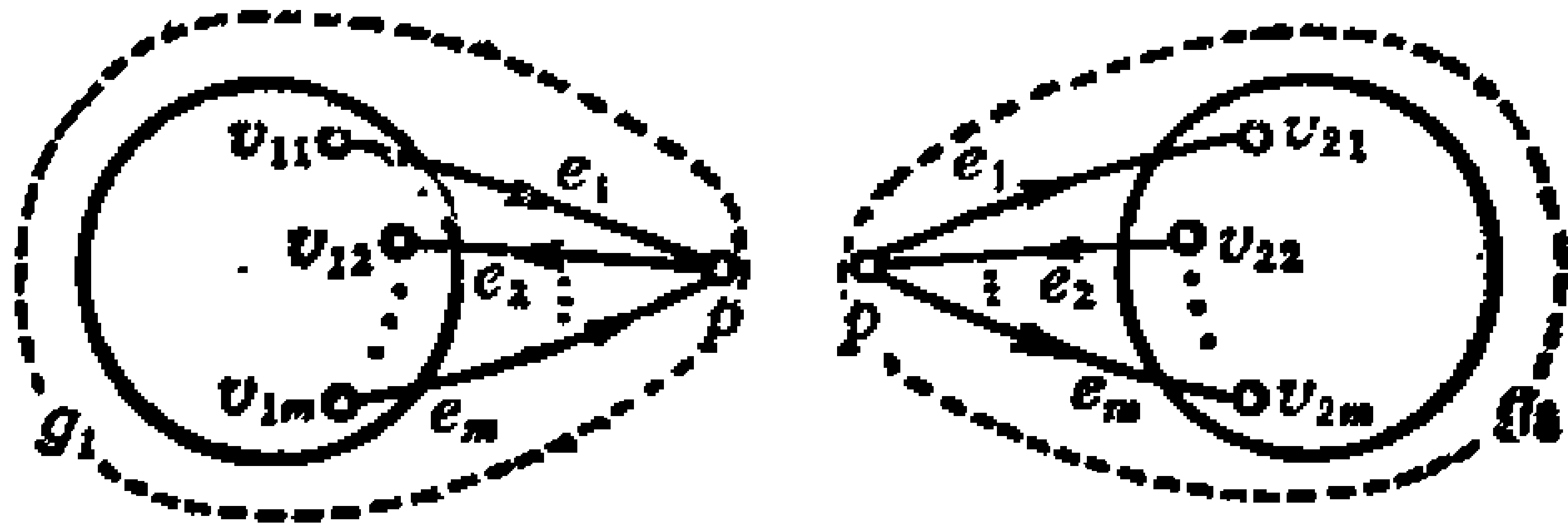


图6-5-1　线图g_1和g_2

$2,\cdots,m$，使其方向与g_1中e_r关于v_{1r}的方向一致，如图6-5-2所示。显而易见，所得的图g_{1+2}满足定理的条件。

情形 2　假定在g_1和g_2中，边e_r的方向是一致的，如图6-5-3所示。则据定理6-5-1，我们可以颠倒g_2中所有边的方向，得到

一个新的线图g_2'，其基本割集矩阵仍为M_2。注意，如果M_2中的

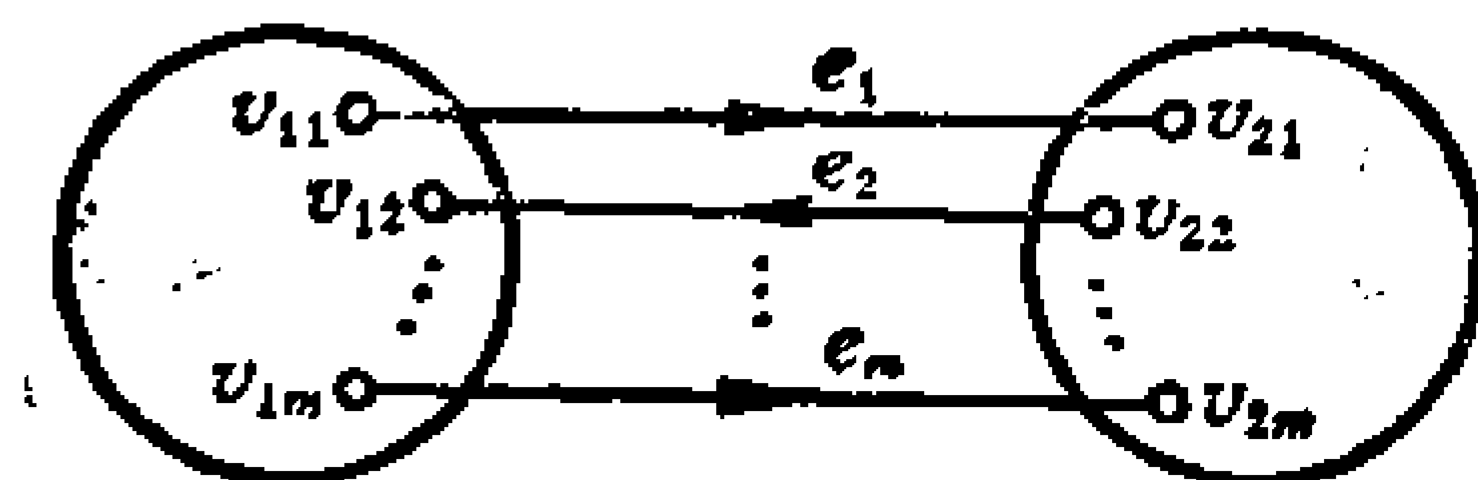


图3-5-2　线图g_{1+2}

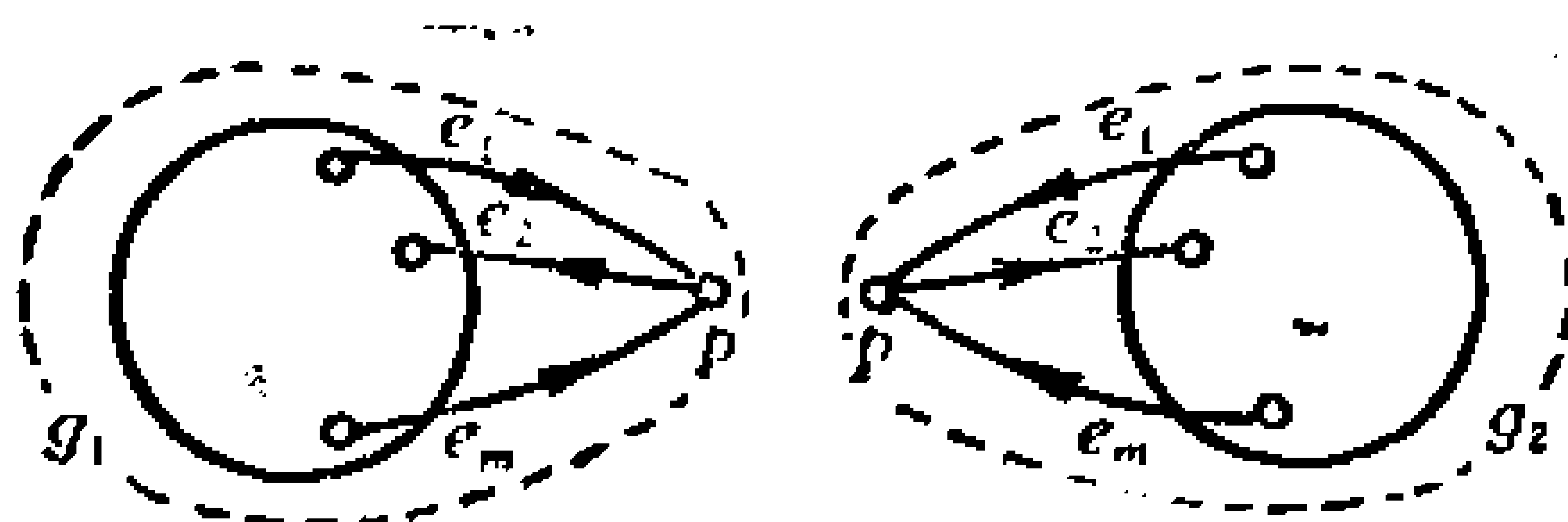


图6-5-3　线图g_1和g_2

一行q代表g_2中关于顶点q的关联集，则(-1)乘行q代表g_2'中关于顶点q的关联集。同样，如果(-1)乘M_2中行q代表g_2中关于顶点q的关联集，则M_2中行q代表g_2'中关于顶点q的关联集。现在考虑g_1和g_2'，这种情形已经变成了上一种情形。因此我们可以得到所求的有向图g_{1+2}。　　　　　　　　　　　　　　　　　　(证毕)

定理6-5-3与定理3-5-8相似，后者是无向图的可实现性条件。

定理6-5-3　矩阵$R=[R_{11}U]$是一个有向图的基本割集矩阵，当且仅当存在R的一个最小M子阵集合，使得其中每一个最小M子阵，在某些行乘上(-1)后，变成关联矩阵。

注意，一个由+1，-1和0组成的矩阵是一个关联矩阵，当且仅当它的每一列有一个非零元或两个符号相反的非零元。我们知道，对于一个有向图来源，关于顶点v的关联集可以表示为$\mathscr{E}((v)\times(\bar{v}))\cup\mathscr{E}((\bar{v})\times(v))$，它的方向是从$(v)$到$(\bar{v})$。我们还知

道，对于一个顶点p来说，集合$\mathscr{E}((p)\times(\bar{p}))\cup\mathscr{E}((\bar{p})\times(p))$或为割集，或为割集的无重边并。假定$\mathscr{E}((p)\times(\bar{p}))\cup\mathscr{E}((\bar{p})\times(p))$的方向是从$(\bar{p})$到$(p)$，则集合$\mathscr{E}((p)\times(\bar{p}))\cup\mathscr{E}((\bar{p})\times(p))$不是关联集，因为它与我们所规定的关联集方向相反。假定此集合由一个割集矩阵的行p表示，我们知道，用(-1)乘行p相当于颠倒这个集合的方向。因此，用(-1)来乘行p，就使行p所代表的集合$\mathscr{E}((p)\times(\bar{p}))\cup\mathscr{E}((\bar{p})\times(p))$变成了一个关联集。根据这一事实，并运用定理6-5-2，就可以证明定理6-5-3（我们将它留给读者）。

例6-5-1 考虑矩阵R：

$$R=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc}a&b&c&d&e&f&g&h&i\end{array}\\\left[\begin{array}{ccccc|cccc}-1&1&1&0&0&1&0&0&0\\1&0&-1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&-1&-1&0&0&1&0\\0&1&1&0&-1&0&0&0&1\end{array}\right]\end{array}$$

它的最小M子阵集合是

$$M_1=\begin{array}{c}\\1\\2\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}a&b&c&f&g\end{array}\\\left[\begin{array}{ccccc}-1&1&1&1&0\\1&0&-1&0&1\end{array}\right]\end{array}$$

$$M_2=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}a&c&g\end{array}\\\left[\begin{array}{ccc}1&-1&1\end{array}\right]\end{array}$$

$$M_3=3\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}c&d&e&h\end{array}\\\left[\begin{array}{cccc}1&-1&-1&1\end{array}\right]\end{array}$$

$$M_4=\begin{array}{c}\\1\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}a&b&c&e&f&i\end{array}\\\left[\begin{array}{cccccc}-1&1&1&0&1&0\\0&1&1&-1&0&1\end{array}\right]\end{array}$$

$$M_5 = \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} b & c & d & e & h & i \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

用(-1)乘M_4和M_5的行 4，就得到

$$M_4' = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & e & f & i \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

和

$$M_5' = \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} b & c & d & e & h & i \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

因为M_1, M_2, M_3, M_4'和M_5'都是关联矩阵，据定理6-5-3知，矩阵R是一个有向图的基本割集矩阵。

6-6 有向子图

在上一节中，我们发现，有向图的割集矩阵、回路矩阵和无向图的割集矩阵、回路矩阵，有许多相同的性质。换句话说，在一个有向图中，象割集，回路和路径这样一些子图，除了我们对它们规定有方向，使得子图中边的方向可以和子图的方向作比较这一点外，其余性质都与对应无向图中的子图相同。因此，我们在前几章中所研究的，关于无向线图的性质，几乎都可以变成有向图的性质，而无需作较大的修改。另外，还有一些有向图的重要子图，它们的特殊性质不能由对应无向图得到。这些子图就是所谓有向回路，有向路径和有向树。为了研究这些子图，需要对它们作出确切的定义。

定义6-6-1 有向边列是满足以下条件的边列，它具有从始点到终点的方向，并且边列中每条边的方向与此边列的方向一致。

例如，在图6-6-1所示的有向线图中，$(abcde)$是一个有向边列，而(abf)不是有向边列。

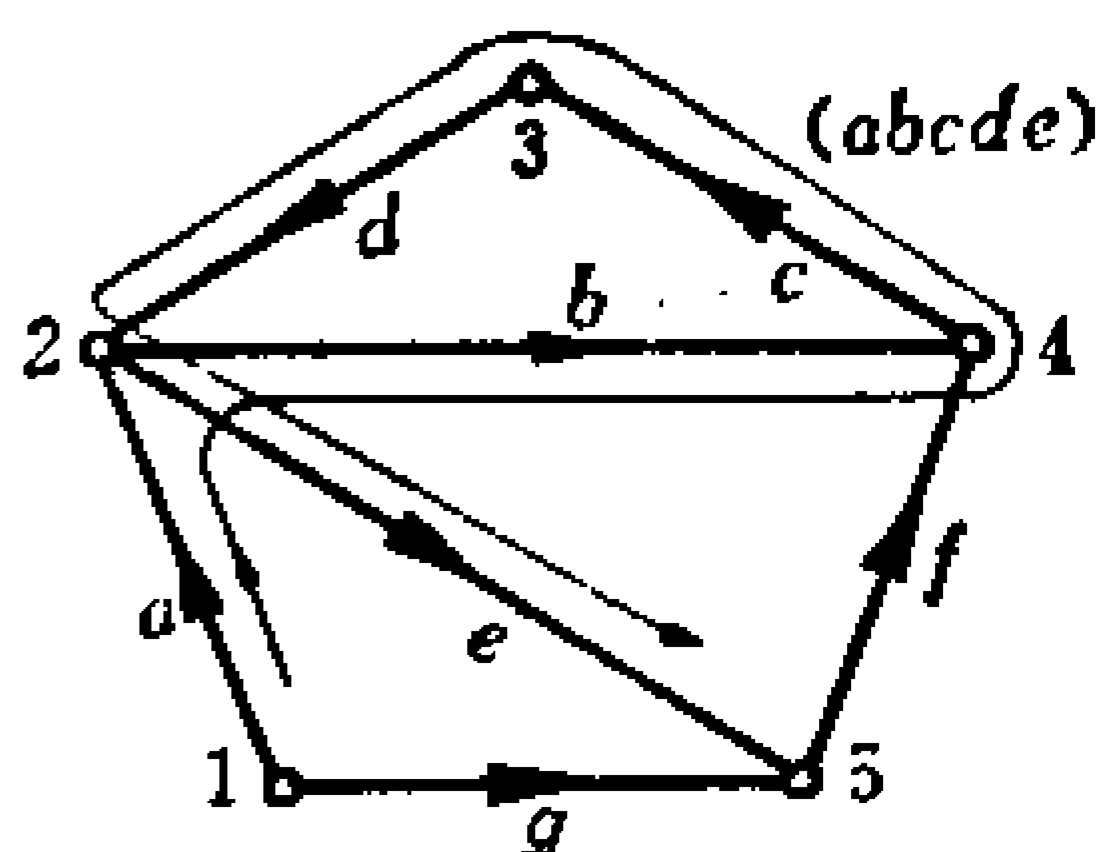


图6-6-1 一个有向图

定义6-6-2 如果一个有向边列的始点和终点相同，则称此边列为有向闭边列。否则，称为有向开边列。

例如，图6-6-1中的$(b\ c\ d)$是一个有向闭边列，而$(abcde)$是一个有向开边列。

与无向图中顶点的度类似，我们定义有向图顶点的出度和入度。

定义6-6-3 顶点v的出度$d^+(v)$，是与顶点v连接且方向为离开顶点v的边的数目。顶点v的入度$d^-(v)$，是与顶点v连接且方向为指向顶点v的边的数目。

例如，在图6-6-1中顶点2的出度$d^+(2)$和入度$d^-(2)$分别为：

$$d^+(2) = 2$$

和

$$d^-(2) = 2$$

顶点5的出度$d^+(5)$和入度$d^-(5)$分别为

$$d^+(5) = 1$$

和

$$d^-(5) = 2$$

根据这个定义，可以看出

$$d(v) = d^+(v) + d^-(v) \qquad (6\text{-}6\text{-}1)$$

其中$d(v)$是顶点v的度。

定义6-6-4 一个有向图称为有向欧拉图，如果对于每一个顶点v，其出度$d^+(v)$等于入度$d^-(v)$。

例如，图6-6-2中的有向图是一个有向欧拉图，而图6-6-3中的有向图不是有向欧拉图。

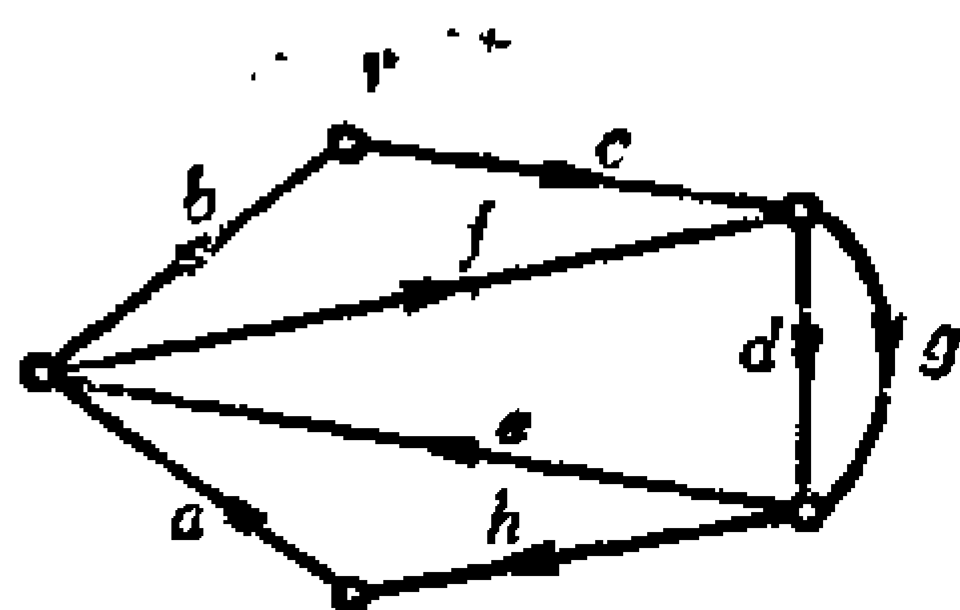


图6-6-2 有向欧拉图

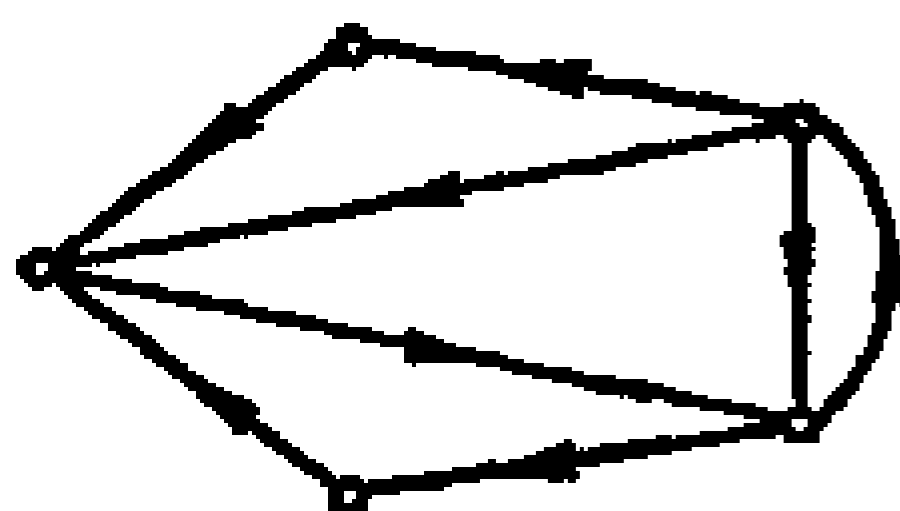


图6-6-3 欧拉图

现在，容易证明下列定理。

定理6-6-1 一个连通有向图是有向欧拉图，当且仅当存在一条包含图中所有边的有向闭边列。

例如，图6-6-2中有向欧拉图的闭边列($abcdefgh$)包含了图中所有的边。

定义6-6-5 如果一个连通有向欧拉图具有这样的性质：它的每个顶点的度为2（即与每个顶点恰有两条边相连），则称此连通有向欧拉图为有向回路。

例如，图6-6-2中所有的有向回路是(a,b,c,d,h)，(a,b,c,g,h)，(a,d,f,h)，(a,f,g,h)，(b,c,d,e)，(b,c,e,g)，(d,e,f)，(e,f,g)。

容易看出，如果C_1和C_2是有向回路，且$C_1 \cap C_2 \neq \phi$，那么$C_1 \oplus C_2$就不是有向回路。一般地说，两个有向欧拉图的环和可能不

是一个有向欧拉图。但是，我们有以下情形。

定理6-6-2 设G是一个有向欧拉图，则对任一个作为G的真子图的有向回路，存在G的子图E_1和E_2，二者均为非空有向欧拉图，使得

$$E_1 \oplus E_2 = C \qquad (6\text{-}6\text{-}2)$$

在证明这个定理之前，我们先来研究另一个定理。

定理6-6-3 设E是一个有向欧拉图，E_1是E的真子图，它也是一个有向欧拉图，则

$$E \oplus E_1 = E - E_1 \qquad (6\text{-}6\text{-}3)$$

是一个有向欧拉图。

这个定理可以用考虑$E-E_1$中每个顶点的入度和出度的方法来证明。再根据定理6-6-3，令$E_1 = E-C$及$E_2 = E$，我们就可得到定理6-6-2的证明。

定理6-6-4 一个有向欧拉图至少包含一个有向回路。

这个定理很容易用构造一个有向闭边列的方法来证明。下一个定理相当明显，但非常重要。

定理6-6-5 有向欧拉图或者是有向回路，或者是有向回路的无重边并。

证明： 据定理6-6-4，在一个有向欧拉图G中，至少存在一个有向回路。设此有向回路为C_1。那么，据定理6-6-3，$G-C_1$是一个有向欧拉图。因此，在$G-C_1$中至少存在一个有向回路，如此类推，最后，$G-C_1-C_2-\cdots-C_k$变为空图。于是，我们可以断定，G是有向回路$C_1, C_2, \cdots, C_k$的无重边并。当$k=1$时，显然G就是一个有向回路。（证毕）

例如，图6-6-2中的有向欧拉图可以看作有向回路(a,d,f,h)和(b,c,e,g)的无重边并。

对于无向图来说，我们已经研究过M图，它是一条路径和若干回路的无重边并。这里，我们要介绍有向M图和有向路径。下

面，我们要证明，一个有向M图是一条有向路径和若干有向回路的无重边并。

定义6-6-6 一个有向图称为$M(i\times j)$类的有向M图，如果它满足以下三个条件：

1. 对除i和j以外的所有顶点，$d^{+}(v)=d^{-}(v)$；
2. $d^{+}(i)=d^{-}(i)+1$；
3. $d^{-}(j)=d^{+}(j)+1$。

设G由一个始点为i，终点为j的有向开边列的所有边组成，则G是一个$M(i\times j)$类的有向M图。例如，图6-6-4中的有向图就是一个$M(i\times j)$类的有向M图。

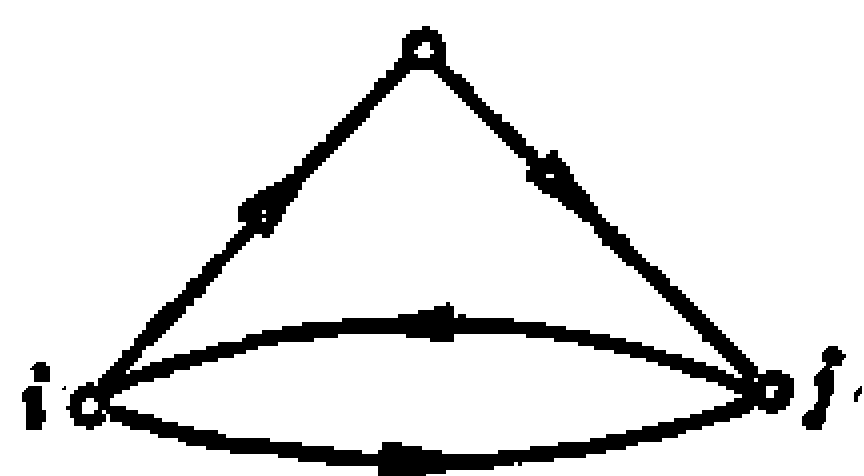


图6-6-4 一个$M(i\times j)$类的M图

当一个$M(i\times j)$类的有向M图不连通时，它的最大连通子图中必然有一个是$M(i\times j)$类的有向M图，而其他的则是有向欧拉图。例如，图6-6-5中的有向图是一个$M(i\times j)$类的分离有向M图。注意，其中除了一个最大连通子图外，其余所有最大连通子图都是有向欧拉图。

图6-6-5 一个$M(i\times j)$类的分离有向M图

有向路径是一种特殊的有向M图。

定义6-6-7 设P是一个$M(i\times j)$类的连通有向M图，如果对

除j外所有的顶点，$d^+(v)=1$，而$d^+(j)=0$，则称P为从i到j的有向路径。

根据这个定义，就得到定理6-6-6。

定理6-6-6 一个$M(i\times j)$类的有向M图或为从i到j的一条有向路径，或为从i到j的一条有向路径与若干有向回路的无重边并。

可以用一个有向边列来完成这个定理的证明。下面，我们发现一个与无向情形的M图相似的性质，这个性质是说，两个具有相同端点的M图的和是一个欧拉图。

定理6-6-7 设$M(i\times j)$是一个$M(i\times j)$类的有向M图，$M(j\times i)$是一个$M(j\times i)$类的有向M图。假定

$$M(i\times j)\cap M(j\times i)=\phi \qquad (6\text{-}6\text{-}4)$$

则

$$M(i\times j)\oplus M(j\times i)=E \qquad (6\text{-}6\text{-}5)$$

是一个有向欧拉图。

用检查E中每个顶点的入度和出度的办法，很容易完成这个定理的证明。

现在，我们可以将有向M图加以推广。

定义6-6-8 $M[i(k)\times j(k)]$类的有向M图定义为满足以下条件的有向图：

1. 对除i和j外的所有顶点，$d^+(v)=d^-(v)$；
2. $d^+(i)=d^-(i)+k$；
3. $d^-(j)=d^+(j)+k$。

例如，图6-6-6中的有向图是一个$M[i(2)\times j(2)]$类的有向M图。

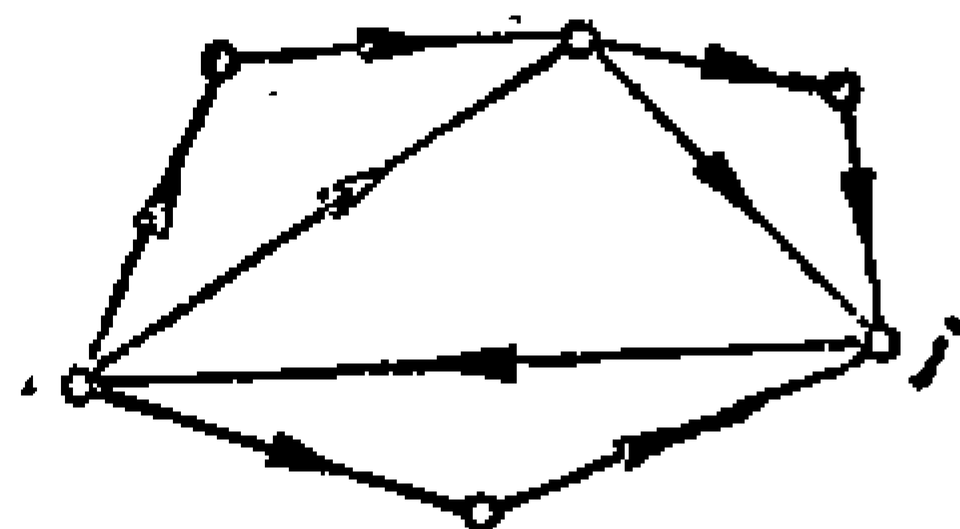


图6-6-6 一个$M[i(2)\times j(2)]$类的有向M图

定理6-6-8 $M[i(k)\times$

$j(k)$]类的有向M图或为从i到j的k条有向路径的无重边并，或为从i到j的k条有向路径和若干有向回路的无重边并。

对k作数学归纳法，并利用有向边列，即可完成这个定理的证明。

知道一个有向图是否包含有向回路，是相当重要的。下面的定理给出了一个有向回路存在的充分条件。

定理6-6-9 如果一个有限连通有向图G的每个顶点的出度为1，则G中恰含有一个有向回路。

证明： 设G是一个有向图，其中，所有的顶点的出度$d^+(v)=1$.首先，我们要证明G最多有一个有向回路.短路G中一条边，显然所得图G_1中所有顶点仍满足$d^+(v)=1$.只要不产生任何自环，我们可以继续把边短路。注意在所有顶点满足$d^+(v)=1$的任一有向图中，不会有两条以上的边并联。又注意到只有当两条边是并联的，如图6-6-7所示时，我们短路这两条边中的一条才会形成自环.用g_p表示一个由两条并联边构成的图.考虑在不产生自环的情况下，将所有边短路后所得的图G_k。因为有向图G是连通的，而短路边不会产生分离图，故G_k必与g_p同构。我们还知道，短路边不会减少有向回路的数目。因此有向图G最多有一个有向回路。

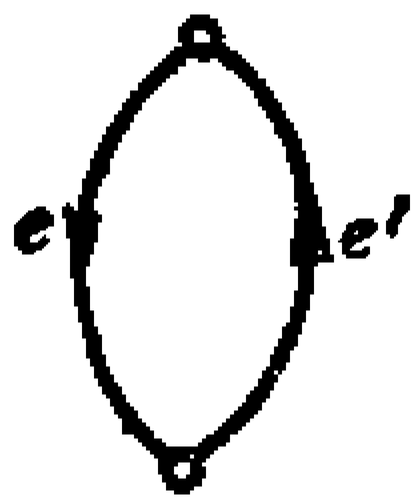


图6-6-7 有向图g_p

现在，我们要证明，有向图G至少有一个有向回路。从顶点v出发，可以得到一个有向边列。因为对于所有的顶点有$d^+(v)=1$，故这个边列只会终止于一个此边列前面已经经过的顶点。因此，如果此有向边列终止了，就至少有一个有向回路。而由于G是有限的，这个边列必然终止。 （证毕）

定理6-6-10 设G是一个连通有向线图，对于所有顶点，有$d^-(v)=1$，则G恰包含一个有向回路.

证明： 将G中每条边的方向颠倒，所得的有向图满足定理

6-6-9的条件，故G恰有一个有向回路。 （证毕）

例如，图 6-6-8 中的连通有向图G满足定理6-6-10的条件，故其中恰存在一个有向回路。

定理6-6-11 如果一个有向图满足以下条件：对所有的顶点有

$$d^{+}(v)>0$$

或对所有的顶点有

$$d^{-}(v)>0$$

则此有向图至少包含一个有向回路。

这个定理易由有向边列证明。

考虑图6-6-9所示的有向图。可以看出，此有向图不满足定理6-6-11的条件。但是，这个有向图包含一个有向回路。这个例子给我们提示了修改上述定理使之变成充分必要条件的一种方法。

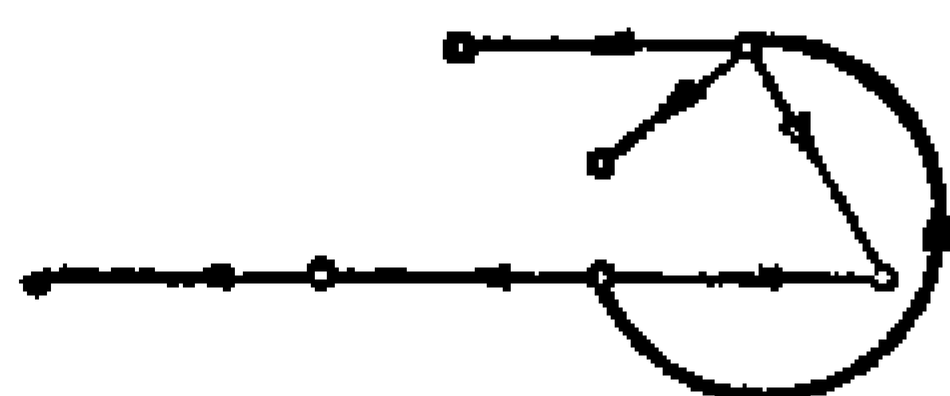


图6-6-8 一个连通有向图

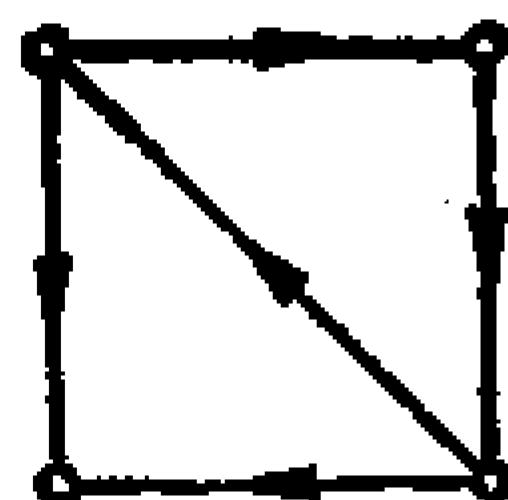


图6-6-9 包含一个有向回路的有向图

定理6-6-12 一个有向图至少包含一个有向回路的充分必要条件是存在一个子图，对于该子图中的所有顶点，满足

$$d^{+}(v)>0$$

或对该子图中所有的顶点有

$$d^{-}(v)>0$$

虽然这个定理给出了一个充分必要条件，但是，考查所有可能的子图来判断一个有向图是否包含有向回路的方法，不是一个有效的方法。为了更有效地判断有向回路的存在性，我们定义消

去顶点的W过程如下。

定义6-6-9 设v是有向图G的一个顶点。假定有$d^+(v)=0$，或者$d^-(v)=0$。则删除与顶点v相连接的所有边的过程称为消去顶点v的W过程。

注意，如果顶点v可以经W过程消去，则不会有有向路径通过顶点v。换句话说，如果顶点v在一个有向回路中，则我们不可能用W过程将顶点v消去。运用这一过程，我们得到以下定理。

定理6-6-13 当且仅当有向图G不含有向回路时，连续运用W过程可以消去G中所有的顶点。

这个定理的证明可以用定理6-6-11来完成。从下面的例子容易看出，这个定理给出了一种判断有向回路存在性的算法。

例6-6-1 考虑图6-6-10所示的有向图G。因为$d^+(1)=0$，$d^-(2)=0$，故我们可以用W过程将顶点1和2消去。所得的图G_1如图6-6-11(a)所示。

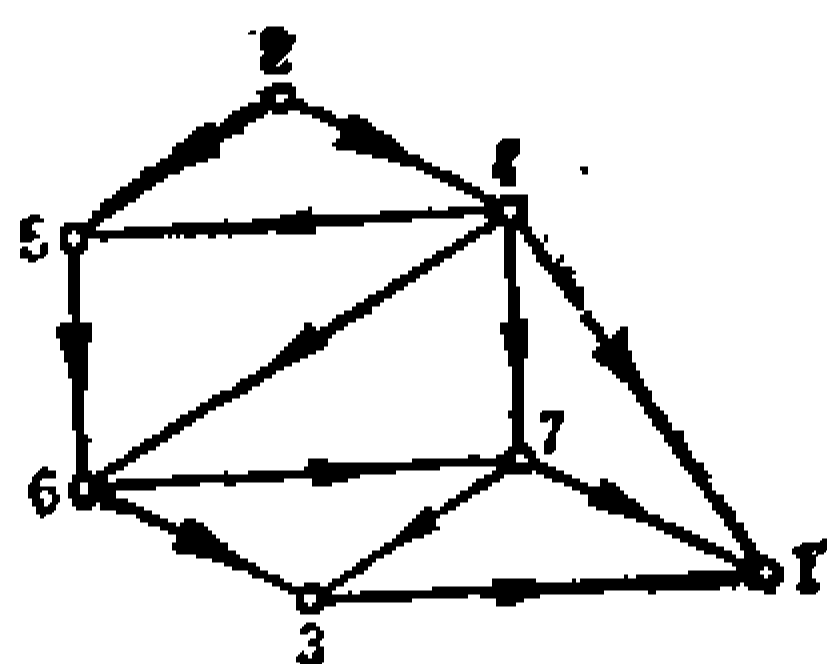


图6-6-10 一个有向图

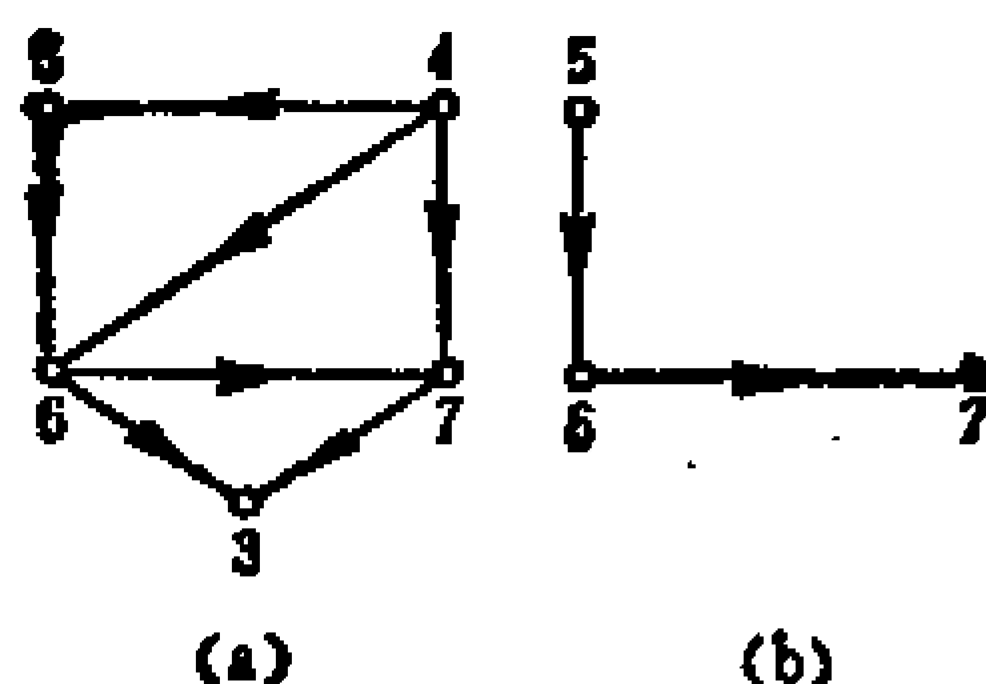


图6-6-11 经W过程所得的图(a)G_1(b)G_2

在G_1中，$d^+(3)=0$，$d^-(4)=0$，于是我们可以用W过程将顶点3和4消去，所得的图G_2如图6-6-11(b)所示。在G_2中，$d^-(5)=0$，$d^+(7)=0$，于是由W过程消去顶点5和7，我们就移去了所有的边。现在已经没有边留下，因此有向图G不包含有向回路。

考虑图6-6-12所示的有向图G_0。可以看出，$d^-(1)=0$，

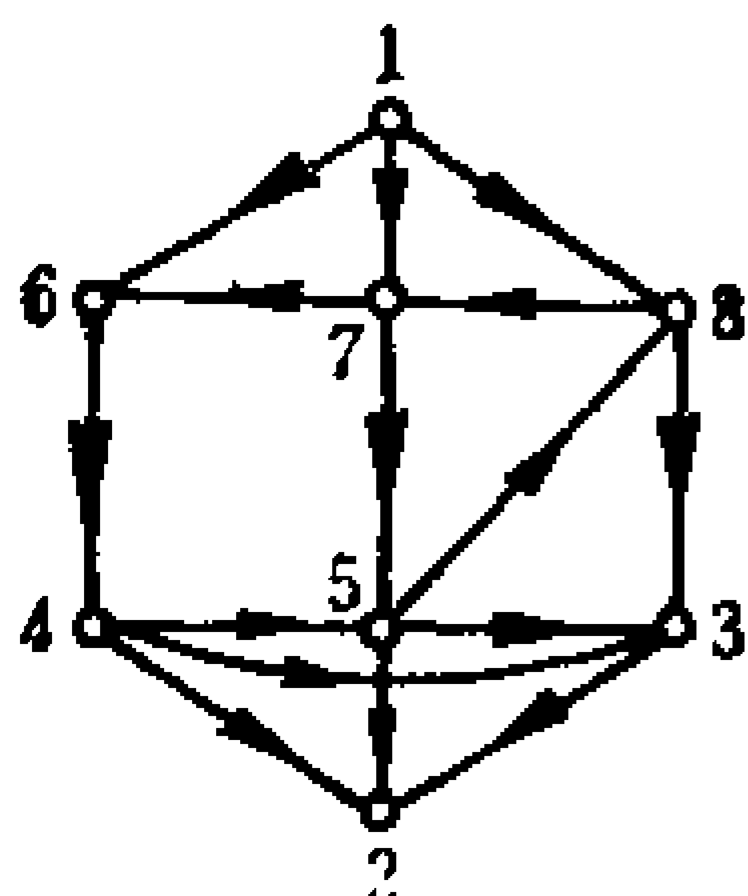
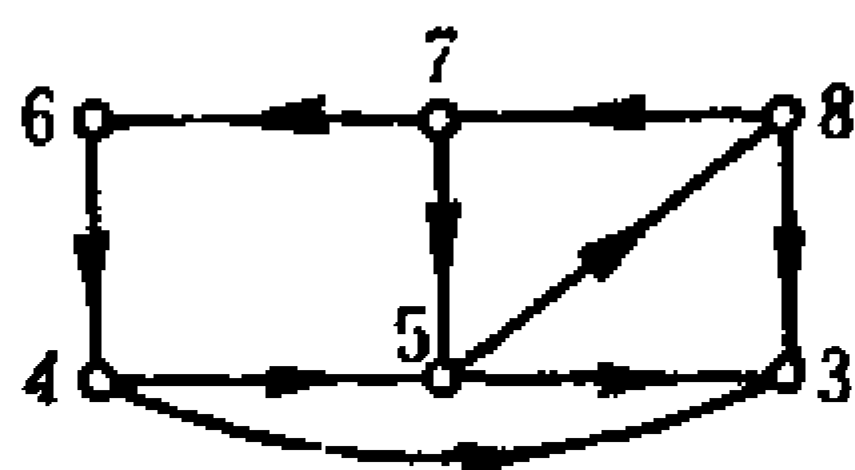
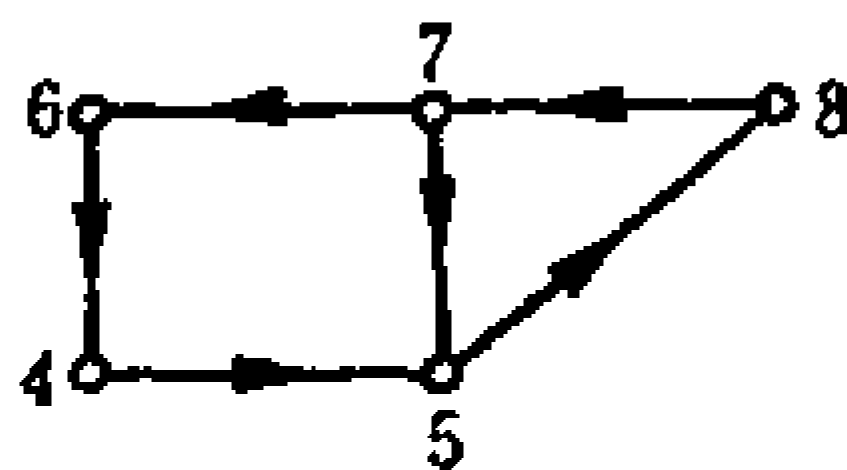


图6-6-12　有向图G_0

$d^+(2)=0$，因此由W过程消去顶点1和2，我们得到图G'_0，如图6-6-13(a)所示。在G'_0中，$d^+(3)=0$，因此由W过程消去顶点3得到图G_0''，如图6-6-13(b)所示。因为G_0''中再也没有入度或出度为零的顶点了，所以我们不可能再用W过程消去G_0''中的顶点，并且G_0''中还有边。这就告诉我们，G_0至少包含一个有向回路。





(a)G_0'　　　　(b)G_0''

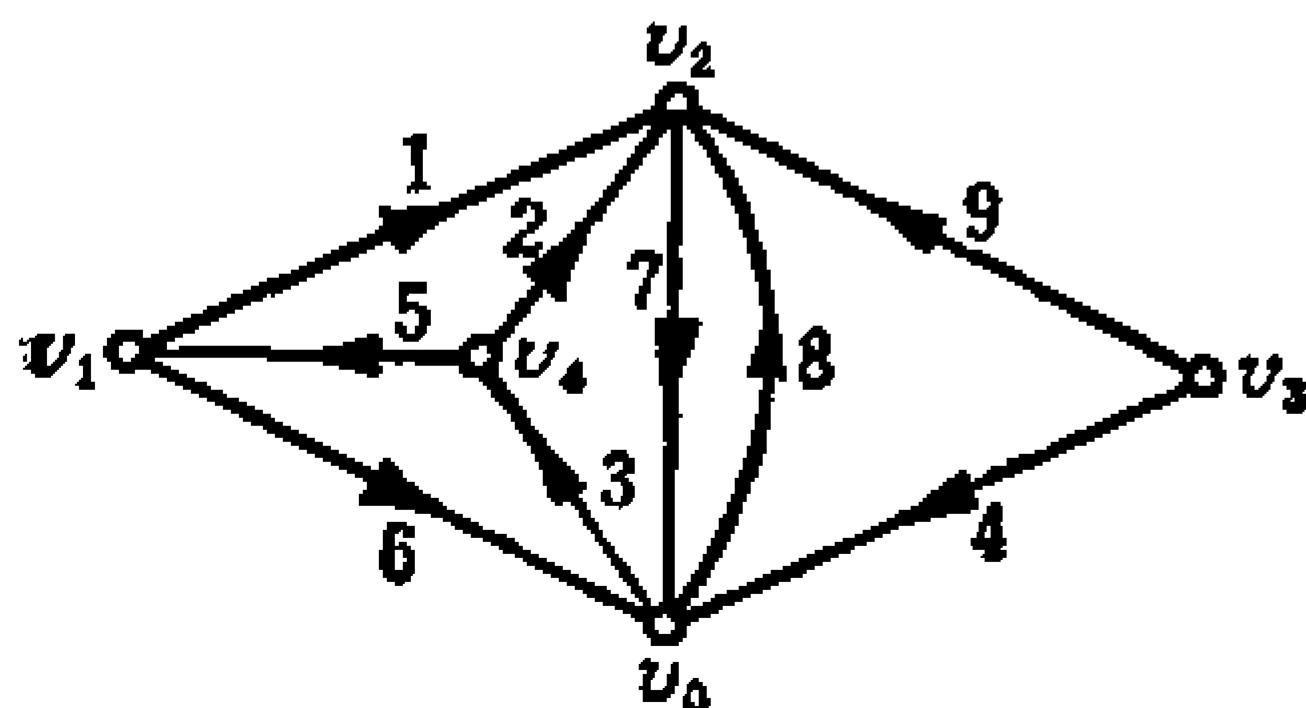
图6-6-13　经W过程所得的图

(a)G_0'　　　　(b)G_0''

习　题

1.证明定理6-1-1。

2.在图P-6-2所示的有向图中，以v_0为参考点，写出它的一个关联矩阵A。



图P-6-2

3.写出图P-6-2所示的有向图关于树$t=(1,2,3,4)$的基本割集矩阵。

4.写出图P-6-2所示的有向图关于树$t=(1,2,3,4)$的基本回路矩阵。

5.对于一个有向图，是否有可能选取一组线性无关的回路，使

得回路矩阵（它的行与这些线性无关回路对应）有不为±1的非零大行列式？用以下两个线图试作一下：图 P-6-5(a) 所示线图；图 P-6-5(b)所示线图。

图P-6-5

6.设S_e是关于树t的一个基本割集，而边e在t中。证明对于S_e中每条边b（$\neq e$），

$$t \oplus (e, b)$$

是一个树。

7.设C_b是关于树t的一个基本回路，边b不在t中。证明对C_b中每条边e（$\neq b$），

$$t \oplus (b, e)$$

是一个树

8.证明定理6-5-3。

9.证明定理6-6-1。

10.证明定理6-6-3。

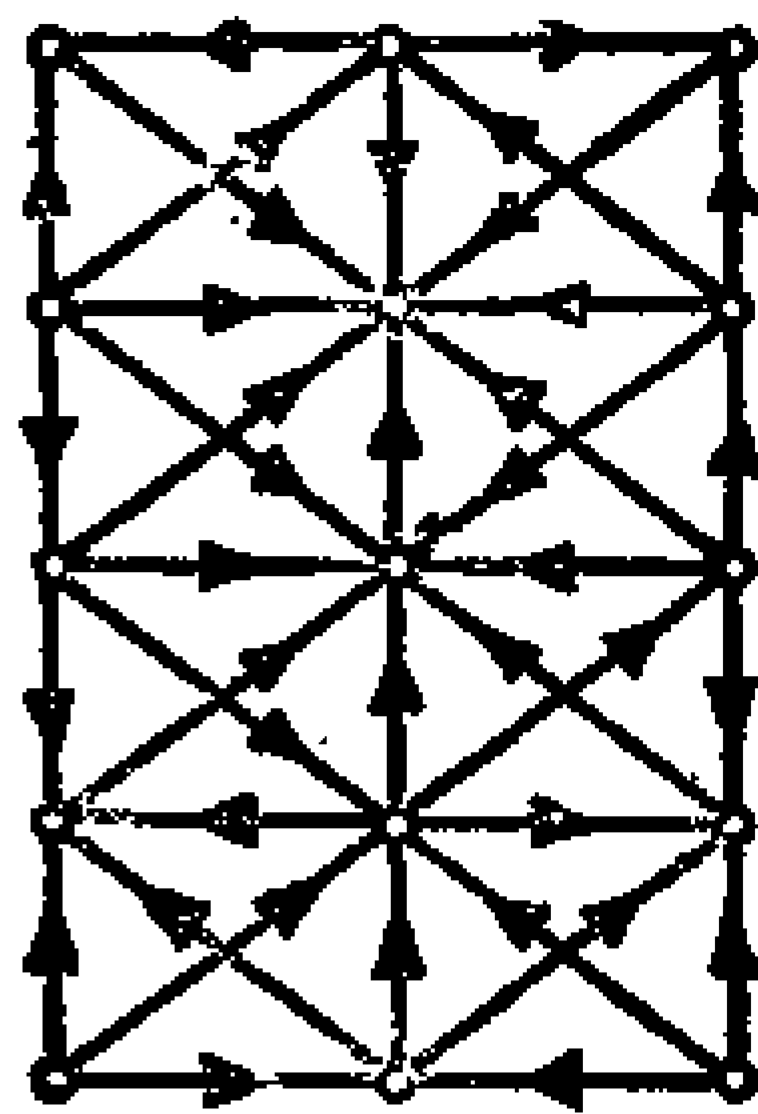
11.证明定理6-6-3。

12.证明定理6-6-11。

13.证明定理6-6-12。

14.证明定理6-6-13。

15.判断图 P-6-15所示的有向图是否包含有向回路。



图P-6-15

第七章　无源网络的拓扑分析

7-1　克希霍夫定律(Kirchhoff's Laws)

克希霍夫定律在描述物理和非物理系统的特征中具有非常重要的意义，特别是当这些系统用线图表示时。换句话说，对系统的分类可以按照它是否满足以下定律来进行.(1)克希霍夫电流定律;(2)克希霍夫电压定律;(3)两条定律;(4)或者两条定律都不满足。例如，稍加限制，一个传输网就满足克希霍夫电流定律。一个电网络满足克希霍夫的两条定律。因此，在研究电网络之前，我们要研究当一个系统由线图表示时，克希霍夫定律的性质。

考虑图7-1-1中的有向线图，其中每条边上所标的符号i_k表示流过这条边的支路电流或边流。支路电流的方向与边的定向一致。象支路电流那样与一条边相伴的权，称为边权。

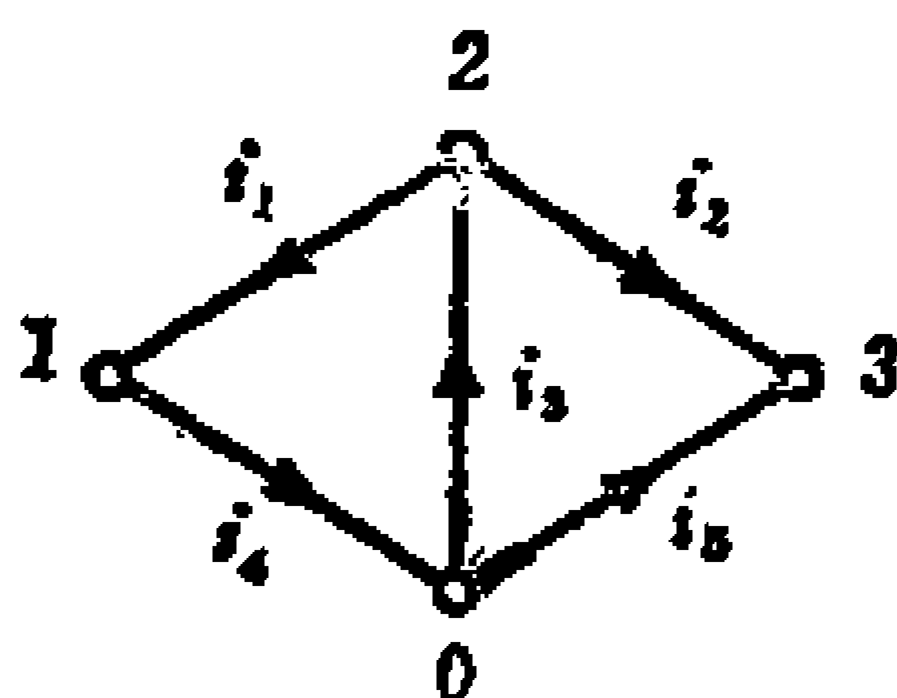


图7-1-1　加权有向线图

定义7-1-1　当线图的每一条边赋予一个边权（或若干边权）时，我们称此线图为加权线图。

考虑一个加权有向线图G，其中每条边有一个支路电流作为它的边权。设A是G的关联矩阵，其第p列表示边e_p, $p=1,2,\cdots,n_e$。又设i_p是边e_p的支路电流。因为关联矩阵A的每一行代表与一个顶点关联的所有边以及它们的方向，所

以，关联矩阵A与一个列矩阵

$$I_e=\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_{n_e} \end{bmatrix} \tag{7-1-1}$$

的乘积AI_e给出了一组方程，其中每一个方程表示与一个顶点关联的支路电流的代数和。令这些方程都为零，我们就得到克希霍夫电流定律：

$$AI_e=0 \tag{7-1-2}$$

例如，由图7-1-1中的加权线图，我们有

$$\begin{matrix} & i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\!\!\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix}=\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\begin{bmatrix} -i_1+i_4 \\ i_1+i_2-i_3 \\ -i_2-i_5 \end{bmatrix}=0$$

如果在一个有向线图中，我们不用支路电流来作每边的权，而以支路电压v_k来作为每边的权，则可得到克希霍夫电压定律：

$$BV_e=0 \tag{7-1-3}$$

其中B是有向图的回路矩阵，而

$$V_e=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n_e} \end{bmatrix} \tag{7-1-4}$$

并假设每个支路电压v_k的正极位于对应的边的箭头的尾端。从式(7-1-2)和(7-1-3)，我们可以看出，$n_v-\rho$个克希霍夫电流方程是线性无关的，$n_e-n_v+\rho$个克希霍夫电压方程也是线性无关的，

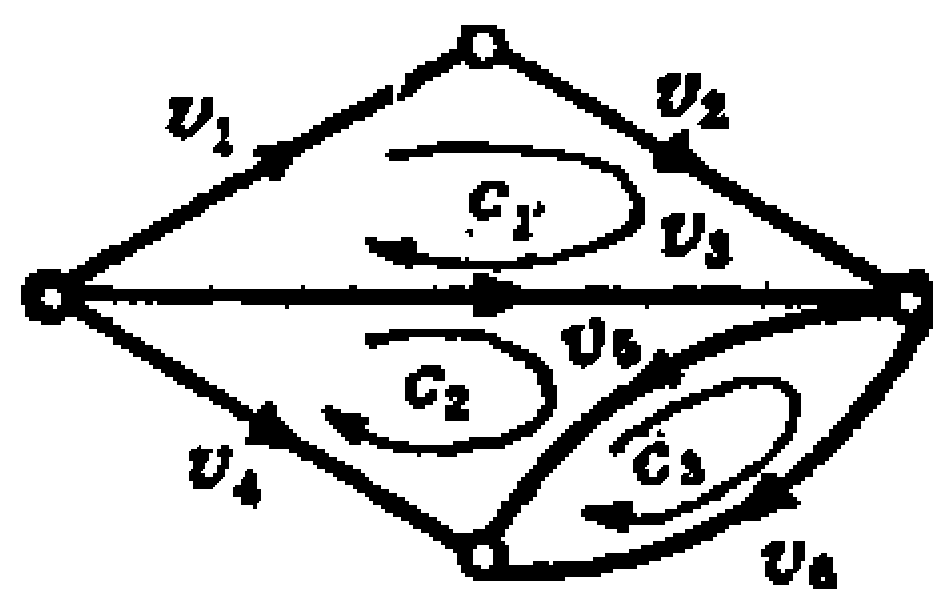


图7-1-2　加权线图

其中n_e是加权有向线图的边数，n_v是顶点数，ρ是最大连通子图的个数。

例7-1-1　考虑图7-1-2中的加权线图，采用回路C_1,C_2和C_3，我们有回路矩阵

$$B=\begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{matrix}\overset{\begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}$$

于是，由式(7-1-3)，我们有

$$BV_e=\overset{\begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_1+v_2-v_3 \\ v_3-v_4+v_5 \\ -v_4+v_6 \end{bmatrix}=0$$

值得注意，在式(7-1-2)中，我们用一个割集矩阵来代替关联矩阵，得到

$$QI_e=0 \qquad (7\text{-}1\text{-}5)$$

这是因为，用一个非奇异矩阵去左乘式(7-1-2)，就可以得到这个等式。

7-2　网　孔　变　换

当一个系统满足克希霍夫电流定律时，其支路电流不可能全

都是独立的，网孔变换是把所有的支路电流表示为选定的独立支路电流的函数的一种方法。

假定我们把式(7-1-1)中的列矩阵分块为：

$$I_e=\begin{bmatrix} I_c \\ I_t \end{bmatrix} \tag{7-2-1}$$

使得I_c是对应于与林（或树）t有关诸弦的所有支路电流的列矩阵，I_t为对应林（或树）t的树枝的支路电流的列矩阵。这样，I_c中的元素数为$n_e-n_v+\rho$，I_t中的元素数为$n_v-\rho$，其中n_e是加权有向线图的边数，n_v是顶点数，ρ是最大连通子图的数目。我们也可以把关联矩阵A分块为

$$A=[A_{11}\ \ A_{12}] \tag{7-2-2}$$

其中A_{11}包含与林（或树）t有关的弦相对应的$n_e-n_v+\rho$个列，A_{12}包含与林（或树）t的树枝对应的$n_v-\rho$个列。这样，根据式(7-1-2)，

$$AI_e=[A_{11}\ \ A_{12}]\begin{bmatrix} I_c \\ I_t \end{bmatrix}=0 \tag{7-2-3}$$

或

$$I_t=-A_{12}^{-1}A_{11}I_c \tag{7-2-4}$$

因此

$$I_e=\begin{bmatrix} U \\ -A_{12}^{-1}A_{11} \end{bmatrix}I_c \tag{7-2-5}$$

因为从式(6-1-13)，取$B_{11}=U$，我们知道

$$B_f=[U\ \ -(A_{12}^{-1}A_{11})']\tag{7-2-6}$$

所以我们有

$$I_e=B_f'I_c \tag{7-2-7}$$

另外，任何一个回路矩阵B可以表示为

$$B = DB_f \tag{7-2-8}$$

其中D是一个$n_e - n_v + \rho$阶的非奇异矩阵，即

$$B = [B_{11} \;\; B_{12}] = D[U \;\; B_{f_{12}}] \tag{7-2-9}$$

因此

$$B_{11} = D$$

是非奇异的. 于是

$$B_f = D^{-1}B = B_{11}^{-1}B \tag{7-2-11}$$

从式（7-2-7），给出

$$I_e = B'(B_{11}^{-1})'I_c \tag{7-2-12}$$

或

$$I_e = B'M(I) \tag{7-2-13}$$

这里

$$M(I) = (B_{11}^{-1})'I_c \tag{7-2-14}$$

将式(7-2-13)中的I_e代入式(7-1-2)，我们有

$$AI_e = AB'M(I) = 0 \tag{7-2-15}$$

由于AB'总是零，即使$M(I)$是任意一组$n_e - n_v + \rho$个函数的列矩阵，克希霍夫电流定律都能满足。但是，一旦$M(I)$被选定，I_e就由式（7-2-13）确定，这就叫做网孔变换。因为将式(7-2-13)的两端转置，我们得到

$$I_e' = [m_1 \;\; m_2 \cdots m_{n_e-n_v+\rho}]B \tag{7-2-16}$$

这里

$$M(I)' = [m_1 \;\; m_2 \cdots m_{n_e-n_v+\rho}] \tag{7-2-17}$$

从此式我们可以看出，对$p = 1, 2, \cdots, n_e - n_v + \rho$，元素$m_p$乘以$B$的第$p$行的每一个元素。这样，$m_p$可以看作是赋予回路的一种权，与回路矩阵$B$的第$p$行相对应。于是，可以把$M(I)$看成所谓回路电流的列矩阵。例如，在图7-2-1的加权线图中，I_e可以由$M(I)$得到，这里选回路C_1, C_2和C_3如图7-2-1所示，我们有

$$M(I)=\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

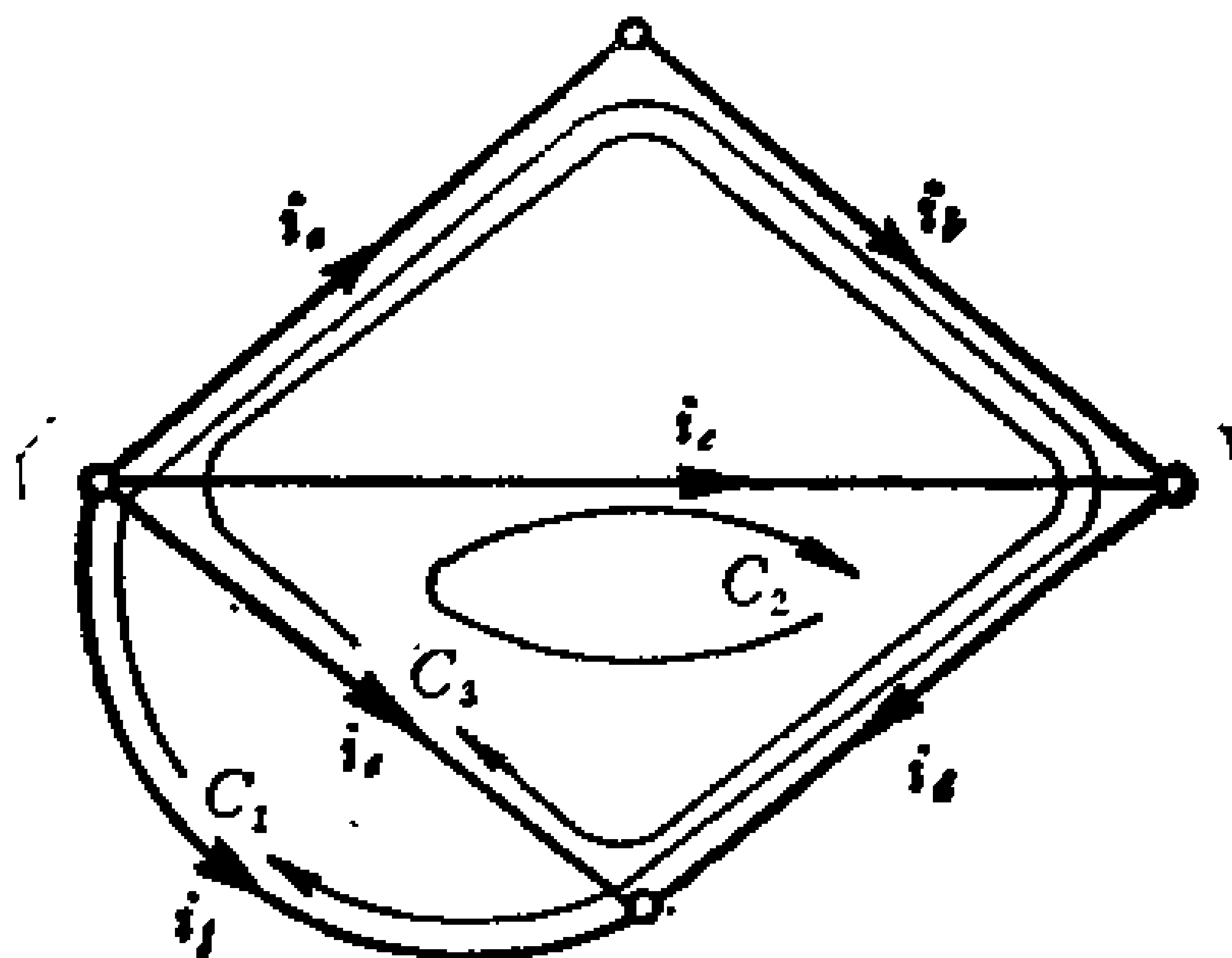


图7-2-1　一个加权线图

$$B=\begin{matrix} & a & b & c & d & e & f \\ C_1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ C_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ C_3 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{matrix}$$

然后，利用式(7-2-13)我们有

$$I_e=B'M(I)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}=\begin{matrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_d \\ i_e \\ i_f \end{matrix}\begin{bmatrix} i_1+i_3 \\ i_1+i_3 \\ i_2 \\ i_1+i_2+i_3 \\ -i_2-i_3 \\ -i_1 \end{bmatrix}$$

值得注意的是，如果我们选 $n_e-n_v+\rho$ 个回路电流，它们 都与回

路矩阵的各行所示的线性无关回路相对应，并且用式(7-2-13)来表示支路电流的话，系统就自动满足了克希霍夫电流定律。

7-3 节 点 变 换

当一个系统满足克希霍夫电压定律时，支路电压是互相有关的。为了看出这一点，我们设B_f是加权有向线图中对应于一个林（或树）t的基本回路矩阵。又设列矩阵V_e被分块为：

$$V_e=\begin{bmatrix} V_c \\ V_t \end{bmatrix} \tag{7-3-1}$$

其中V_c由支路电压组成，这些支路电压是与林（或树）t的有关各弦的权，而V_t则由对应于林（或树）t的树枝的支路电压组成。于是，V_c由$n_e-n_v+\rho$个元素组成，而V_t由$n_v-\rho$个元素组成。这样，由克希霍夫电压定律(7-1-3)，我们有

$$B_fV_e=[U B_{f_{12}}]\begin{bmatrix} V_c \\ V_t \end{bmatrix}=0 \tag{7-3-2}$$

及

$$V_c=-B_{f_{12}}V_t \tag{7-3-3}$$

所以

$$V_e=\begin{bmatrix} -B_{f_{12}} \\ U \end{bmatrix}V_t \tag{7-3-4}$$

因为从式(6-1-12)，取$B_{11}=U$，我们知道

$$B_{f_{12}}=-(A_{12}^{-1}A_{11})^t \tag{7-3-5}$$

所以我们有

$$V_e=\begin{bmatrix} (A_{12}^{-1}A_{11})^t \\ U \end{bmatrix}V_t \tag{7-3-6}$$

它等于

$$V_e=\begin{bmatrix} A_{11}^t(A_{12}^{-1})^t \\ A_{12}^t(A_{12}^{-1})^t \end{bmatrix} V_t=\begin{bmatrix} A_{11}^t \\ A_{12}^t \end{bmatrix}(A_{12}^{-1})^t V_t$$

$$=A^t(A_{12}^{-1})^t V_t \qquad (7\text{-}3\text{-}7)$$

或

$$V_e=A^t N(V) \qquad (7\text{-}3\text{-}8)$$

其中

$$N(V)=(A_{12}^{-1})^t V_t \qquad (7\text{-}3\text{-}9)$$

等式(7-3-8)称为节点变换。由

$$BV_e=BA^t N(V)=0 \qquad (7\text{-}3\text{-}10)$$

可以看出，(因为对于一个线图，$BA^t=0$)，即使$N(V)$是任意一组$n_v-\rho$个函数的列矩阵，克希霍夫电压定律也总能满足。不过，我们必须注意，一旦$N(V)$被选定，V_e将由式(7-3-8)确定。

将式(7-3-8)两边转置，我们有

$$V_e^t=[n_1 \ n_2 \cdots n_{n_v-\rho}]A \qquad (7\text{-}3\text{-}11)$$

其中

$$N(V)^t=[n_1 \ n_2 \cdots n_{n_v-\rho}] \qquad (7\text{-}3\text{-}12)$$

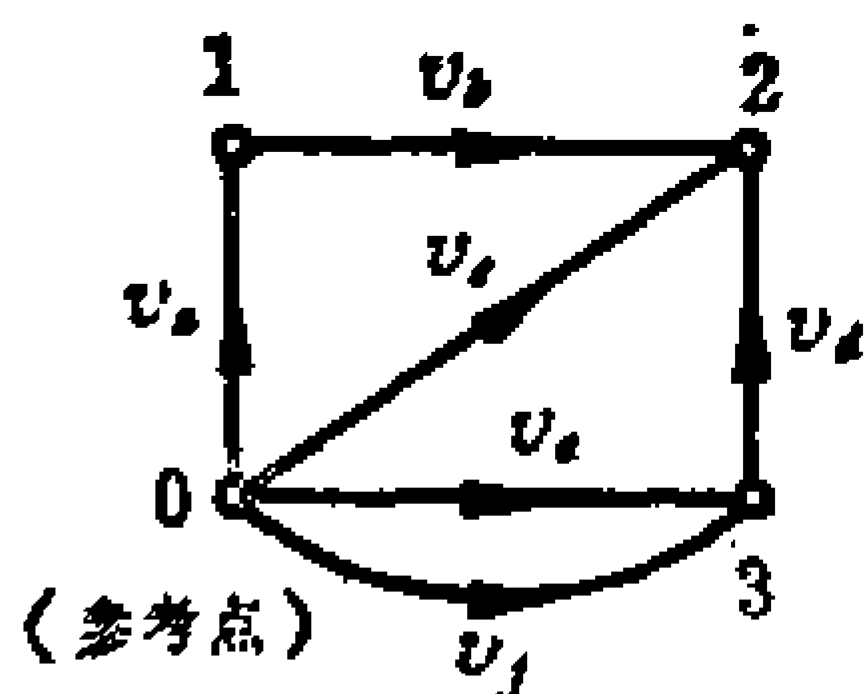


图7-3-1 一个加权线图

等式(7-3-11)表明，n_p将被A的第p行中的每一个元素乘，因此可以把n_p看作是与A的第p行相对应的那个顶点的权。因为参考点不由A的行表示，所以n_p表示由对应A的第p行的顶点到参考点的电压，称为节点电压。例如，在图7-3-1的加权有向图中，V_e可以由$N(V)$得到，这里

$$N(V)=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

选定A为

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

我们有

$$V_e = A'N(V) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} v_a \\ v_b \\ v_c \\ v_d \\ v_e \\ v_f \end{array}\begin{bmatrix} -v_1 \\ v_1 - v_2 \\ -v_2 \\ -v_2 + v_3 \\ -v_3 \\ -v_3 \end{bmatrix}$$

如果我们用一个割集矩阵Q来代替关联矩阵A，式(7-3-6)变成

$$V_e = \begin{bmatrix} Q_{11}'(Q_{12}')^{-1} \\ U \end{bmatrix} V_t = \begin{bmatrix} Q_{11}' \\ Q_{12}' \end{bmatrix} (Q_{12}^{-1})'V_t = Q'\underline{N}(V) \qquad (7\text{-}3\text{-}13)$$

其中

$$\underline{N}(V) = (Q_{12}^{-1})'V_t \qquad (7\text{-}3\text{-}14)$$

这叫做广义节点变换．其中当Q是对应于林（或树）t的基本割集矩阵时，$\underline{N}(V)$的元素表示t中各树枝的支路电压．例如，在图7-3-1的线图中，如果我们选取一个树为(a，c，d)，则对应于(a，c，d)的基本割集矩阵Q_f是

$$Q_f = \begin{array}{c} \begin{matrix} b & e & f & a & c & d \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

则$\underline{N}(V)$是

$$\underline{N}(V)=\begin{bmatrix} v_a \\ v_c \\ v_d \end{bmatrix}$$

据式(7-3-13)，我们有

$$\begin{bmatrix} v_b \\ v_e \\ v_f \\ v_a \\ v_c \\ v_d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_a \\ v_c \\ v_d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -v_a+v_c \\ v_c-v_d \\ v_c-v_d \\ v_a \\ v_c \\ v_d \end{bmatrix}$$

注意，当我们选取$n_v-\rho$个线性无关的电压时，它们对应于割集矩阵Q（或关联矩阵）的各行，并且根据式（7-3-13）或式(7-3-8)，将每一个支路电压表示成这些选定电压的函数时，则系统就自动满足克希霍夫电压定律。

7-4　导纳矩阵的行列式

假定我们用克希霍夫电流定律来写出一个如下的电网络系统方程

$$AI_e=0 \tag{7-4-1}$$

（称为节点方程）其中

$$I_e=f(J_1\cdots J_p,v_1\cdots v_{n_e}) \tag{7-4-2}$$

$J_1,\cdots,J_p$是电流源，而$v_1,\cdots,v_{n_e}$是包括电压源在内的各支路电压。注意据式(7-4-2)，每一个支路电流是J和V的函数。方程(7-4-1)并不代表一个电网络，因为一个电网络必须既满足克希霍夫电流定律，又满足克希霍夫电压定律。但是式(7-4-1)迫使

系统满足克希霍夫电流定律而不是满足克希霍夫电压定律.例如，考虑图7-4-1(a)的电网络，与它对应的线图如图7-4-1（b）所示。其中g_c表示一个非线性电阻器，其特性为$i_c = g_c v_c^3$。关联矩阵A是

$$A = \begin{matrix} & J_o & g_a & g_b & g_c \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

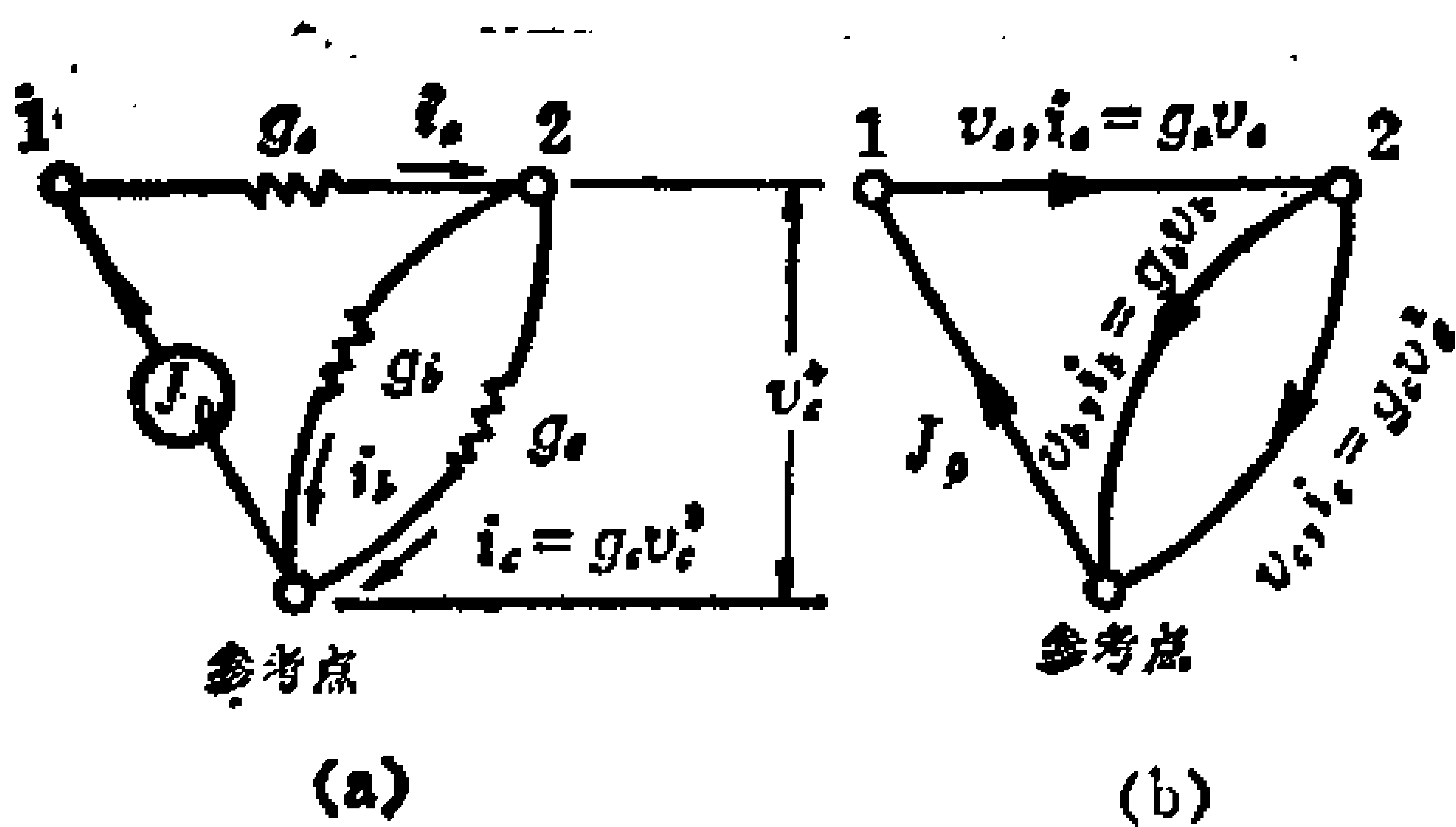


图7-4-1

(a)电网络　　　　(b)对应的线图

电流向量I_e为

$$I_e = \begin{bmatrix} J_o \\ i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_o \\ g_a v_a \\ g_b v_b \\ g_c v_c^3 \end{bmatrix}$$

其中v_a, v_b, v_c分别是g_a, g_b, g_c的支路电压。故

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_o \\ i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_o + i_a \\ -i_a + i_b + i_c \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -J_o+g_a v_a \\ -g_a v_a+g_b v_b+g_c v_c^3 \end{bmatrix}=0$$

此式表明，这个系统满足克希霍夫电流定律而不是满足克希霍夫电压定律。

为了使系统满足克希霍夫电压定律，我们还要利用上节给出的节点变换。对上面的例子，我们取$\underline{A}$为

$$\underline{A}=\begin{array}{c} \quad g_a \; g_b \; g_c \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

这是一个没有电流源J_o的网络的关联矩阵。节点变换是

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix}=\underline{A}^t\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_1-v_2 \\ v_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

将此式代入$AI_e=0$，我们有

$$AI_e=\begin{bmatrix} -J_o+g_a(v_1-v_2) \\ -g_a(v_1-v_2)+g_b v_2+g_c v_2^3 \end{bmatrix}=0$$

这就是图7-4-1中网络的系统方程。

这种方法也适用于广义的克希霍夫电流定律，即

$$QI_e=0 \tag{7-4-3}$$

这里Q是割集矩阵。类似地，我们可以用克希霍夫电压定律来导出系统方程

$$BV_e=0 \tag{7-4-4}$$

其中

$$V_e = f(E_1 \cdots E_p, i_1 \cdots i_{n_e}) \tag{7-4-5}$$

$E_1, \cdots, E_p$是电压源，而$i_1, \cdots, i_{n_e}$是包括电流源在内的各支路电流。同样的，这个方程不足以表示一个电网络，除非我们按照克希霍夫电流定律来代换$i_1, \cdots, i_{n_e}$。一个简单的方法是采用前节所介绍的网孔变换。

当一个电网络中每一个元件y_k可以表示为

$$y_k v_k = i_k \tag{7-4-6}$$

时，其中i_k和v_k分别为元件y_k的支路电流和支路电压，则分析就变得较为简单了。在这节中，我们要推导一种所谓的电网络的拓扑分析，其中每一个元件都满足式(7-4-6)。

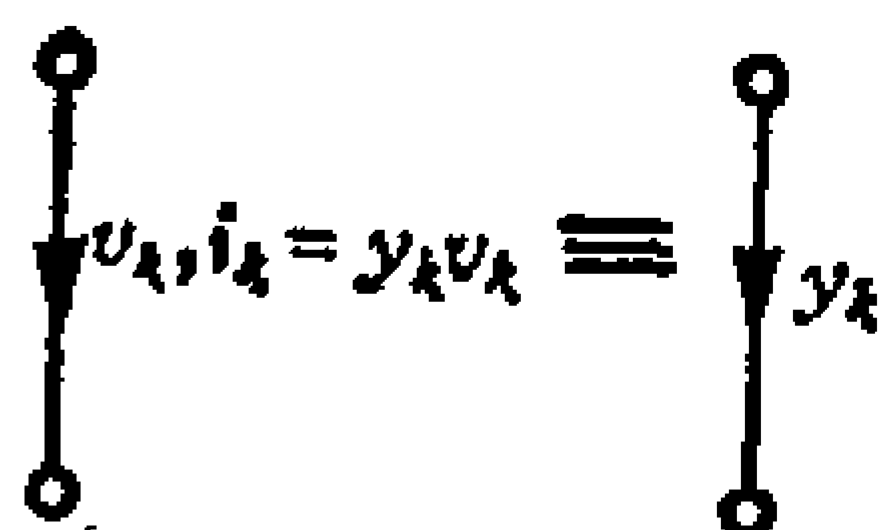


图7-4-2　一条边的权

为了简便，当如图 7-4-2 所示的一条边的权i_k和v_k满足式(7-4-6)时，我们就以y_k来作为边k的权，也就是说，对边k规定权y_k相当于规定了满足于式(7-4-6)的两个权i_k和v_k，如图7-4-2所示。式(7-4-6)给出的关系用于表示一个线性的、集中的、时不变的、初始条件为零的元件是有效的，这个元件可以是电阻、电感、电容或二端电网络，只要其初始条件为零即可。

考虑一个电网络，与其对应的加权线图的每一条边的权为y_k(导纳)。于是对每一条边有一个如下的方程：

$$\begin{aligned} y_1 v_1 &= i_1 \\ y_2 v_2 &= i_2 \\ &\vdots \\ y_{n_e} v_{n_e} &= i_{n_e} \end{aligned} \tag{7-4-7}$$

这可以表示成

$$\begin{bmatrix} y_1 & & & 0 \\ & y_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & y_{n_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_{n_e} \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}4\text{-}8)$$

为了简便，我们用符号Y_e,V_e和I_e来表示式(7-4-8)中的矩阵，因此方程可写作

$$Y_eV_e = I_e \qquad (7\text{-}4\text{-}9)$$

注意Y_e是一个对角矩阵。又设A是所给线图的关联矩阵，则由式(7-1-2)(为了满足克希霍夫电流定律)，我们有

$$AI_e = AY_eV_e = 0 \qquad (7\text{-}4\text{-}10)$$

为了简单起见，假定用符号V_n来代替$N(V)$，表示式(7-3-8)中的节点电压的列矩阵。于是，我们利用式(7-3-8)给出的节点变换，将式(7-4-10)变成

$$AY_eV_e = AY_eA'V_n = 0 \qquad (7\text{-}4\text{-}11)$$

矩阵AY_eA'称为电网络的节点导纳矩阵。为了说明节点导纳矩阵的行列式和所给线图的子图的关系，先了解以下所述的比内-柯西定理是比较方便的。

假定有矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & & \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则由行列式的性质我们知道它的行列式等于：

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{22}\cdots a_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ b_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \\ b_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (7\text{-}4\text{-}12)$$

一般来说，如果我们有

$$R=[(r_{11}+r_{21}),(r_{12}+r_{22}),\cdots,(r_{1n}+r_{2n})] \qquad (7-4-13)$$

其中

$$r_{1k}=\begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}, \quad r_{2k}=\begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix} \qquad (7-4-14)$$

则

$$|R|=\sum |r_{j_1 1} r_{j_2 2}\cdots r_{j_n n}| \qquad (7-4-15)$$

其中$\sum$表示对$k=1,2,\cdots,n$，取r_{1k}或r_{2k}作第k列可能形成的所有矩阵的行列式的总和。

现在考虑两个矩阵A和B,其中$A=[a_{ij}]_{n\times m}$,$B=[b_{ij}]_{m\times n}$。则A和B的积为

$$AB=\begin{bmatrix} \sum_{j_1=1}^{m} a_{1j_1}b_{j_1 1} & \sum_{j_2=1}^{m} a_{1j_2}b_{j_2 2}\cdots & \sum_{j_n=1}^{m} a_{1j_n}b_{j_n n} \\ \sum_{j_1=1}^{m} a_{2j_1}b_{j_1 1} & \sum_{j_2=1}^{m} a_{2j_2}b_{j_2 2}\cdots & \sum_{j_n=1}^{m} a_{2j_n}b_{j_n n} \\ \sum_{j_1=1}^{m} a_{nj_1}a_{j_1 1} & \sum_{j_2=1}^{m} a_{nj_2}b_{j_2 2}\cdots & \sum_{j_n=1}^{m} a_{nj_n}b_{j_n n} \end{bmatrix} \qquad (7-4-16)$$

现在从式(7-4-15),我们可以看出：

$$|AB|=\sum_{\substack{j_p=1 \\ \text{对所有 } p}}^{m} \begin{vmatrix} a_{1j_1}b_{j_1 1} & a_{1j_2}b_{j_2 2}\cdots a_{1j_n}b_{j_n n} \\ a_{2j_1}b_{j_1 1} & a_{2j_2}b_{j_2 2}\cdots a_{2j_n}b_{j_n n} \\ & \cdots \\ a_{nj_1}b_{j_1 1} & a_{nj_2}b_{j_2 2}\cdots a_{nj_n}b_{j_n n} \end{vmatrix} \qquad (7-4-17)$$

或

$$|AB| = \sum_{\substack{j_p=1 \\ \text{对所有 } p}}^{m} \begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} \cdots a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} \cdots a_{2j_n} \\ & \cdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} \cdots a_{nj_n} \end{vmatrix} (b_{j_11}\ b_{j_22} \cdots b_{j_nn}) \quad (7\text{-}4\text{-}18)$$

如果有两个 j 取相同的数，则在式(7-4-18)的右端就有两列相等。因此，我们只要对有不同 j 的矩阵的行列式求和即可。故

$$|AB| = \sum_{\substack{j_p=1 \\ j_1 \neq j_2 \neq \cdots \neq j_n}}^{m} \begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} \cdots a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} \cdots a_{2j_n} \\ & \cdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} \cdots a_{nj_n} \end{vmatrix} (b_{j_11} b_{j_22} \cdots b_{j_nn}) \quad (7\text{-}4\text{-}19)$$

注意当 $n > m$ 时，不可能选出所有不同的 j，因此 $|AB|$ 为零。

考虑 j 选自数组 $(1,2,\cdots,n)$，并使得所有的 j 都不相同的情况。一种特殊的选择是

$$j_p = p \quad p = 1,2,\cdots,n \quad (7\text{-}4\text{-}20)$$

在这样的选择下，式(7-4-19)的右端是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (b_{11} b_{22} \cdots b_{nn})$$

如果取 j 的另一种选择为

$$j_p = \begin{cases} p+1 & \text{对 } p = 1,2,\cdots,n-1 \\ 1 & \text{对 } p = n \end{cases} \quad (7\text{-}4\text{-}21)$$

将给出

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & a_{21} \\ & & \cdots & & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & a_{n1} \end{vmatrix} (b_{21} b_{32} \cdots b_{nn-1} b_{1n})$$

我们可以将它改排，使得A的子矩阵的行列式与上一个行列式的排列次序相同。显然，由于列的调整引起符号的改变与j的置换有关。因此，考虑从1到n中j的所有可能的选择，我们可以看出

$$\sum_{j_1\neq j_2\neq\cdots\neq j_n=1}^{n}\begin{vmatrix}a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n}\\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n}\\ & \cdots & & \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n}\end{vmatrix}(b_{j_1 1}b_{j_2 2}\cdots b_{j_n n})$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\sum_{j_1\neq j_2\neq\cdots\neq j_n}^{n} e_{j_1 j_2\cdots j_n}(b_{j_1 1}b_{j_2 2}\cdots b_{j_n n})$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ & \cdots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{vmatrix} \qquad (7\text{-}4\text{-}22)$$

其中若将$j_1\cdots j_n$变成自然顺序所需的置换数为偶数，则$e_{j_1\cdots j_n}$是1；否则$e_{j_1\cdots j_n}$是-1。这对于j的任何不同的选择都是正确的。因此，我们得到比内-柯西定理：

$$|AB|=\Sigma(A\text{的大子行列式})\times(B\text{的对应的大子行列式}) \qquad (7\text{-}4\text{-}23)$$

这里Σ表示“对所有可能的情况求和”。注意A的大子行列式是A的$n\times n$阶子矩阵的行列式。如果A的一个大子行列式是从A中取列$j_1,j_2,\cdots,j_n$得到的子矩阵的行列式，那么B中对应的大子行列式是B中由行$j_1,j_2,\cdots,j_n$组成的子矩阵的行列式。

例如，若给出A和B，使得

$$AB=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\3&0\end{bmatrix}$$

则由式(7-4-23)，AB的行列式是

$$\left|\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\3&0\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\3&0\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}0&1\\2&2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2&1\\3&0\end{vmatrix}=8$$

现在我们可以回过头来讨论节点导纳矩阵了。我们将AY_eA'表示成

$$AY_eA'=HA' \tag{7-4-24}$$

其中

$$AY_e=H \tag{7-4-25}$$

我们可以利用比内-柯西定理：

$|HA'|=\sum$（H的大子行列式）×（A'对应的大子行列式）

因为Y_e是对角矩阵，故 (7-4-26)

$$H=[H_1\ H_2\cdots H_{n_e}]=[A_1\ A_2\cdots A_{n_e}]\begin{bmatrix}y_1&&&\\&y_2&0&\\&&\ddots&\\&0&&y_{n_e}\end{bmatrix}$$

$$=[y_1A_1\ y_2A_2\cdots y_{n_e}A_{n_e}] \tag{7-4-27}$$

所以H的任一大子矩阵H_m的行列式可以表示为

$$|H_m|=|[H_{j1}\ H_{j2}\cdots H_{jm}]|=|[y_{j_1}A_{j_1}\ y_{j_2}A_{j_2}\cdots y_{j_m}A_{j_m}]|$$

$$=(y_{j_1}y_{j_2}\cdots y_{j_m})|[A_{j_1}\ A_{j_2}\cdots A_{j_m}]| \tag{7-4-28}$$

这样，用符号$A(j_1j_2\cdots j_m)$来表示A的由列$j_1,j_2,\cdots,j_m$组成的子矩阵，我们可以把式(7-4-26)表示为

$$|AY_eA^t| = \sum_{(j)} (y_{j_1}y_{j_2}\cdots y_{j_m})|A(j_1j_2\cdots j_m)|\ |A(j_1j_2\cdots j_m)^t| \tag{7-4-29}$$

因为一个方阵的行列式与该矩阵的转置的行列式相同，因此式(7-4-29)等于

$$|AY_eA^t| = \sum_{(j)} (y_{j_1}y_{j_2}\cdots y_{j_m})|A(j_1j_2\cdots j_m)|^2 \tag{7-4-30}$$

前面我们已经看到，一个关联矩阵A的大子矩阵是非奇异的，当且仅当与此子矩阵的列对应的边组成一个树（在分离线图中是林）.并且还知道，这样一个非奇异的子矩阵的行列式不是+1就是-1。因为在式(7-4-30)中，A的大子矩阵的行列式是平方，而对应的导纳（即大子矩阵的列对应边的权）是乘积的形式，所以我们可以说

$$|AY_eA^t| = \sum 树枝导纳的乘积 \tag{7-4-31}$$

其中$\sum$表示“对于所有的树”求和。

定义7-4-1 树枝导纳乘积是在一个树中，所有各边的权即导纳的乘积。

定理7-4-1 一个由似无源元件组成的电网络，其节点导纳矩阵的行列式等于所有树的树枝导纳乘积之和。这里的似无源元件(*passivelike element*)是指能用图7-4-2所示的一条边来表示的元件。

为了简便，我们用符号Δ'来表示节点导纳矩阵的行列式。设N是一个由似无源元件组成的网络，设G是N对应的加权有向图。则由式(7-4-31)可以看出，改变G中边的定向不会影响Δ'。我们可以直接从网络N中找出所有的树，用不着从对应的加权有向图中去找，所以不必要从所给的网络N画出G，再得到Δ'。例

如，图7-4-3中网络的Δ'可按如下方法求得。所有的树是

$$(g_a, C_b s),\left(g_a, \frac{1}{L_c s}\right),(g_a, C_d s),\left(C_b s, \frac{1}{L_c s}\right),(C_b s, C_d s)$$

所以

$$\Delta' = C_b C_d s^2 + g_a(C_b + C_d)s + \frac{C_b}{L_c} + \frac{g_a}{L_c s}$$

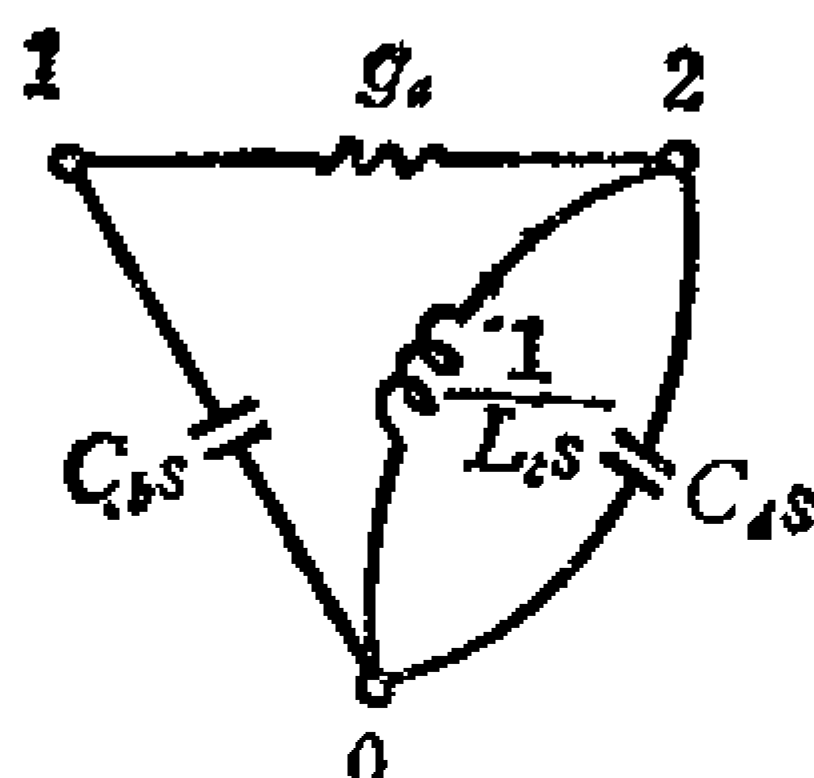


图7-4-3　电网络N

在式(7-4-31)中，如果我们使每个导纳都等于1，则每个树枝导纳的乘积是1。所以

$$\Delta'_{所有的y为1} = 树的数目 \quad (7-4-32)$$

另一方面，由式(7-4-30)，

$$\Delta'_{所有的y为1} = |AUA^t| = |AA^t| \quad (7-4-33)$$

设

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

则

$$AA^t = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} [A_1^t \ A_2^t \cdots A_m^t] = \begin{bmatrix} A_1A_1^t & A_1A_2^t \cdots A_1A_m^t \\ A_2A_1^t & A_2A_2^t \cdots A_2A_m^t \\ & \cdots \\ A_mA_1^t & A_mA_2^t \cdots A_mA_m^t \end{bmatrix} \quad (7-4-34)$$

设 $A_k = [a_{k1} \ a_{k2} \cdots a_{kn_e}]$，则

$$|A_k A_k^t| = \sum_{p=1}^{n_e} a_{kp}^2 \quad (7-4-35)$$

从关联矩阵的定义，仅当边p与顶点k关联时，a_{kp}非零，所以，$|A_kA_k^t|$等于与顶点k相关联的边数。或者，

$$|A_k A_k'| = \text{与顶点}k\text{关联的边数} \qquad (7\text{-}4\text{-}36)$$

另一方面，

$$|A_k A_q'| = \sum_{p=1}^{n_e} a_{kp} a_{qp} \qquad (7\text{-}4\text{-}37)$$

可以看出，当且仅当边p同时与顶点k与q关联时，$a_{kp}a_{qp}$非零，因此，边p必定连接在顶点k和q之间。另外，如边p与顶点k和q连接，a_{kp}的符号与a_{qp}的符号相反（据关联矩阵的定义）。因此

$$a_{kp}a_{qp} = \begin{cases} -1 & \text{若边 } i \text{ 是顶点 } k \text{ 和 } q \text{ 之间的边} \\ 0 & \text{若边 } i \text{ 不是顶点 } k \text{ 和 } q \text{ 之间的边} \end{cases} \qquad (7\text{-}4\text{-}38)$$

所以

$$|A_k A_q'| = -(\text{顶点}k\text{和}q\text{之间的边数}) \qquad (7\text{-}4\text{-}39)$$

等式(7-4-32)和(7-4-39)给出以下定理。

定理7-4-2 设矩阵T是

$$T = [t_{ij}] = AA' \qquad (7\text{-}4\text{-}40)$$

则t_{ii}是与顶点i连接的边数，而t_{ij}是顶点i和j之间连接的边数的负数。并且

$$|T| = \text{树的数目} \qquad (7\text{-}4\text{-}41)$$

例如，图7-4-3的网络中树的数目可由下式得到：

$$|T| = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \left| \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \right| = 5$$

如果我们不用关联矩阵，而用割集矩阵，如象式(7-1-5)和(7-3-13)那样，等式(7-4-31)将会稍有改变。为了说明这一点，我们回想一下克希霍夫电流定律，即

$$AI_e = 0 \qquad (7\text{-}4\text{-}42)$$

左乘一个非奇异矩阵D，我们有

$$DAI_e = Q_1 I_e = 0 \qquad (7\text{-}4\text{-}43)$$

因此我们能用一个割集矩阵Q_1来满足克希霍夫电流定律．于是，式(7-4-43)连同式(7-4-9)，得到

$$Q_1 Y_e V_e = 0 \tag{7-4-44}$$

由式(7-3-13)给出的节点变换和此式得

$$Q_1 Y_e Q' N'(V) = 0 \tag{7-4-45}$$

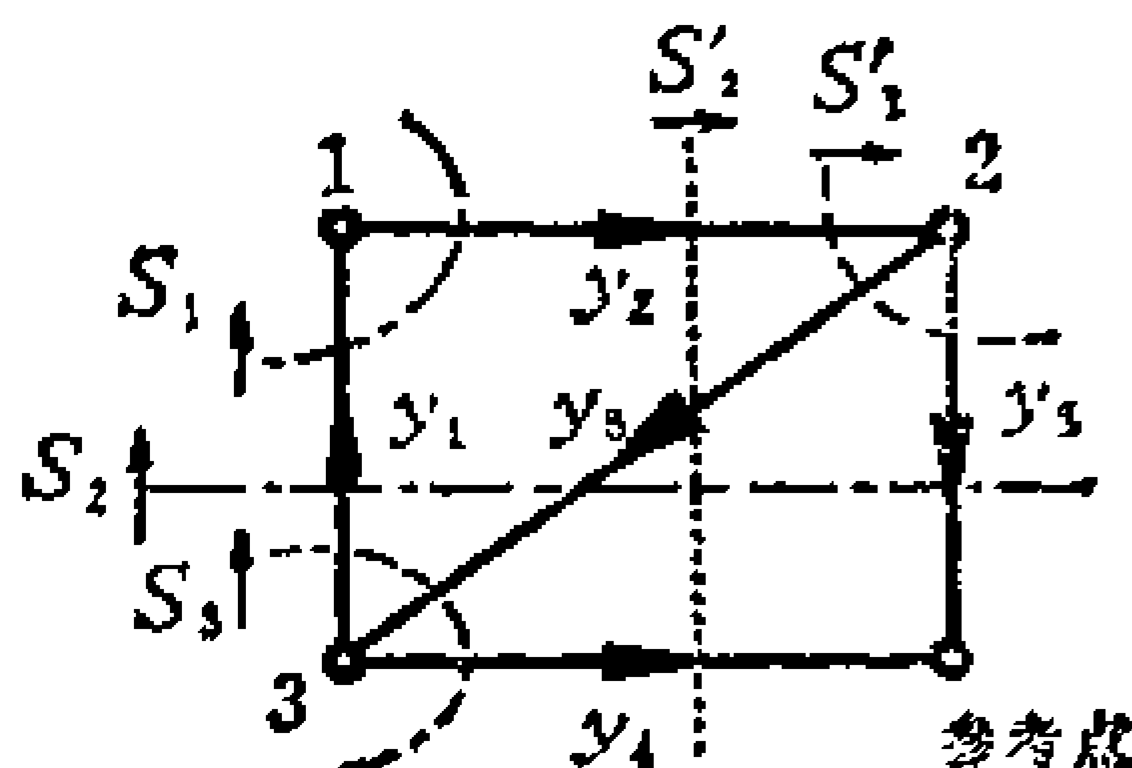


图7-4-4　一个加权有向线图

例如，考虑图7-4-4中的加权有向线图，我们可以选关联矩阵A为

$$A = \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ \end{matrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

故节点导纳矩阵是

$$AY_eA' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & & & & \\ & y_2 & & 0 & \\ & & y_3 & & \\ & 0 & & y_4 & \\ & & & & y_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y_1 + y_2 & -y_2 & -y_1 \\ -y_2 & y_2 + y_3 + y_5 & -y_5 \\ -y_1 & -y_5 & y_1 + y_4 + y_5 \end{bmatrix}$$

在式(7-4-45)中，选取Q_1和Q为

$$Q_1=\begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ S_1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ S_2 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ S_3 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{matrix} \qquad Q=\begin{bmatrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_6 \\ S'_1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ S'_2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ S'_3 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

我们得到一个导纳矩阵Q_1Y_eQ'：

$$Q_1Y_eQ'=\begin{bmatrix} -y_2 & -y_2 & y_1 \\ y_3+y_5 & y_5 & y_1+y_5 \\ y_5 & y_4+y_5 & y_1+y_4+y_6 \end{bmatrix}$$

这不是一个节点导纳矩阵，但代表这个给定网络的线性无关方程组的系数矩阵。

设
$$Q_1=DA \tag{7-4-46}$$
$$Q=D'A \tag{7-4-47}$$

则从式(7-4-29)，(7-4-30)和(7-4-31)我们可以看出，

$$|Q_1Y_eQ'|=|D||D'|\sum 树枝导纳乘积 \tag{7-4-48}$$

并且，如果Q_1和Q是基本割集矩阵，则$|D|$和$|D'|$都为1，所以Q_1Y_eQ'的行列式与AY_eA'的行列式相同。

7-5 开路网络函数

为了分析电网络，我们考虑图 7-5-1 所示的网络，其中有一电流源 J_k 从参考点(当$p>1$时，可以有若干个参考点)接到每一个顶点k，$k=1,2,\cdots,m$。假定在网络N中，除这些电流源外，所有的元件都是似无源元件（似无源元件是能用图7-4-2所示的一条边表示的元件）.那么我们有

$$AI_e=J_n \tag{7-5-1}$$

其中

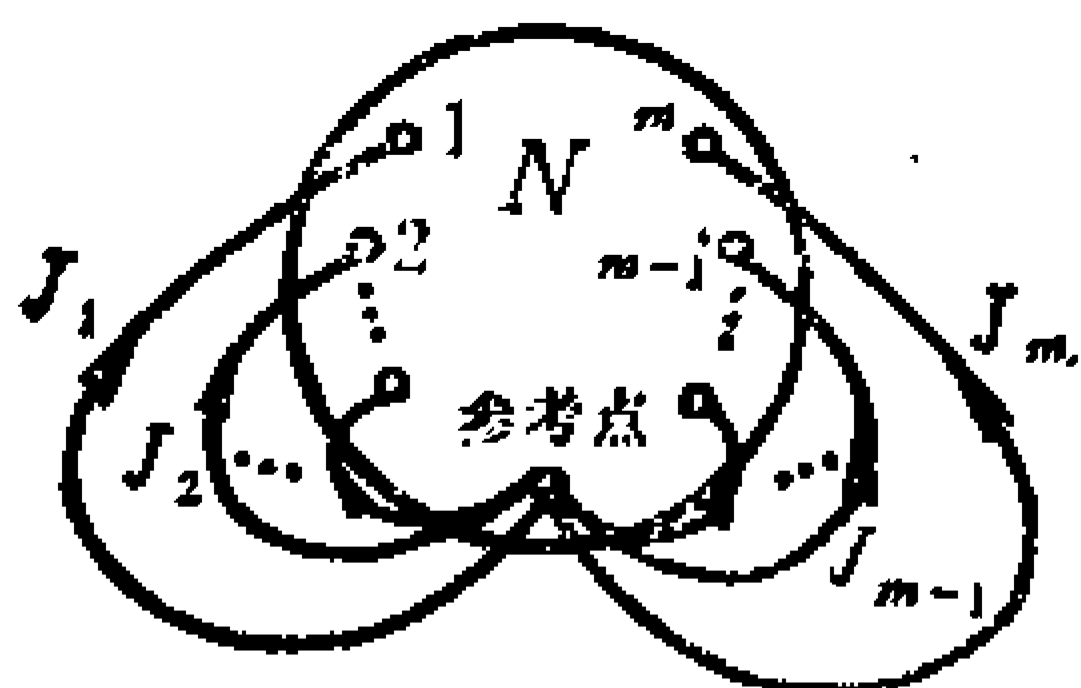


图7-5-1　带电流源的网络N

$$J_n = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_m \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}5\text{-}2)$$

而A是带有上述参考点的N的关联矩阵，注意$m=n_v-\rho$，这里n_v是该网络的顶点数，ρ是最大连通子图的个数。

由于电流源$J_1, J_2, \cdots, J_m$的存在，我们修改式(7-4-11)使之满足克希霍夫电流定律：

$$AY_eA^tV_n = J_n \qquad (7\text{-}5\text{-}3)$$

用$(AY_eA^t)^{-1}$左乘式(7-5-3)两端，得

$$V_n = (AY_eA^t)^{-1}J_n \qquad (7\text{-}5\text{-}4)$$

因为在此方程中，$(AY_eA^t)^{-1}$的每一个元素表示一个开路网络函数，并且我们已经学过直接从一个网络求出AY_eA^t的行列式的拓扑公式，所以，如果我们知道怎样直接从一个网络求出矩阵AY_eA^t的代数余子式，我们就可以用拓扑的方法得到任意两顶点之间的开路网络函数。

为了简便，我们用Δ'_{pq}来表示AY_eA^t的一个代数余子式，即删去AY_eA^t的第p行和第q列所得的子矩阵M_{pq}的行列式乘上$(-1)^{p+q}$。换句话说，

$$\Delta'_{pq} = (-1)^{p+q}|M_{pq}| \qquad (7\text{-}5\text{-}5)$$

据定义

$$H = AY_e \qquad (7\text{-}5\text{-}6)$$

我们有

$$HA^t = \begin{bmatrix} H_1A_1^t & H_1A_2^t & \cdots & H_1A_m^t \\ H_2A_1^t & H_2A_2^t & \cdots & H_2A_m^t \\ & & \cdots & \\ H_mA_1^t & H_mA_2^t & \cdots & H_mA_m^t \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}5\text{-}7)$$

其中

$$H=\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_m \end{bmatrix} \tag{7-5-8}$$

而

$$A=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} \tag{7-5-9}$$

HA^t的第q列是

$$\begin{bmatrix} H_1A_q^t \\ H_2A_q^t \\ \vdots \\ H_mA_q^t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_m \end{bmatrix}A_q^t \tag{7-5-10}$$

在HA^t中，没有其他的元素包含A_q^t，因此删除A中的第q行就可以实现对HA^t中第q列的删除。同样，HA^t的第p行是

$$[H_pA_1^t\ H_pA_2^t\cdots H_pA_m^t]=H_p[A_1^t\ A_2^t\cdots A_m^t] \tag{7-5-11}$$

在HA^t中没有其他的元素包含H_p，因此删除HA^t的第p行等价于删除H的第p行。然而

$$H=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 & & & \\ & y_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & y_{n_t} \end{bmatrix} \tag{7-5-12}$$

所以，删除H中的第p行等价于删除A的第p行。这样，如果我们用符号A_{-r}来表示A删除第r行得到的子矩阵，那么AY_eA^t删除第p行和第q列的子矩阵为$A_{-p}Y_e(A_{-q})^t$。现在，式(7-5-5)可以写成

$$\Delta'_{pq}=(-1)^{p+q}|A_{-p}Y_e(A_{-q})^t| \tag{7-5-13}$$

我们先来研究一个特殊的代数余子式Δ'_{pp}。在这种情况下，式(7-5-13)变成

$$\Delta'_{pp}=|A_{-p}Y_e(A_{-p})^t| \quad (7\text{-}5\text{-}14)$$

设顶点j为一个网络所对应的加权有向图G的参考点(也就是说，在关联矩阵A中，没有对应于顶点j的行).在分离线图的情况下，有几个参考点。但是，就网络函数而言，这些顶点可以被合并，而不会改变网络函数。因此，不失一般性，我们能把一个加权有向图看作是连通的。

我们已经知道，A_{-p}是在G中合并顶点j和p所得到的线图$G(p=j)$的关联矩阵。因此，据式(7-4-31),式(7-5-14)可以表示成

$$|A_{-p}Y_e(A_{-p})^t|=\sum G(p=j)\text{的树枝导纳乘积} \quad (7\text{-}5\text{-}15)$$

设$G(p=j)$中的一个树是$t(p=j)$.因为$G(p=j)$是由$n'_v=n_v-1$个顶点组成，$t(p=j)$包含$G(p=j)$的$n'_v-1=n_v-2$条边。所以，在G中，由$t(p=j)$的各边组成的子图g_t是不连通的，但当把顶点p和j合并，就是连通的。因此我们知道g_t包含两部分，其中每一部分都是连通的，并且一个部分包含顶点p，另一个包含顶点j。换句话说，把顶点p和j合并，子图g_t就变成一个树。这个$G(p=j)$中的树$t(p=j)$称为G的2-树，并记为$t_{2_{p},j}$。

定义7-5-1 连通图G的2-树$t_{2_{p},j}$是满足以下条件的子图：

1. $t_{2_{p},j}$由n_v-2条边组成，包含G中所有的顶点而不包含回路。
2. $t_{2_{p},j}$由两个连通部分组成，其中一个部分可以是孤立顶点。
3. 在这两部分中，一部分包含顶点p，另一部分包含顶点j。

由这个定义，式(7-5-15)可写作

$$|A_{-p}Y_e(A_{-p})^t|=\Delta'_{pp}=\sum 2\text{-树}t_{2_{p},j}\text{树枝导纳乘积} \quad (7\text{-}5\text{-}16)$$

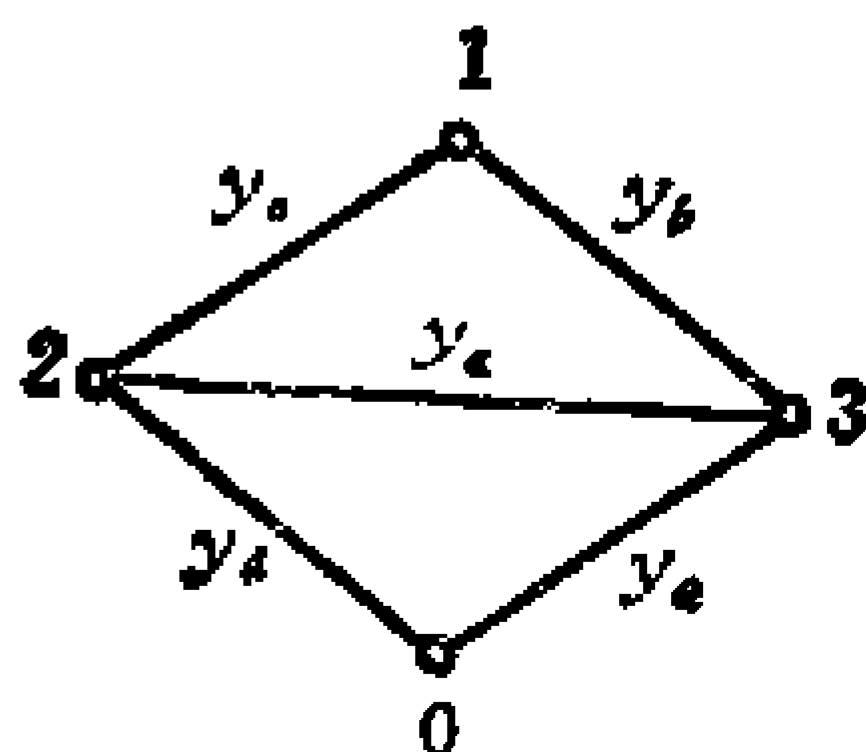


图7-5-2　加权线图G

例如，图 7-5-2 中加权线图G的所有的2-树$t_{2_{1,0}}$是 $(y_a y_b)$，$(y_a y_c)$，$(y_b y_c)$，$(y_a y_e)$，$(y_b y_d)$，$(y_c y_d)$，$(y_c y_e)$和$(y_d y_e)$

因此，以顶点 0 为参考点，Δ'_{11}是

$$\Delta'_{11} = y_a(y_b + y_c + y_e) + y_b(y_c + y_d) + y_c(y_d + y_e) + y_d y_e$$

现在，我们对后面将要用到的一个符号下定义。

定义7-5-2　符号$t_{2_{a_1a_2\cdots a_p,b_1b_2\cdots b_q}}$表示一个子图，它代表一个线图中具有如下性质的2-树：

1. 两个连通部分中，一个部分包含顶点$a_1, a_2, \cdots, a_p$而不包含顶点$b_1, b_2 \cdots, b_q$。

2. 另一个部分包含顶点$b_1, b_2, \cdots, b_q$而不包含顶点a_1，a_2，$\cdots, a_p$。

定义7-5-3　符号$T_{2_{a_1a_2\cdots a_p,b_1b_2\cdots b_q}}$表示在给定的线图中所有的$t_{2_{a_1a_2\cdots a_p,b_1b_2\cdots b_q}}$的集合。

由这两个定义，我们有

$$T_{2_{i,j}} = T_{2_{ip,j}} \cup T_{2_{i,pj}} \tag{7-5-17}$$

其中p是线图G的一个顶点。注意

$$T_{2_{ip,j}} \cap T_{2_{i,pj}} = \phi \tag{7-5-18}$$

当$j = p$时，

$$T_{2_{ip,j}} = \phi \tag{7-5-19}$$

且

$$T_{2_{i,pj}} = T_{2_{i,j}} \tag{7-5-20}$$

现在我们已为讨论代数余子式 Δ'_{pq} 作好了准备。由式(7-5-13)和比内-柯西定理，我们知道

$$\Delta'_{pq}=(-1)^{p+q}|A_{-p}Y_e(A_{-q})^t|$$

$$=(-1)^{p+q}\Sigma[(A_{-p}Y_e)\text{ 的大子行列式}]$$

$$\times[A^t_{-q}\text{对应的大子行列式}]$$

$$=(-1)^{p+q}\Sigma(y_{k_1}y_{k_2}\cdots y_{k_{m'}})|A_{-p}(k_1k_2\cdots k_{m'})|$$

$$|A_{-q}^t(k_1k_2\cdots k_{m'})| \qquad (7\text{-}5\text{-}21)$$

其中$A_{-p}(k_1k_2\cdots m_{m'})$ 是由A_{-p}的列$k_1,k_2,\cdots,k_{m'}$ 组成的子矩阵，$A_{-q}(k_1k_2\cdots k_{m'})$是由$A_{-q}$的列$k_1,k_2,\cdots,k_{m'}$组成的子矩阵。我们还知道，$A_{-p}$的一个非零大子行列式对于2-树$t_{2_{p,j}}$，其中顶点$j$是参考点。所以，如果$A_{-p}(k_1k_2\cdots k_{m'})$是非奇异的，则对应一个$t_{2_{p,j}}$。同样，$A_{-q}(k_1k_2\cdots k_{m'})$是非奇异的，当且仅当它对应于一个2-树$t_{2_{q,j}}$。因此，为使$|A_{-p}(k_1k_2\cdots k_{m'})||A^t_{-q}(k_1k_2\cdots k_{m'})|$非零，由列$k_1,k_2,\cdots,k_{m'}$对应的边组成的一个子图必须不仅是一个$t_{2_{p,j}}$而且也是一个$t_{2_{q,j}}$，也就是说，此子图必须是一个在$T_{2_{p,j}}$与$T_{2_{q,j}}$中的2-树。从

$$T_{2_{p,j}}=T_{2_{pq,j}}\cup T_{2_{p,qj}} \qquad (7\text{-}5\text{-}22)$$

及

$$T_{2_{q,j}}=T_{2_{pq,j}}\cup T_{2_{q,pj}} \qquad (7\text{-}5\text{-}23)$$

我们能看出，只有在$T_{2_{pq,j}}$中的2-树才满足上述条件，所以只要乘积$|A_{-p}(k_1k_2\cdots k_{m'})||A_{-q}^t(k_1k_2\cdots k_{m'})|$非零，列$k_1,k_2,\cdots,k_{m'}$就对应于一个2-树$t_{2_{pq,j}}$中的边。这样，式(7-5-21)变成

$$\Delta'_{pq}=(-1)^{p+q}\sum\varepsilon\times(2\text{-树 }t_{2_{pq,j}}\text{ 树枝导纳乘积}) \qquad (7\text{-}5\text{-}24)$$

其中 $$\varepsilon=|A_{-p}(k_1k_2\cdots k_{m'})||A_{-q}^t(k_1k_2\cdots k_{m'})| \qquad (7\text{-}5\text{-}25)$$

为了求出ε的值，我们考虑A由列$k_1,k_2,\cdots,k_{m'}$组成的子矩阵A_t，如下所示：

$$A_s=\begin{bmatrix} a_{1k_1} & a_{1k_2} & \cdots & a_{1k_{m'}} \\ a_{2k_1} & a_{2k_2} & \cdots & a_{2k_{m'}} \\ & \cdots & & \\ a_{pk_1} & a_{pk_2} & \cdots & a_{pk_{m'}} \\ & \cdots & & \\ a_{qk_1} & a_{qk_2} & \cdots & a_{qk_{m'}} \\ & \cdots & & \\ a_{mk_1} & a_{mk_2} & \cdots & a_{mk_{m'}} \end{bmatrix} \tag{7-5-26}$$

注意$m=n_v-1$(记得我们假设网络是连通的)及$m'=n_v-2$，因为一个2-树的边数为n_v-2。并且，A_s中包含的列与$A_{-p}(k_1k_2\cdots k_{m'})$和$A_{-q}(k_1k_2\cdots k_{m'})$中包含的列相同。因此，如果我们从$A_s$中删去第$p$行，所得的矩阵是$A_{-p}(k_1k_2\cdots k_{m'})$．另一方面，如果我们从$A_s$中删去第$q$行，所得的矩阵是$A_{-q}(k_1k_2\cdots k_{m'})$。

既然$t_{2_{pq,j}}$的两个连通部分中的一个包含顶点p和q，所以，在$t_{2_{pq,j}}$中，顶点p和q之间存在一条路径。设这条路径是$(e_1,e_2,\cdots,e_r)$如图7-5-3所示。

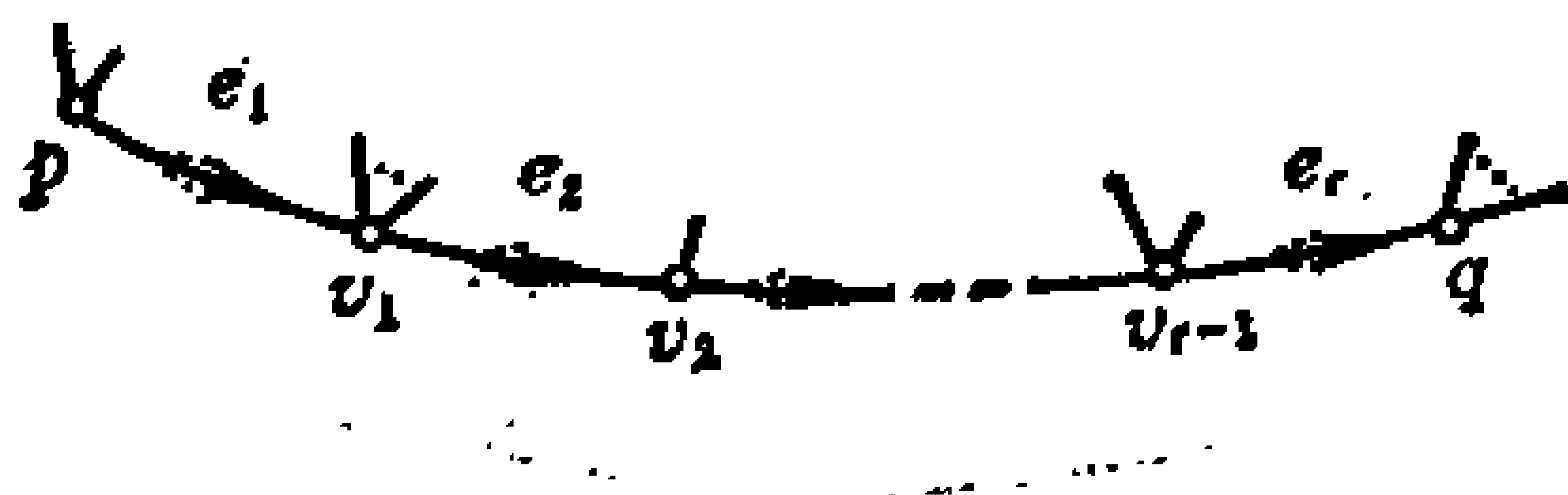


图7-5-3 $t_{2_{pq,j}}$中顶点p与q之间的路径

A_s中与路径的边$e_1,e_2,\cdots,e_r$对应的列具有以下性质。为了简便，设A_s中与边$e_1,e_2,\cdots,e_r$对应的列分别是第e_1，第$e_2,\cdots$，第e_r列。设A_s中与顶点$p,v_1,v_2,\cdots,v_{r-1}$，和q对应的分别是第p，第v_1，第$v_2,\cdots$,第v_{r-1}和第q行。第e_1列在第p行有非零元，第e_1和第e_2列在第v_1行有非零元，$\cdots$,第e_r列在第q行有非零元。假定第e_1，第$e_2,\cdots$，第e_r列是A_s的前r列，而第p，第$v_1,\cdots$，第q行是A_s的前$r+1$行．这个假设对一般情况并不是适合的，而且我们很快就会看到，这个假设对于我们这里要说明的问题也不是必

要的，然而，这样做使下面的讨论变得很清晰。由此假设：

$$
A_s=\begin{array}{c} p \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ q \end{array}\overset{\begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & \cdots & e_r & \cdots \end{array}}{\begin{bmatrix} 0 & \pm1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \mp1 & \pm1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \mp1 & \pm1 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mp1 & \cdots \end{bmatrix}} \tag{7-5-27}
$$

我们用第e_2列乘上(±1)后再加到第e_1列，使得第e_1列有两个非零元素，一个在第p行，另一个在第v_2行：

$$
A_s=\begin{array}{c} p \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ q \end{array}\overset{\begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & \cdots & e_r & \cdots \end{array}}{\begin{bmatrix} \pm1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \pm1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \mp1 & \mp1 & \pm1 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & & \cdots & & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mp1 & \cdots \end{bmatrix}} \tag{7-5-28}
$$

注意在第e_1列中，这一运算将一个非零元从第v_1行移到了第v_2行。与此类似，我们能将第e_3列乘上±1加到第e_1列，使在第e_1列中的一个非零元从第v_2行移到第v_3行。经过这样逐次的运算，我们能移动第e_1列中的一个非零元，最后使得一个非零元在第p行，另一个在第q行：

$$
A_s=\begin{array}{c} p \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ q \end{array}\overset{\begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & \cdots & e_r & \cdots \end{array}}{\begin{bmatrix} \pm1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \pm1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \mp1 & \pm1 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \mp1 & 0 & 0 & \cdots & \mp1 & \cdots \end{bmatrix}} \tag{7-5-29}
$$

值得注意的是，不论与顶点 p，v_1，v_2，$\cdots$，v_{r-1}，q 对应的行和与边 e_1，e_2，$\cdots$，e_r 对应的列的位置如何，我们都会有同样的结果。

不失一般性，设$q>p$，则由式(3-1-7)，我们能看出

$$|A_{-q}(k_1k_2\cdots k_{m'})| = \pm(-1)^{p+e_1}|A_{-p-q}| \qquad (7\text{-}5\text{-}30)$$

以及

$$|A_{-p}(k_1k_2\cdots k_{m'})| = \mp(-1)^{q-1+e_1}|A_{-p-q}| \qquad (7\text{-}5\text{-}31)$$

其中A_{-p-q}是A_t删除第p，第q行和第e_1列得到的子矩阵。在式(7-5-31)，因为A_{-p}中对应于顶点q的行不是第q行而是第q-1行，所以-1的指数应是$q-1+e_1$而不是$q+e_1$。由这个结果，我们有

$$\varepsilon = |A_{-p}(k_1k_2\cdots k_{m'})||A_{-q}(k_1k_2\cdots k_{m'})| = (-1)^{p+q} \qquad (7\text{-}5\text{-}32)$$

因为A_{-p-q}是一个关联矩阵的非奇异子阵，故$|A_{-p-q}|^2$是1。因此对任何$t_{2_{pq,j}}$，ε是$(-1)^{p+q}$。于是，据式（7-5-24），我们有以下定理。

定理7-5-1 一个似无源网络的节点导纳矩阵在(p，q)处的代数余子式是

$$\Delta'_{pq} = \Sigma 2\text{-树}t_{2_{pq,j}}\text{ 树枝导纳乘积} \qquad (7\text{-}5\text{-}33)$$

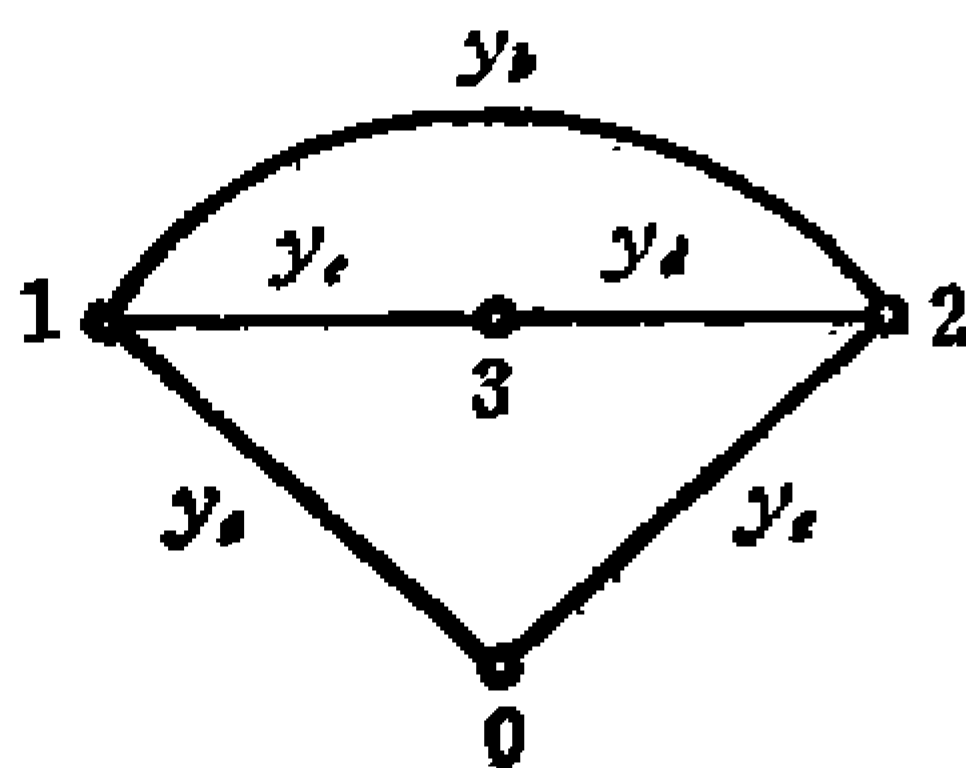


图7-5-4 一个网络

其中j是参考点。

例如，图 7-5-4 中网络的代数余子式Δ'_{12}能用找出所有的2-树$t_{2_{12,0}}$（这里 0 是参考点）的方法得到。

所有的2-树$t_{2_{12,0}}$是(y_by_c)，(y_by_d)和(y_cy_d)。因此

$$\Delta'_{12} = y_by_c + y_by_d + y_cy_d$$

为了方便，我们定义以下符号。

定义7-5-4 符号V和W分别代表$\sum$(树枝导纳乘积)和$\sum$(2-树树枝导纳乘积)，即

$$V = \sum(\text{树枝导纳乘积}) \qquad (7\text{-}5\text{-}34)$$

$$W_{a_1a_2\cdots a_r,b_1b_2\cdots b_r}=\sum(2\text{-树}\,t_{2a_1a_2\cdots a_r,b_1b_2\cdots b_r}\text{树枝导纳乘积})$$
(7-5-35)

利用Δ'和Δ'_{pq}，式(7-5-4)可以写成

$$V_n=\frac{1}{\Delta'}\begin{bmatrix}\Delta'_{11} & \Delta'_{21} & \cdots & \Delta'_{m1}\\ \Delta'_{12} & \Delta'_{22} & \cdots & \Delta'_{m2}\\ & \cdots & & \\ \Delta'_{1m} & \Delta'_{2m} & \cdots & \Delta'_{mm}\end{bmatrix}J_n \tag{7-5-36}$$

考虑图7-5-5中的网络，其中N仅由似无源元件组成。只就顶点p，q和j（参考点）之间的网络函数而言，式(7-5-36)可以简化成

$$\begin{bmatrix}v_p\\ v_q\end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta'}\begin{bmatrix}\Delta'_{pp} & \Delta'_{qp}\\ \Delta'_{pq} & \Delta'_{qq}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J_p\\ J_q\end{bmatrix} \tag{7-5-37}$$

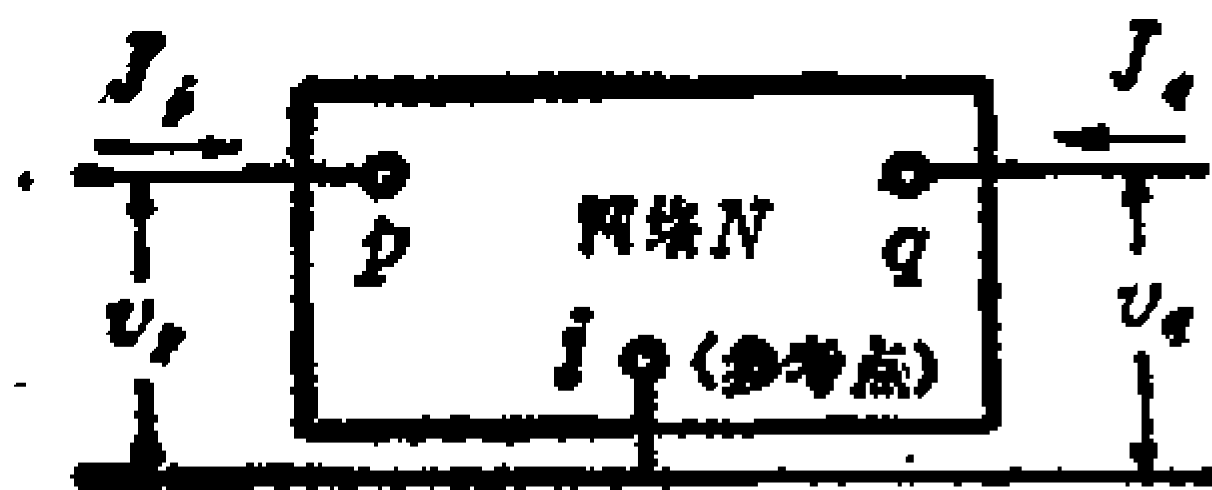


图7-5-5　三端网络函数

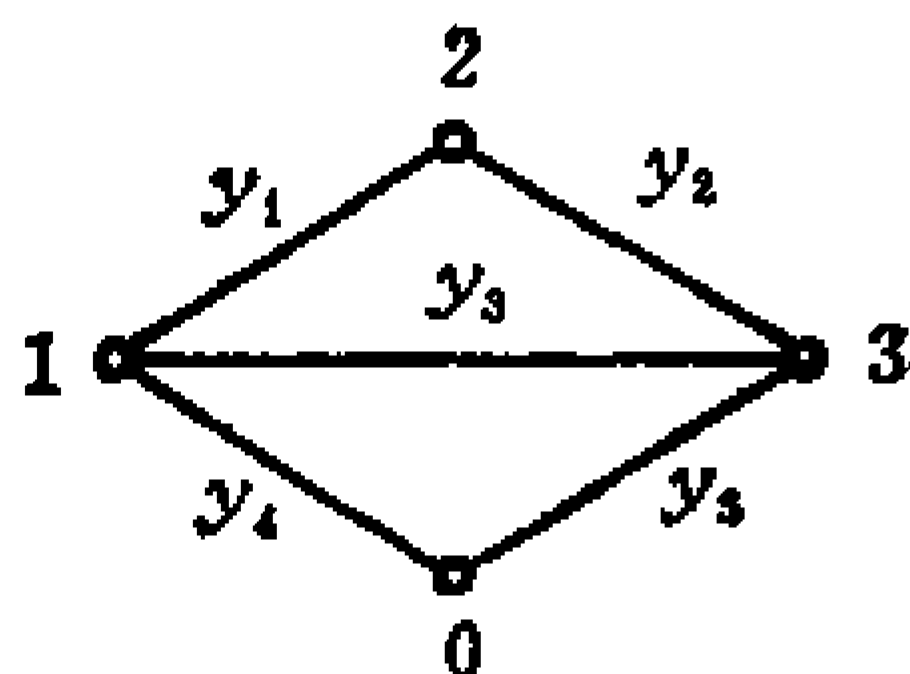


图7-5-6　一个网络

所以开路网络函数为

$$\left.\frac{J_p}{v_p}\right|_{Jq=0}=\frac{V}{W_{p,j}} \tag{7-5-38}$$

$$\left.\frac{J_p}{v_q}\right|_{Jq=0}=\frac{V}{W_{pq,j}} \tag{7-5-39}$$

以及

$$\left.\frac{v_q}{v_p}\right|_{J_q=0}=\left.\frac{v_q/J_p}{v_p/J_p}\right|_{J_q=0}=\frac{W_{pq,j}/V}{W_{p,j}/V}=\frac{W_{pq,j}}{W_{p,j}} \tag{7-5-40}$$

例如，图7-5-6中网络的开路网络函数可按如下方法得到：

$$V=y_1y_2y_4+y_1y_2y_5+y_1y_3y_4+y_1y_3y_5+y_1y_4y_5+y_2y_3y_4+y_2y_3y_5+y_2y_4y_5$$

$$W_{1,0}=y_1y_2+y_1y_3+y_1y_5+y_2y_3+y_2y_5$$

所以

$$\frac{J_1}{V_1}=\frac{V}{W_{1,0}}$$

$$=\frac{y_1[y_2(y_4+y_5)+y_3(y_4+y_5)+y_4y_5]+y_2[y_3(y_4+y_5)+y_4y_5]}{y_1[y_2+(y_3+y_5)]+y_2(y_3+y_5)}$$

并且

$$W_{2,0}=y_1y_2+y_1y_3+y_1y_5+y_2y_4+y_3y_4+y_4y_5+y_2y_3+y_3y_5$$

于是

$$\frac{J_2}{V_2}=\frac{V}{(y_1+y_4)(y_2+y_3+y_5)+y_3(y_2+y_5)}$$

又

$$W_{12,0}=y_1y_2+y_1y_3+y_1y_5+y_2y_3$$

故我们有

$$\left.\frac{J_1}{V_2}\right|_{J_2=0}=\frac{V}{[y_1(y_2+y_3+y_5)+y_2y_3]}$$

考虑图7-5-7中的网络，假设其中N仅是似无源元件。由式(7-5-36)，我们有

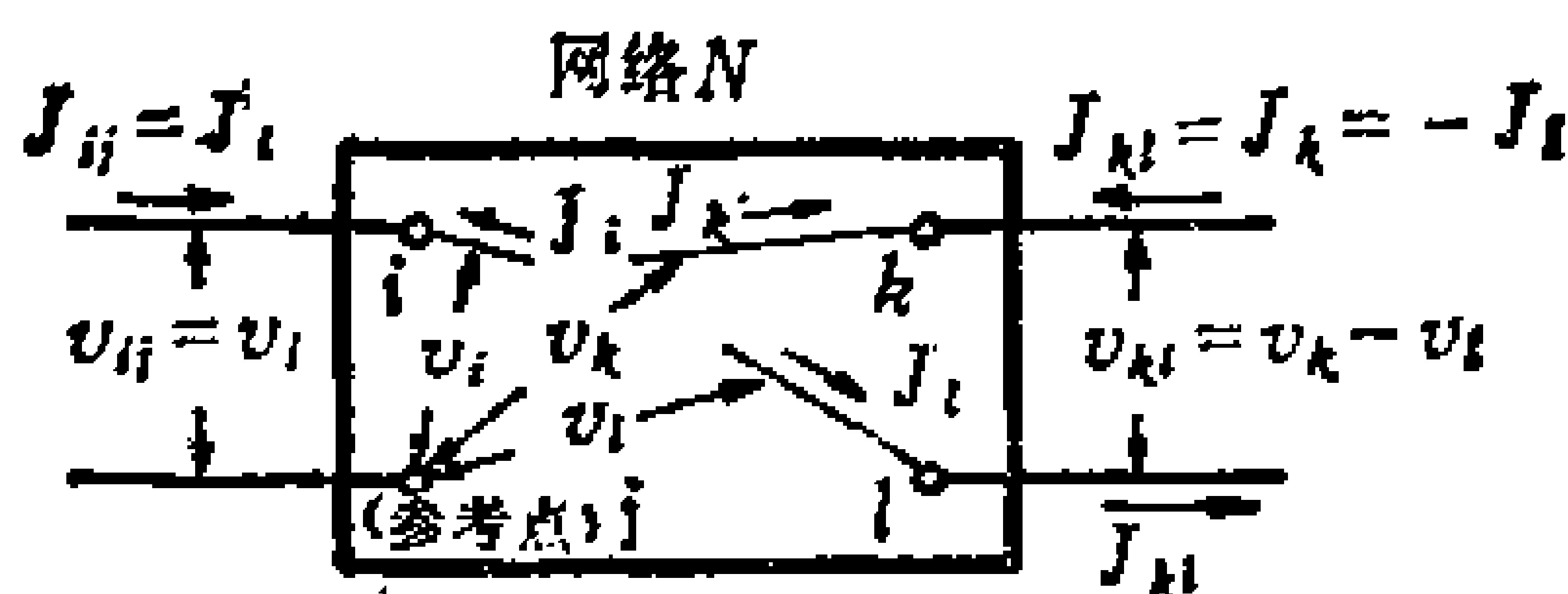


图7-5-7 四端网络函数

$$\begin{bmatrix} v_i \\ v_k \\ v_l \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta'} \begin{bmatrix} \Delta'_{ii} & \Delta'_{ki} & \Delta'_{li} \\ \Delta'_{ik} & \Delta'_{kk} & \Delta'_{lk} \\ \Delta'_{il} & \Delta'_{kl} & \Delta'_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_i \\ J_k \\ J_l \end{bmatrix} \tag{7-5-41}$$

因为

$$v_{ij} = v_i \tag{7-5-42}$$

$$J_{ij} = J_i \tag{7-5-43}$$

$$v_{kl} = v_k - v_l \tag{7-5-44}$$

$$J_{kl} = J_k = -J_l \tag{7-5-45}$$

其中v_p是从顶点p到参考点j的电压，J_p是从参考点j到顶点p的电流，$p=i,k,l$。式(7-5-41)能够改写为

$$\begin{bmatrix} v_{ij} \\ v_{kl} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta'} \begin{bmatrix} \Delta'_{ii} & \Delta'_{ki} - \Delta'_{li} \\ \Delta'_{ik} - \Delta'_{il} & \Delta'_{kk} + \Delta'_{ll} - \Delta'_{kl} - \Delta'_{lk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{ij} \\ J_{kl} \end{bmatrix} \tag{7-5-46}$$

因为

$$W_{pq,j} = \sum 2\text{-树}\, t_{2_{pq,j}} \text{树枝导纳乘积} \tag{7-5-47}$$

$$t_{2_{pq,j}} \in T_{2_{pq,j}}$$

以及

$$T_{2_{pq,j}} = T_{2_{pqk,j}} \cup T_{2_{pq,kj}} \tag{7-5-48}$$

我们可将Δ'_{ki}表示为

$$\Delta'_{ki}=W_{ki,j}=W_{kil,j}+W_{ki,lj} \tag{7-5-49}$$

类似地

$$\Delta'_{li}=W_{li,j}=W_{kil,j}+W_{li,kj} \tag{7-5-50}$$

所以

$$\Delta'_{ki}-\Delta'_{li}=W_{ki,lj}-W_{li,kj} \tag{7-5-51}$$

同样

$$\Delta'_{ki}-\Delta'_{il}=W_{ki,lj}-W_{li,kj} \tag{7-5-52}$$

又由

$$\Delta'_{kk}=W_{k,j}=W_{kl,j}+W_{k,lj} \tag{7-5-53}$$

$$\Delta'_{ll}=W_{l,j}=W_{kl,j}+W_{l,kj} \tag{7-5-54}$$

$$\Delta'_{kl}=W_{kl,j} \tag{7-5-55}$$

$$\Delta'_{lk}=W_{kl,j} \tag{7-5-56}$$

我们有

$$\Delta'_{kk}+\Delta'_{ll}-\Delta'_{kl}-\Delta'_{lk}=W_{k,lj}+W_{kj,l}=W_{k,l} \tag{7-5-57}$$

这样，式(7-5-46)可以写为

$$\begin{bmatrix} v_{ij} \\ v_{kl} \end{bmatrix}=\frac{1}{V}\begin{bmatrix} W_{i,j} & W_{ki,lj}-W_{li,kj} \\ W_{ki,lj}-W_{li,kj} & W_{k,l} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_{ij} \\ J_{kl} \end{bmatrix} \tag{7-5-58}$$

换句话说，四端网络的开路函数为

$$\left.\frac{J_{ij}}{v_{ij}}\right|_{J_{kl}=0}=\frac{V}{W_{i,j}} \tag{7-5-59}$$

$$\left.\frac{J_{ij}}{v_{kl}}\right|_{J_{kl}=0}=\frac{V}{W_{ki,lj}-W_{li,kj}} \tag{7-5-60}$$

$$\left.\frac{v_{kl}}{v_{ij}}\right|_{J_{kl}=0}=\frac{W_{ki,lj}-W_{li,kj}}{W_{i,j}} \tag{7-5-61}$$

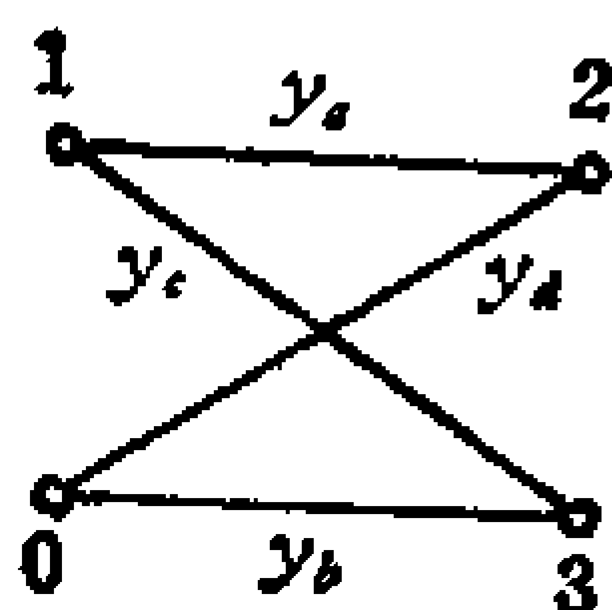


图7-5-8　一个四端网络

例如，图7-5-8中网络的开路电压比 v_{23}/v_{10} 能由 $W_{1,0}$ 和 $W_{12,30}-W_{13,20}$ 得到：

$$W_{1,0}=y_ay_b+y_ay_c+y_by_d+y_cy_d$$

$$W_{12,30}-W_{13,20}=y_ay_b-y_cy_d$$

所以

$$\frac{v_{23}}{v_{10}}=\frac{y_ay_b-y_cy_d}{y_ay_b+y_av_c+y_by_d+y_cy_d}$$

由于规定

$$W_{ki,lj}=W_{ki,j}\qquad 对 j=1 \tag{7-5-62}$$

$$W_{li,kj}=0\qquad 对 j=1 \tag{7-5-63}$$

我们可以看出，当 $j=1$时，式(7-5-60)和(7-5-61)变成式(7-5-39)和(7-5-40)。

7-6　短路网络函数的拓扑公式

由式(7-5-46)，我们得到

$$\begin{bmatrix}J_{ij}\\J_{kl}\end{bmatrix}=\frac{\Delta'}{\Delta'_{ii}(\Delta'_{kk}+\Delta'_{ll}-\Delta'_{kl}-\Delta'_{lk})-(\Delta'_{ki}-\Delta'_{li})(\Delta'_{ik}-\Delta'_{il})}$$
$$\times\begin{bmatrix}\Delta'_{kk}+\Delta'_{ll}-\Delta'_{kl}-\Delta'_{lk} & -(\Delta'_{ki}-\Delta'_{li})\\-(\Delta'_{ik}-\Delta'_{il}) & \Delta'_{ii}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{ij}\\v_{kl}\end{bmatrix} \tag{7-6-1}$$

为了简化这个等式，我们必须找出代数余子式之间的关系。考虑一个n阶方阵$A=[a_{ij}]$，设M是A的转置伴随（经典转置伴随）矩

阵，即

$$M=\begin{bmatrix}\Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1}\\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2}\\ & \cdots & & \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn}\end{bmatrix} \tag{7-6-2}$$

这里Δ_{ij}是A中a_{ij}的代数余子式。那么我们知道

$$AM=\begin{bmatrix}D & & & 0\\ & D & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & D\end{bmatrix} \tag{7-6-3}$$

其中D是A的行列式。假定我们把A的行和列重排，使行r_1，r_2，$\cdots$，r_k成为前k行，列j_1，j_2，$\cdots$，j_k成为前k列。设所得的矩阵是$\underline{A}$，又设$\underline{M}$是$\underline{A}$的转置伴随矩阵，它能从重排M的行和列得到。

现在我们把$\underline{M}$中除前k列外的各列重新安排，使$\underline{M}$改成

$$\underline{M}_k=\left[\begin{array}{cccc|cccc}\Delta_{r_1j_1} & \Delta_{r_2j_1} & \cdots & \Delta_{r_kj_1} & & & & \\ \Delta_{r_1j_2} & \Delta_{r_2j_2} & \cdots & \Delta_{r_kj_2} & & 0 & & \\ & \cdots & & & & & & \\ \Delta_{r_1j_k} & \Delta_{r_2j_k} & \cdots & \Delta_{r_kj_k} & & & & \\ \hline \Delta_{r_11} & \Delta_{r_21} & \cdots & \Delta_{r_k1} & 1 & & & \\ \Delta_{r_12} & \Delta_{r_22} & \cdots & \Delta_{r_k2} & & 1 & & 0\\ & \cdots & & & & & \ddots & \\ \Delta_{r_1n} & \Delta_{r_2n} & \cdots & \Delta_{r_kn} & & 0 & & 1\end{array}\right] \tag{7-6-4}$$

其中$r_1<r_2<\cdots<r_k$，$j_1<j_2<\cdots<j_k$。$\underline{A}$和$\underline{M}_k$的乘积是

$$
\underline{A}\cdot\underline{M}_k=\left[\begin{array}{ccc:ccc}
a_{r_1j_1} & \cdots & a_{r_1j_k} & a_{r_11} & \cdots & a_{r_1n} \\
a_{r_2j_1} & \cdots & a_{r_2j_k} & a_{r_21} & \cdots & a_{r_2n} \\
 & \cdots & & & \cdots & \\
a_{r_kj_1} & \cdots & a_{r_kj_k} & a_{r_k1} & \cdots & a_{r_kn} \\
\hdashline
a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_k} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
a_{2j_1} & \cdots & a_{2j_k} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\
 & \cdots & & & \cdots & \\
a_{nj_1} & \cdots & a_{nj_k} & a_{n1} & \cdots & a_{nn}
\end{array}\right]
$$

$$
\times\left[\begin{array}{ccc:ccc}
\Delta_{r_1j_1} & \cdots & \Delta_{r_kj_1} & & & \\
\Delta_{r_1j_2} & \cdots & \Delta_{r_kj_2} & & 0 & \\
 & \cdots & & & & \\
\Delta_{r_1j_k} & \cdots & \Delta_{r_kj_k} & & & \\
\hdashline
\Delta_{r_11} & \cdots & \Delta_{r_k1} & 1 & & \\
\Delta_{r_12} & \cdots & \Delta_{r_k2} & & 1 & 0 \\
 & \cdots & & & \cdots & 1 \\
\Delta_{r_1n} & \cdots & \Delta_{r_kn} & 0 & & 1
\end{array}\right]
$$

$$
=\left[\begin{array}{cccc:ccc}
D & & & & a_{r_11} & \cdots & a_{r_1n} \\
 & D & & & a_{r_21} & \cdots & a_{r_2n} \\
 & & \ddots & & & \cdots & \\
 & & & D & a_{r_k1} & \cdots & a_{r_kn} \\
\hdashline
 & & & & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
 & 0 & & & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\
 & & & & & \cdots & \\
 & & & & a_{n1} & \cdots & a_{nn}
\end{array}\right] \qquad (7\text{-}6\text{-}5)
$$

所以由式(7-6-5)左端得$\underline{A}\underline{M}_k$的行列式

$$|\underline{A}\cdot\underline{M}_k| = |\underline{A}|\,|\underline{M}_k| = \mathscr{E}D\begin{vmatrix}\Delta_{r_1 i_2} & \cdots & \Delta_{r_k j_1}\\ \Delta_{r_1 i_2} & \cdots & \Delta_{r_k i_2}\\ & \cdots & \\ \Delta_{r_1 i_1} & \cdots & \Delta_{r_k i_k}\end{vmatrix} \tag{7-6-6}$$

其中$\mathscr{E} = (-1)^{r_1+r_2+\cdots+r_k+j_1+\cdots+j_k}$。

另一方面，由式(7-6-5)的右端得$\underline{A}\underline{M}_k$的行列式

$$|\underline{A}\cdot\underline{M}_k| = D^k\left|A\left(\overline{\frac{r_1 r_2\cdots r_k}{j_1 j_2\cdots j_k}}\right)\right| \tag{7-6-7}$$

这里的$A\overline{(r_1 r_2\cdots r_k / j_1 j_2\cdots j_k)}$表示从$A$中删去行$r_1$，$r_2$，…，$r_k$和列$j_1$，$j_2$，…，$j_k$得到的矩阵，因此

$$\begin{vmatrix}\Delta_{r_1 j_1} & \cdots & \Delta_{r_k j_1}\\ \Delta_{r_1 j_2} & \cdots & \Delta_{r_k j_2}\\ & \cdots & \\ \Delta_{r_1 j_k} & \cdots & \Delta_{r_k j_k}\end{vmatrix} = D^{k-1}\widetilde{D}\left(\overline{\frac{r_1 r_2\cdots r_k}{j_1 j_2\cdots j_k}}\right) \tag{7-6-8}$$

其中

$$\widetilde{D}\left(\overline{\frac{r_1 r_2\cdots r_k}{j_1 j_2\cdots j_k}}\right) = (-1)^{r_1+r_2+\cdots+r_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}\left|A\left(\overline{\frac{r_1 r_2\cdots r_k}{j_1 j_2\cdots j_k}}\right)\right| \tag{7-6-9}$$

当式(7-6-8)的右端由Δ_{ij}，Δ_{pj}，Δ_{iq}和Δ_{pq}组成时，

则
$$\begin{vmatrix}\Delta_{ij} & \Delta_{pj}\\ \Delta_{iq} & \Delta_{pq}\end{vmatrix} = D\widetilde{D}\left(\overline{\frac{ip}{jq}}\right) \tag{7-6-10}$$

或
$$\Delta_{ij}\Delta_{pq} - \Delta_{pj}\Delta_{iq} = D\widetilde{D}\left(\overline{\frac{ip}{jq}}\right) \tag{7-6-11}$$

我们已经说过，用符号Δ代表D，习惯上用Δ_{ijpq}来表示$\widetilde{D}(\overline{ip}/\overline{jq})$，用了这些符号，式(7-6-11)能表示为

$$\Delta_{ij}\Delta_{pq}-\Delta_{pj}\Delta_{iq}=\Delta\Delta_{ijpq} \tag{7-6-12}$$

此式称为雅可比关系式。有了这个关系，式(7-6-1)右端第一项的分母变成

$$\begin{aligned}\Delta'_{ii}(\Delta'_{kk}+\Delta'_{ll}-\Delta'_{kl}-\Delta'_{lk})-(\Delta'_{ki}-\Delta'_{li})(\Delta'_{ik}-\Delta'_{il})\\=(\Delta'_{ii}\Delta'_{kk}-\Delta'_{ik}\Delta'_{ki})+(\Delta'_{ii}\Delta'_{ll}-\Delta'_{il}\Delta'_{li})\\-(\Delta'_{ii}\Delta'_{kl}-\Delta'_{ki}\Delta'_{il})-(\Delta'_{ii}\Delta'_{lk}-\Delta'_{li}\Delta'_{ik})\\=\Delta'(\Delta'_{iikk}+\Delta'_{iill}-\Delta'_{iikl}-\Delta'_{iilk})\end{aligned} \tag{7-6-13}$$

于是式(7-6-1)变成

$$\begin{bmatrix}J_{ii}\\J_{kl}\end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta'_{iikk}+\Delta'_{iill}-\Delta_{iikl}-\Delta'_{iilk}}\times\begin{bmatrix}\Delta'_{kk}+\Delta'_{ll}-\Delta'_{kl}-\Delta'_{lk} & -(\Delta'_{ki}-\Delta'_{li})\\-(\Delta'_{ik}-\Delta'_{il}) & \Delta'_{ii}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{ii}\\v_{kl}\end{bmatrix} \tag{7-6-14}$$

我们能看出，Δ'_{iipq}可表示为

$$\Delta'_{iipq}=(-1)^{p+q}|A_{-i-p}Y(A_{-i-p})^t| \tag{7-6-15}$$

其中A_{-i-p}是关联矩阵A删去i行和p行得到的子矩阵，同样，A_{-i-q}是从A中删去i行和q行得到的子矩阵。由于Y是对角矩阵，从比内-柯西定理得到：

$$\Delta'_{iipq}=(-1)^{p+q}\sum_{(k)}y_{k_1}y_{k_2}\cdots y_{k_{m'}}|A_{-i-p}(k_1k_2\cdots k_{m'})|$$

$\cdot|A^t_{-i-q}(k_1k_2\cdots k_{m''})|$ (7-6-16)

其中$A_{-i-p}(k_1k_2\cdots k_{m''})$由$A_{-i-p}$的$k_1$，$k_2,\cdots,k_{m''}$列构成，$A_{-i-q}(k_1k_2\cdots k_{m''})$由$A_{-i-q}$的$k_1$，$k_2$，$\cdots k_{m''}$列构成。

考虑一个线图$G(i=j)$，它是由所给的线图G合并顶点i和j得到的（j是参考点）.我们可以看出，$G(i=j)$的节点导纳矩阵能由G的节点导纳矩阵删去对应于顶点i的行和列得到。换句话说，

$$G\text{的}A_{-i}Y(A_{-i})^t=G(i=j)\text{的}AYA^t \quad (7\text{-}6\text{-}17)$$

所以

$$G\text{的}A_{-i-p}Y(A_{-i-q})^t=G(i=j)\text{的}A_{-p}Y(A_{-q})^t \quad (7\text{-}6\text{-}18)$$

于是，由式(7-5-33)，

$$G\text{的}|A_{-i-p}Y(A_{-i-q})^t|=\sum G(i=j)\text{的2-树}t_{2_{pq,j}}\text{树枝导纳乘积} \quad (7\text{-}6\text{-}19)$$

设g_t是G的一个子图，当顶点i和j被合并时，它变成$G(i=j)$的2-树$t_{2_{pq,j}}$，则g_t必由三个连通部分构成，其中一个包含顶点p和q，另一个包含顶点i，第三个部分包含顶点j（参考点）.这样的子图称为3-树，用符号$t_{3_{i,pq,j}}$表示。

定义7-6-1 一个3-树$t_{3_{i_1i_2\cdots i_p,j_1j_2\cdots j_u,k_1k_2\cdots k_r}}$是线图$G$（有$n_v$个顶点）的满足下列条件的子图：

1. $t_{3_{i_1i_2\cdots i_p,j_1j_2\cdots j_u,k_1k_2\cdots k_r}}$包含$n_v-3$条边，$n_v$个顶点，且无回路。

2. $t_{3_{i_1i_2\cdots i_p,j_1j_2\cdots j_u,k_1k_2\cdots k_r}}$包含三个部分（三个最大连通子图），每个部分都是连通的。

3. 三个部分中，一部分包含顶点$i_1,i_2,\cdots,i_p$，另一部分包含顶点$j_1,j_2,\cdots j_u$，第三部分包含顶点$k_1,k_2,\cdots,k_r$，如图7-6-1所示。如果一个部分的顶点数是1的话，这个部分就是一个孤立点。

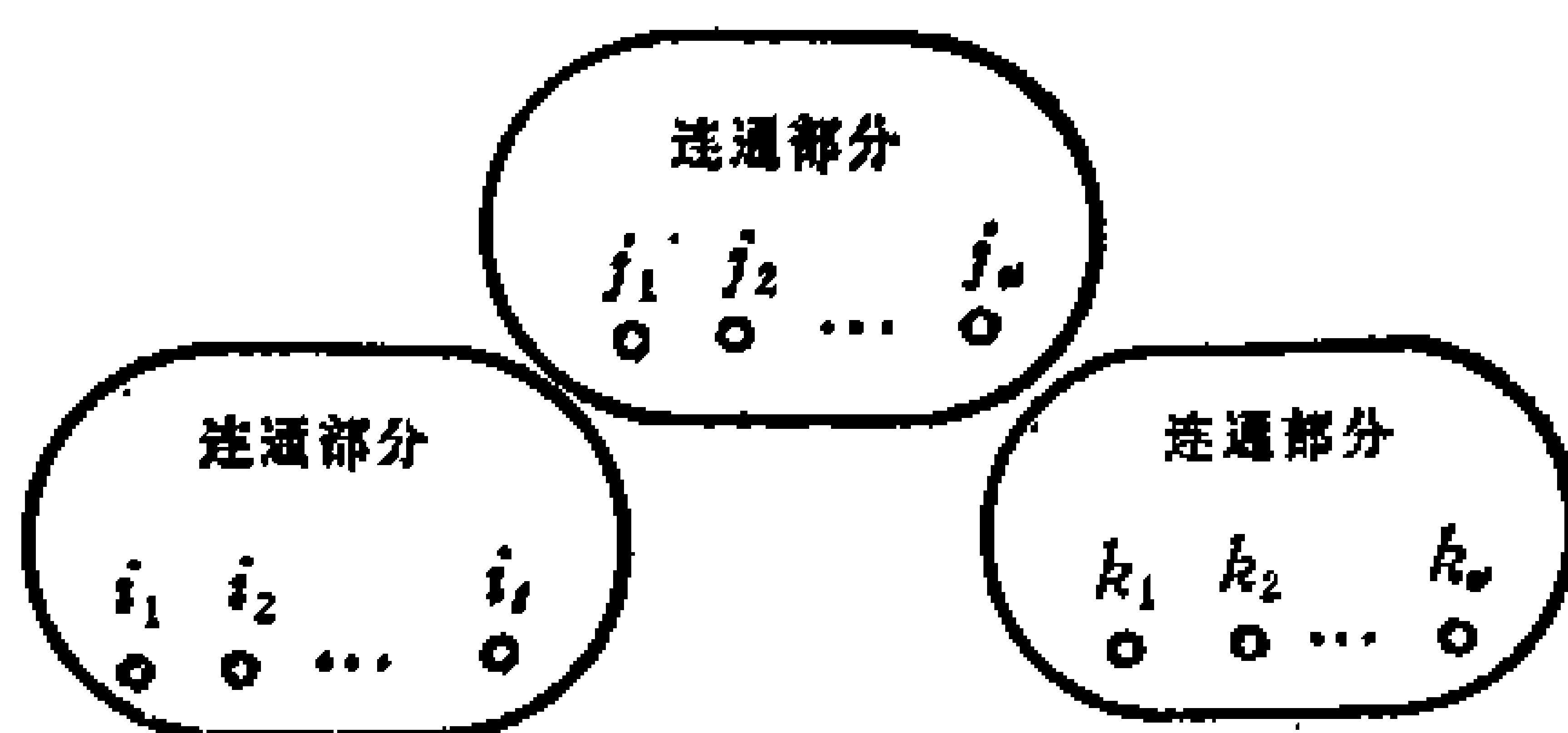


图7-6-1　3-树$t_{3i_1i_2\cdots i_s,j_1j_2\cdots j_u,k_1k_2\cdots k_v}$

由这个定义及式(7-6-19)，我们有定理7-6-1。

定理7-6-1　一个似无源网络的节点导纳矩阵的代数余子式Δ'_{iipq}是

$$\Delta'_{iipq}=\sum 3\text{-树}t_{3i,pq,j}\text{树枝导纳乘积} \tag{7-6-20}$$

这里j是参考点。

为了简便，我们定义符号$U_{i,pq,j}$如下。

定义7-6-2

$$U_{i,pq,j}=\sum 3\text{-树}t_{3i,pq,j}\text{树枝导纳乘积} \tag{7-6-21}$$

代数余子式Δ'_{iikk}现在可以表示为

$$\Delta'_{iikk}=U_{i,k,j} \tag{7-6-22}$$

因为顶点l能在三个部分中的任何一个之中，所以式(7-6-22)可写成

$$U_{i,k,j}=U_{i,kl,j}+U_{il,k,j}+U_{i,k,lj} \tag{7-6-23}$$

同样，代数余子式Δ'_{iill}和Δ'_{iikl}可表示成

$$\Delta'_{iill}=U_{i,l,j}=U_{i,kl,j}+U_{ik,l,j}+U_{i,l,kj} \tag{7-6-24}$$

及

$$\Delta'_{iikl}=U_{i,kl,j} \tag{7-6-25}$$

因此

$$\Delta'_{iikk}+\Delta'_{iill}-\Delta'_{iikl}-\Delta'_{iilk}=U_{ik,l,j}+U_{i,k,lj}+U_{il,k,j}+U_{i,l,kj} \tag{7-6-26}$$

定义7-6-3 符号$\sum U$定义为

$$\sum U = U_{ik,l,j} + U_{i,k,lj} + U_{il,k,j} + U_{i,l,kj} \qquad (7\text{-}6\text{-}27)$$

在式(7-6-26)的右边运用定义7-6-3，则式(7-6-14) 能 表示为

$$\begin{bmatrix} J_{ij} \\ J_{kl} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Sigma U} \begin{bmatrix} W_{k,l} & -(W_{ik,lj} - W_{il,kj}) \\ -(W_{ik,lj} - W_{il,kj}) & W_{i,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ij} \\ v_{kl} \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}6\text{-}28)$$

注意当$j = l$时，式(7-6-27)中的$\sum U$简化为

$$\sum U = U_{i,k,j} \qquad (7\text{-}6\text{-}29)$$

于是，由式(7-6-28)，我们得到

$$\begin{bmatrix} J_p \\ J_q \end{bmatrix} = \frac{1}{U_{i,k,j}} \begin{bmatrix} W_{q,j} & -W_{qp,j} \\ -W_{pq,j} & W_{p,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_p \\ v_q \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}6\text{-}30)$$

等式(7-6-28)和(7-6-30)分别给出了四端和三端网络的短路网络函数的拓扑公式。现在可以得到电流比如下：

$$\left.\frac{J_{kl}}{J_{ij}}\right|_{v_{kl}=0} = \frac{J_{kl}/v_{ij}}{J_{ij}/v_{ij}} = \frac{-(W_{ik,lj} - W_{il,kj})}{W_{k,l}} \qquad (7\text{-}6\text{-}31)$$

例如，考虑图7-5-8中的网络，求得U为

$$U = U_{13,2,0} + U_{1,3,20} + U_{12,3,0} + U_{1,2,30} = y_c + y_d + y_a + y_b$$

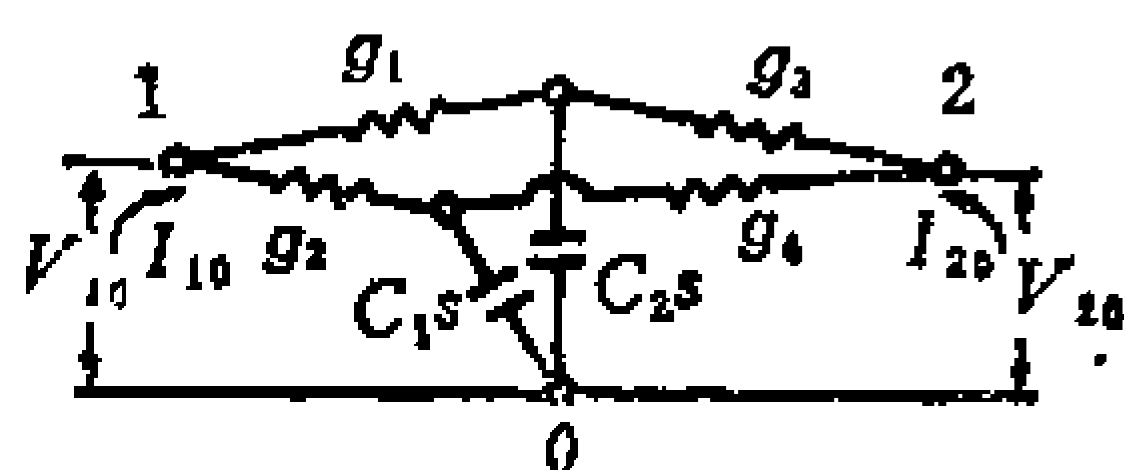
我们可以求出短路转移函数$\left.\dfrac{J_{10}}{v_{23}}\right|_{v_{10}=0}$为：

$$\left.\frac{J_{10}}{v_{23}}\right|_{v_{10}=0} = \frac{-(W_{12,30} - W_{13,20})}{U} = \frac{y_c y_d - y_a y_b}{y_a + y_b + y_c + y_d}$$

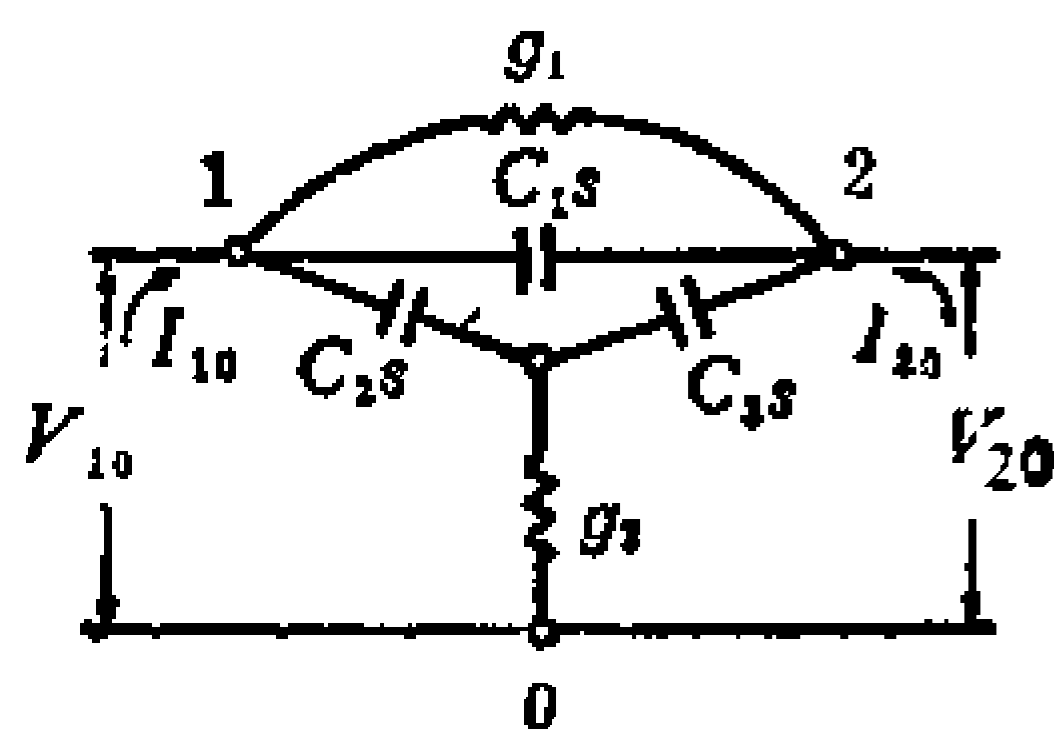
当元件的初始条件不为零，或网络中有电压源或电流源时，本章所讨论的公式要作些必要的修改。

习　题

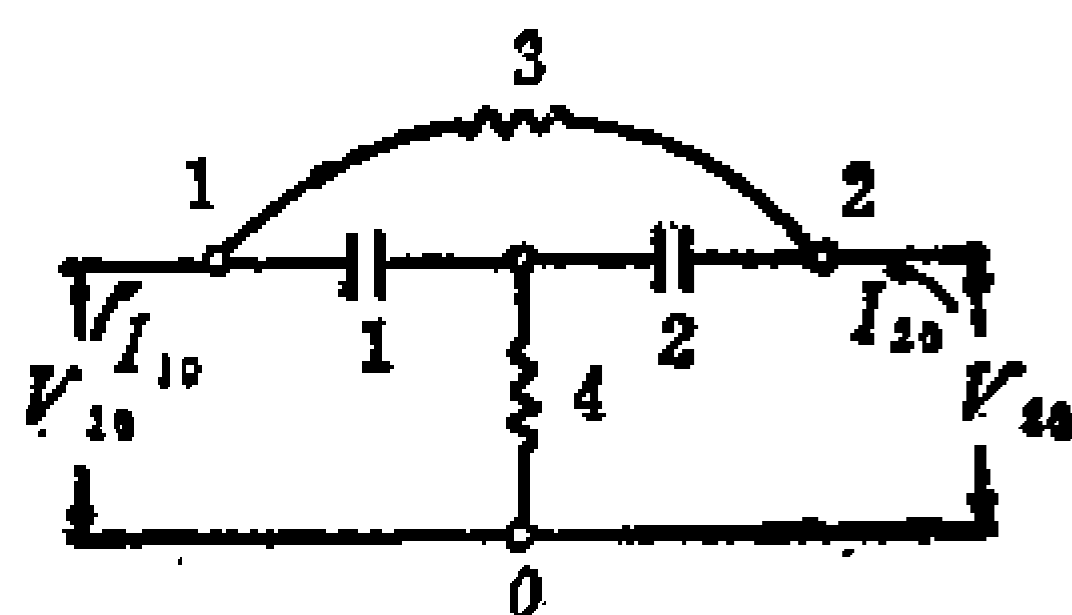
1. 分别求出图P-7-1中三个网络的开路策动点函数V_{10}/I_{10}和转移函数V_{20}/I_{10}。



(a)



(b)



(c)

图P-7-1

2. 求出图P-7-2中两个网络的电压比V_{23}/V_{10}。

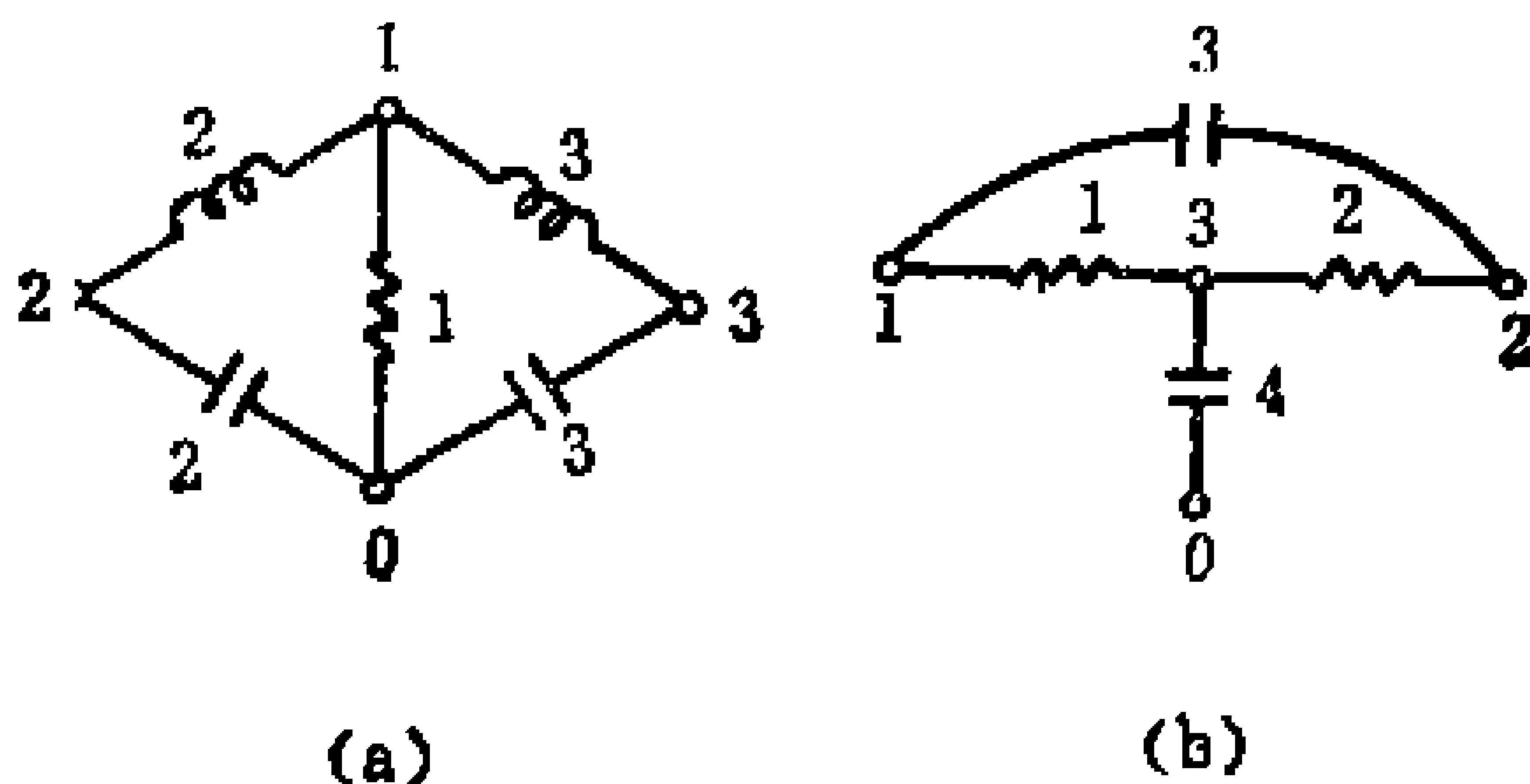


图 P-7-2

3. 求出在题 1 中三个网络的短路转移函数$\left.\frac{I_{20}}{V_{10}}\right|_{v_{20}=0}$。

4. 求出一个由n_v个顶点组成的完全图网络的路开策动点导纳函数，设每边的电导是 1 姆欧。

5. 利用拓扑公式证明一个无互感的LC网络的开路策动点函数是S的偶函数和奇函数的比。

6. 设Y_n是一个所有导纳均为非负的有一个公共端的似无源网络节点导纳矩阵。令

$$\Delta_{11}=Y_n\text{的}(1,1)\text{的代数余子式}=\frac{1}{s^{m-2}}(a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0)$$

$$\Delta_{12}=Y_n\text{的}(1,2)\text{的代数余子式}=\frac{1}{s^{m-2}}(b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_0)$$

证明对$0\leqslant k\leqslant n$，有$0\leqslant b_k\leqslant a_k$。

7. 证明 $\begin{vmatrix}A\\B_f\end{vmatrix}=\pm$（树的数目）

这里B_f是基本回路矩阵。

8. 证明BYB'是网孔阻抗矩阵，其中B是回路矩阵。

9. 证明$|BB'|$是一个线图中的树的数目。

第八章　有源网络的拓扑公式，单向网络及等效变换

8-1　电流图和电压图

利用线图来分析网络有几种不同的方法，每一种方法有利有弊。上一章讨论的形如 AYA^t 的节点导纳矩阵有一个特性，即 Y 是一个对角矩阵，而正由于这一特性，这样一个矩阵的行列式等于树枝导纳乘积之和。下面我们将看到，一个有源网络的节点导纳矩阵也能表示成为 $A_1YA_2^t$ 的形式，使得 Y 是一个对角矩阵。然而，在 $A_1YA_2^t$ 中，关联矩阵 A_1 和 A_2 是不同的。因此，$A_1YA_2^t$ 的行列式并不正好是树枝导纳乘积之和。

定义8-1-1　一个由

$$yv_{r,s}=i_{t,u} \tag{8-1-1}$$

定义的导纳 y 用图8-1-1所示的两条边表示，其中 $v_{r,s}$ 是从顶点 r 到顶点 s 的电压，而 $i_{t,u}$ 是与之对应的从顶点 t 流向顶点 u 的电流。表示 $i_{t,u}$ 的边称为导纳 y 的电流边，表示 $v_{r,s}$ 的边称为导纳 y 的电压边，如图 8-1-1 所示。箭头中的符号 i 表示这条边是电流边，箭头中的符号 v 表示这条边是电压边，这种表示法叫导纳 y 的拓扑表示法。

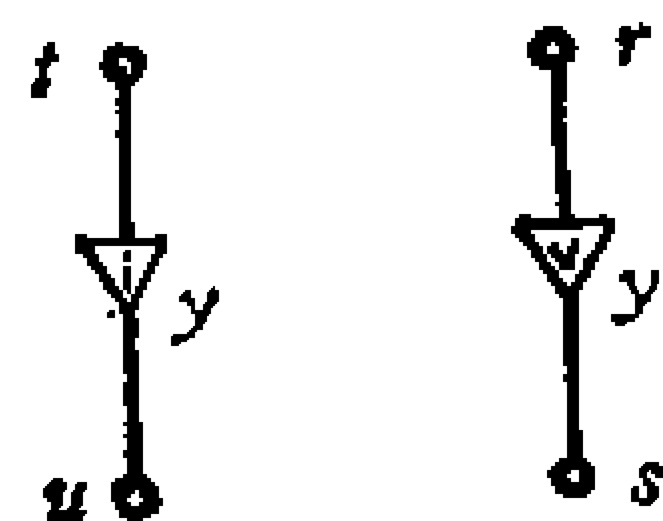


图8-1-1　y 的表示

例如，一个三端跨导 g 可以用下式定义

$$gv_{G,K}=i_{P,K} \tag{8-1-2}$$

它可以由图8-1-2中所示的两条边来表示。当 $r=t$ 且 $s=u$ 时，图8-1-1中导纳 y 的拓扑表示法如图8-1-3(a)所示。这样的导纳用图8-1-3(b)所示的一条边来表示比较简便，因为在这种情况下，y 变成一个似无源元件［见式（7-4-6）和图7-4-1］。类似地，当 $r=u$，$s=t$ 时，我们有

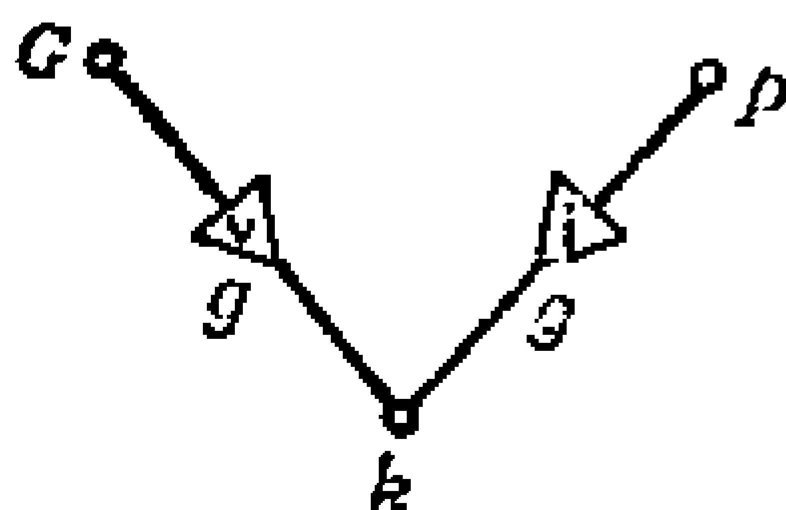


图8-1-2　三端跨导 g

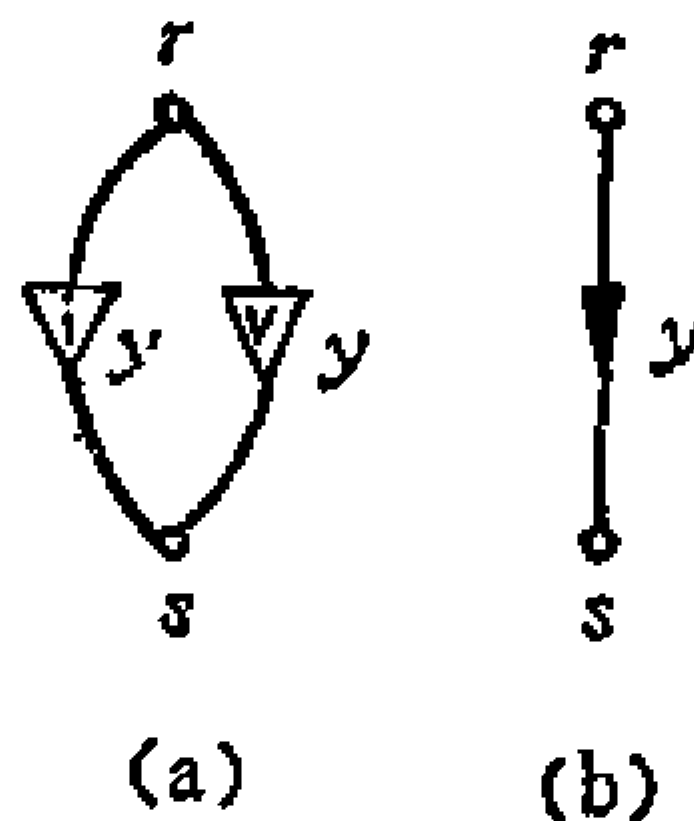
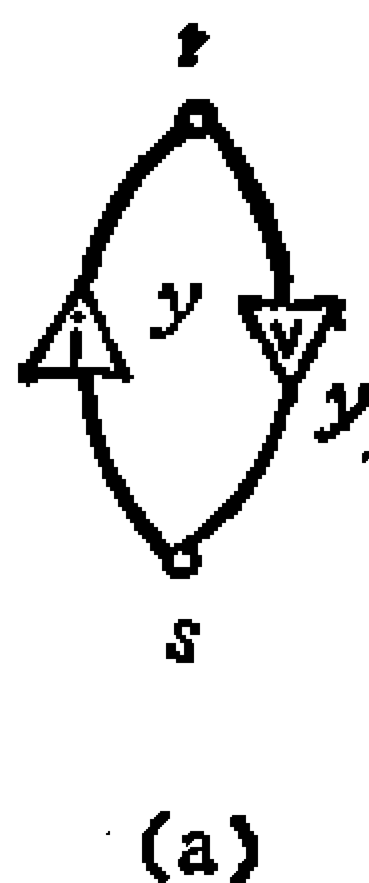


图8-1-3　似无源元件

$$yv_{r,s}=i_{s,r} \tag{8-1-3}$$

这样的导纳 y 的表示法如图8-1-4(a)所示。因为



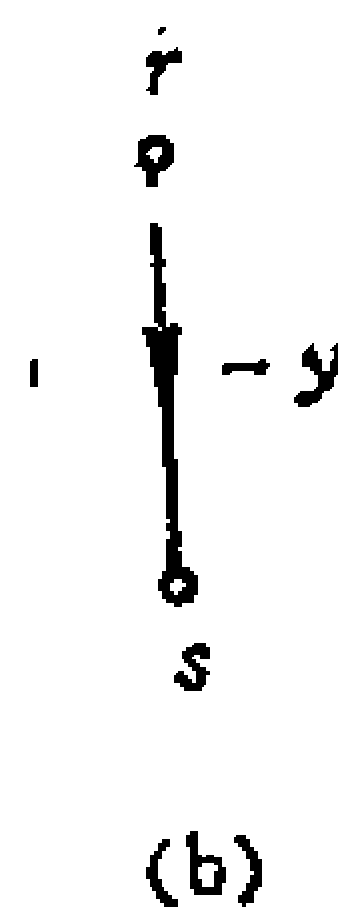


图8-1-4　负导纳

$$i_{s,r}=-i_{r,s} \tag{8-1-4}$$

故式(8-1-3)可以写成

$$(-y)v_{r,s}=i_{r,s} \tag{8-1-5}$$

这样，我们能用一条边来表示这样一个导纳，它的权为 $-y$〔图8-1-4(b)〕。注意这是由于

$$v_{r,s}=-v_{s,r} \tag{8-1-6}$$

且据式(8-1-4)，似无源元件的定向是任意的。这里必须弄清楚，在图8-1-3(b)〔以及图8-1-4(b)〕中所表示的似无源元件的边，既表示导纳 y 的电压边，又表示导纳 y 的电流边。也就是说，图8-1-3(b)中表示法只是图8-1-3(a)中表示法的一种简洁标记而已。

为了熟悉电压边和电流边，我们考虑一个基本的节点方程

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} \tag{8-1-7}$$

其中 v_p 是从顶点 p 到参考点的电压，J_p 是从参考点流入顶点 p 的电流，$p=1，2，3$。我们能够画出对应此网络的线图，其节点导纳矩阵与式(8-1-7)（图8-1-5）中的节点导纳矩阵相同。因此，图8-1-1给出的表示法是一种非常有用的方法。值得注意，在图8-1-5中，每一条电压边和每一条电流边都与参考点相接。

当导纳 y 的电压边和电流边是任意时，导纳 y 在节点导纳矩

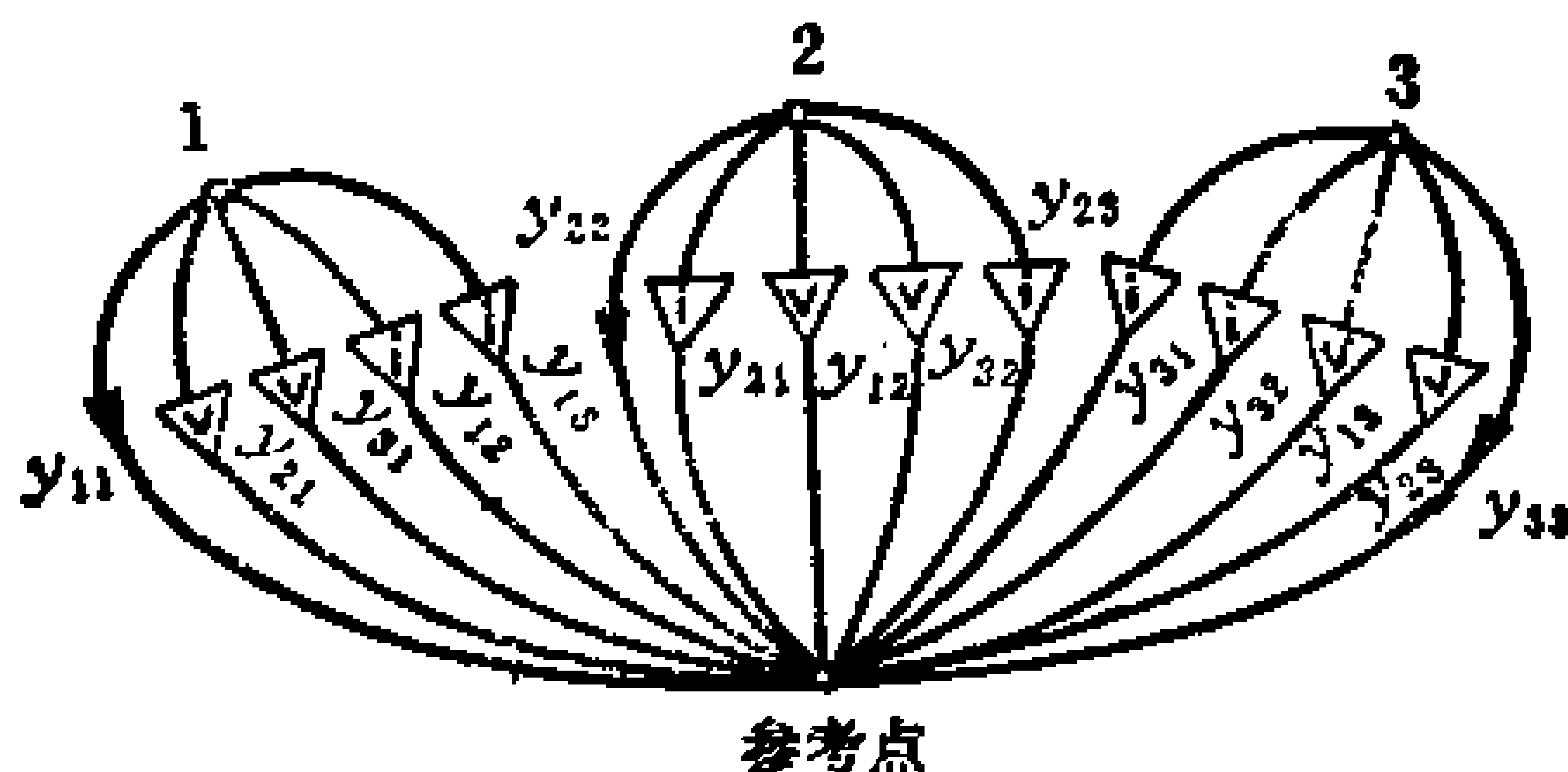


图8-1-5　一个网络的拓扑表示

阵中处于什么位置值得特别注意。考虑一个满足式(8-1-1)的导纳y，注意，在这种假设下，y的电压边从顶点r连接到顶点s，而y的电流边由顶点t连接到顶点u。设顶点r和s的节点电压为v_r和v_s，则式(8-1-1)能写成

$$y(v_r - v_s) = i_{t,u} \tag{8-1-8}$$

设

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots y_{2n} \\ y_{31} & y_{32} & \cdots y_{3n} \\ & \cdots & \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ \vdots \\ J_n \end{bmatrix} \tag{8-1-9}$$

是包含导纳y的一个网络的基本节点方程，则在式(8-1-9)中，节点导纳矩阵的第t行与电压向量的乘积是顶点t处电流的代数和，它必定等于电流J_t（外部电流）。由于式(8-1-8)中的电流$i_{t,u}$是从顶点t流向顶点u的，y必为节点导纳矩阵的(t,r)处的元素，$-y$必为(t,s)处的元素。同样，$-y$必为节点导纳矩阵的(u,r)处元素，而y为(u,s)处的元素。这些一定是导纳y的元素用图8-1-6表示，其中加圈的两个元素表示y在此位置符号相同。

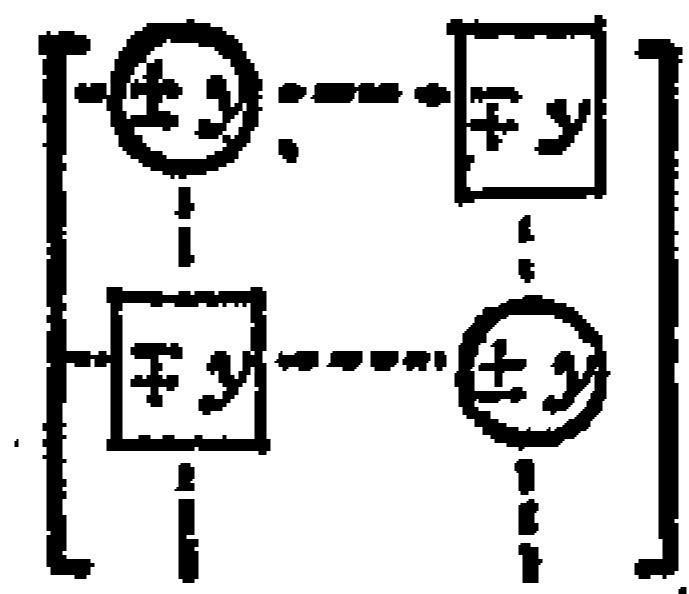


图8-1-6　在节点导纳矩阵中，导纳y的位置

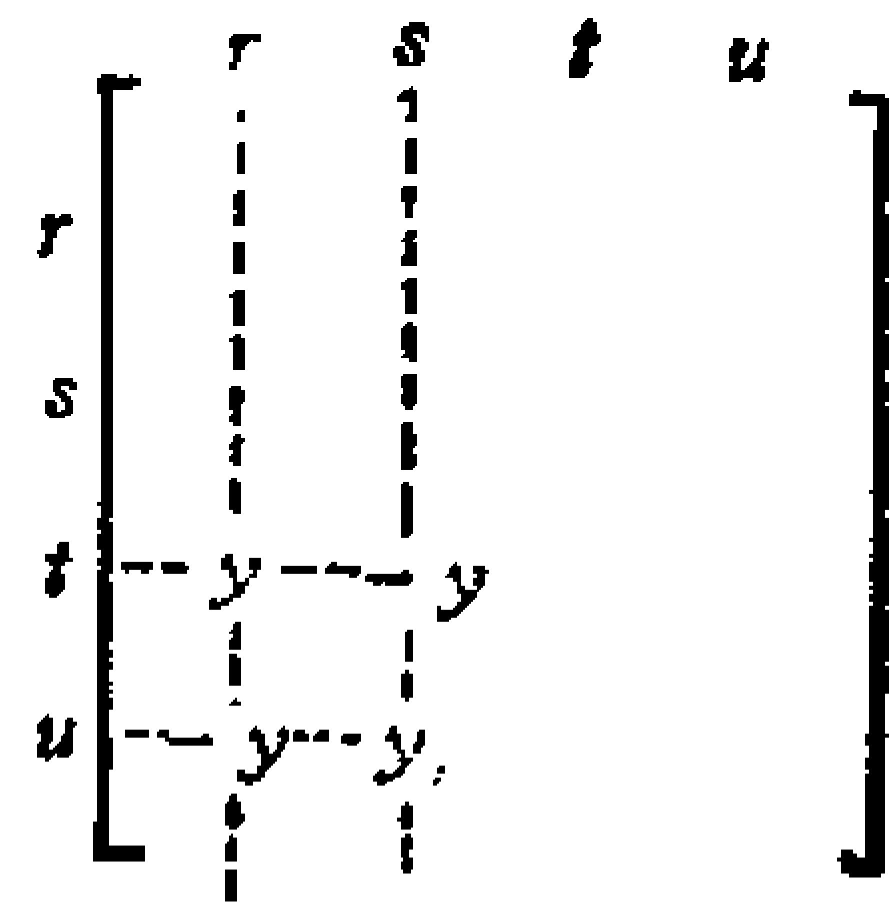


图8-1-7　当$r<s<t<u$时，y的位置

同样，在画方框的两个元素处，y的符号也必定相同，并且画圈的元素y与画方框的元素y的符号恰好相反。例如，如果在节点导纳矩阵中，$r<s<t<u$，则y将在图8-1-7所示的位置出现。注意，当$t=r$，$u=s$时，图8-1-6中圆圈表示的元素是对角线元素。并且，我们知道，在这些条件下，导纳y是一个似无源元件。如果我们运用式(8-1-5)，当$t=s$，$u=r$时，这个结论也是对的。因此，当且仅当导纳y是似无源元件时，在节点导纳矩阵中，y的位置是对称于对角线的。

假定顶点t或顶点u其中有一个是参考点，则与该顶点对应的列不会出现在节点导纳矩阵之中，因此，在图8-1-6中仅有一列有两个元素是导纳y。换句话说，图8-1-6中画圈和画框的两列中，必有一列不存在。同样，如果r或s其中有一个是参考点，则图8-1-6中画圈和画框的两行中也有一行不存在。例如，若$t<u$且s是参考点，则式(8-1-1)的导纳y在式(8-1-9)的节点导纳矩阵中出现的情况如图8-1-8所示。

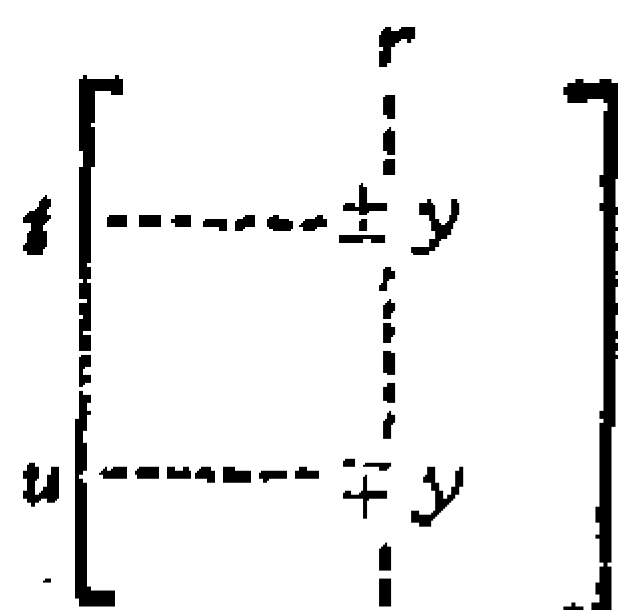


图8-1-8　当$t<u$且s为参考点时，y的位置

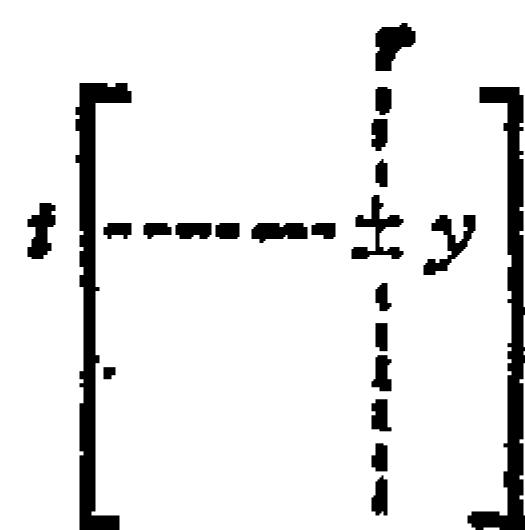


图8-1-9　当$u=s$且s为参考点时，y的位置

假定$u=s$，且s是参考点，那么我们可以看出，第u列和第s行都不存在，因而仅有一个元素(t,r)有导纳y（见图8-1-9）。

容易看出，一个给定的节点导纳矩阵能表示成若干个矩阵之和，其中每个矩阵恰好含有一种导纳。例如，我们可以把下面的节点导纳矩阵表示成几个矩阵之和：

$$
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \quad 1 \quad & \quad 2 \quad & \quad 3 \quad \end{array} \\
\begin{bmatrix} y_1+y_2 & -y_2-y_3 & y_3 \\ -y_2+y_4 & y_2+y_3+y_5 & -y_3 \\ 0 & -y_5 & y_5+y_6 \end{bmatrix}
\end{array}
=\begin{bmatrix} y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
+\begin{bmatrix} y_2 & -y_2 & 0 \\ -y_2 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
+\begin{bmatrix} 0 & -y_3 & y_3 \\ 0 & y_3 & -y_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_5 & -y_5 \\ 0 & -y_5 & y_5 \end{bmatrix}
+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_6 \end{bmatrix}
$$

其中每一个矩阵仅含一种导纳，由这些矩阵我们能看出，哪一个是似无源元件，哪一个是似有源元件。此处的似有源元件(*active-like element*)是由式(8-1-1)来定义的元件，但它不能用一条边来表示。并且，每一个导纳的电压边和电流边的位置可以容易得到。在这个例子中，第一，第二，第五和第六个矩阵表明 y_1，y_2，y_5 和 y_6 是似无源导纳，而 y_3 和 y_4 是似有源导纳。从这些矩阵我们能得到一个网络的线图，其导纳矩阵与上面给出的矩阵相同，如图8-1-10所示。当然，并不一定要把一个给定的导纳矩阵变换成一些矩阵的和才能得到这些信息。

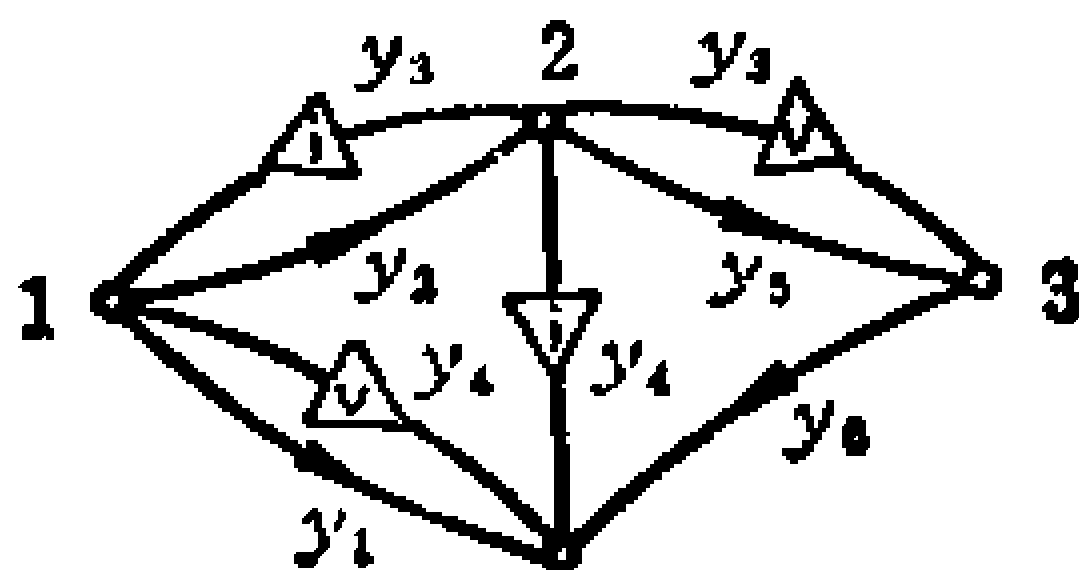


图8-1-10　一个网络

考虑一个由下式给出的变压器：

$$\begin{bmatrix} \dfrac{L_{22}}{s\Delta_m} & \dfrac{-M_{12}}{s\Delta_m} \\ \dfrac{-M_{21}}{s\Delta_m} & \dfrac{L_{11}}{s\Delta_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11'} \\ v_{22'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{11'} \\ i_{22'} \end{bmatrix} \qquad (8\text{-}1\text{-}10)$$

其中

$$\Delta_m = \begin{bmatrix} L_{11} & M_{12} \\ M_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \qquad (8\text{-}1\text{-}11)$$

这样一个变压器的拓扑表示由图8-1-11给出。对于图8-1-12中的

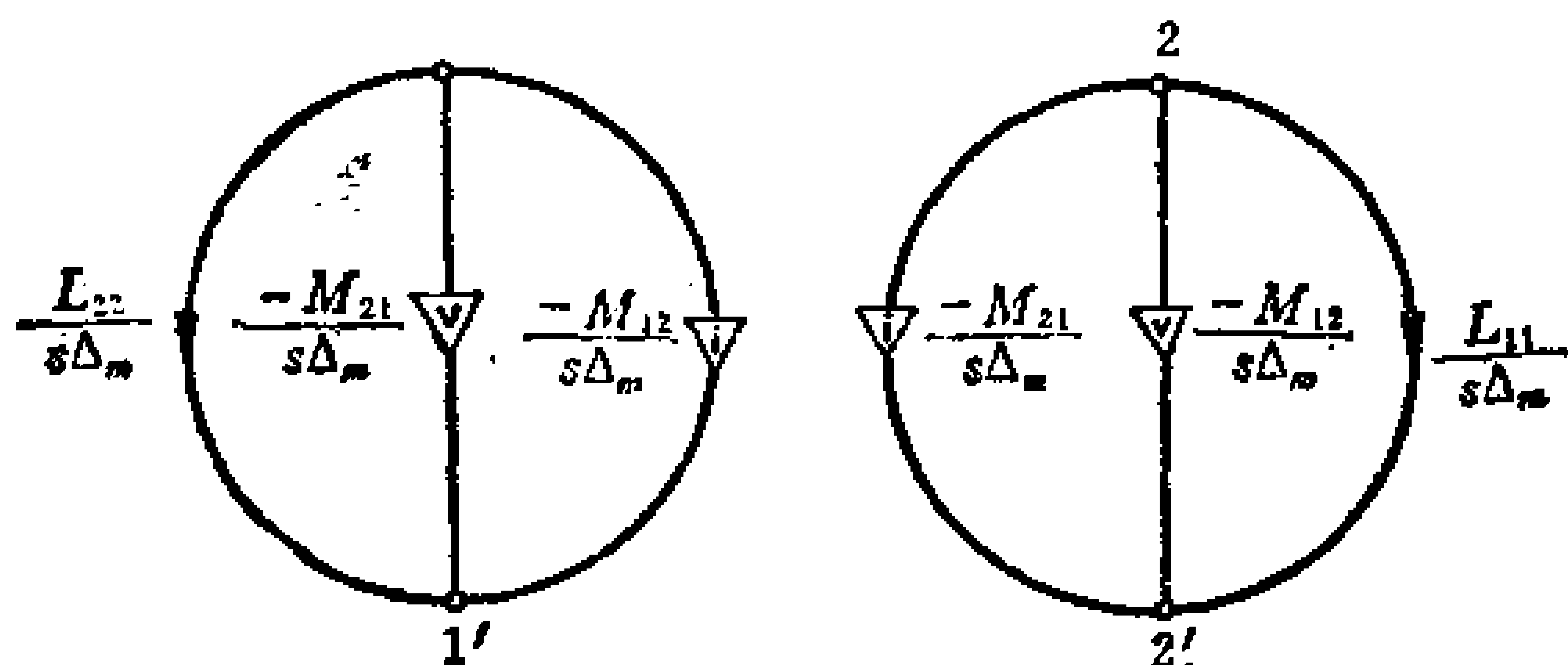


图8-1-11 一个变压器的拓扑表示

晶体管的等效电路，其拓扑表示如图8 1-13所示。另一个例子是图8-1-14中网络的线图，其拓扑表示如图 8-1-15 所 示，其中 g'_1

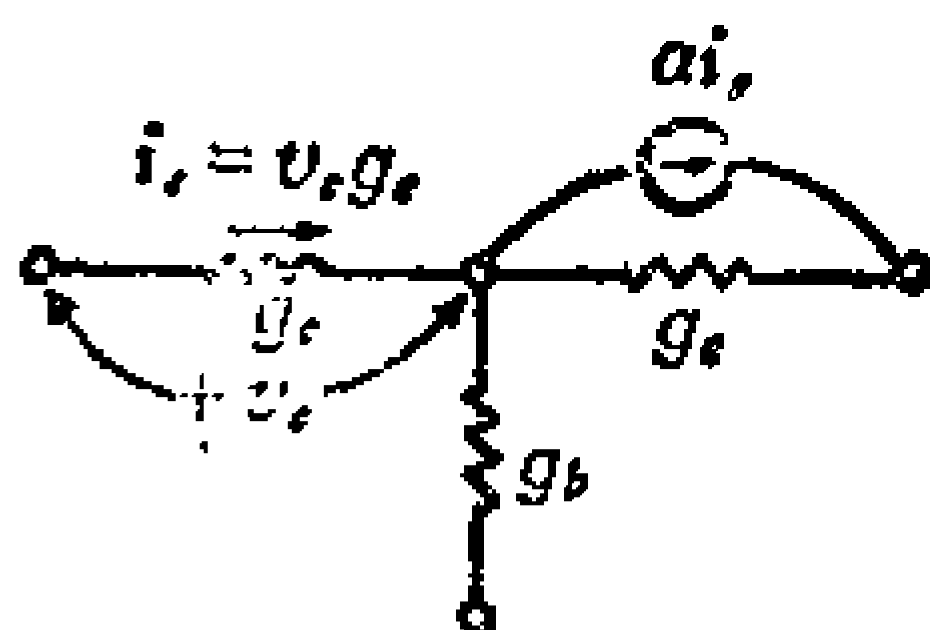


图8-1-12 一个晶体管的等效电路

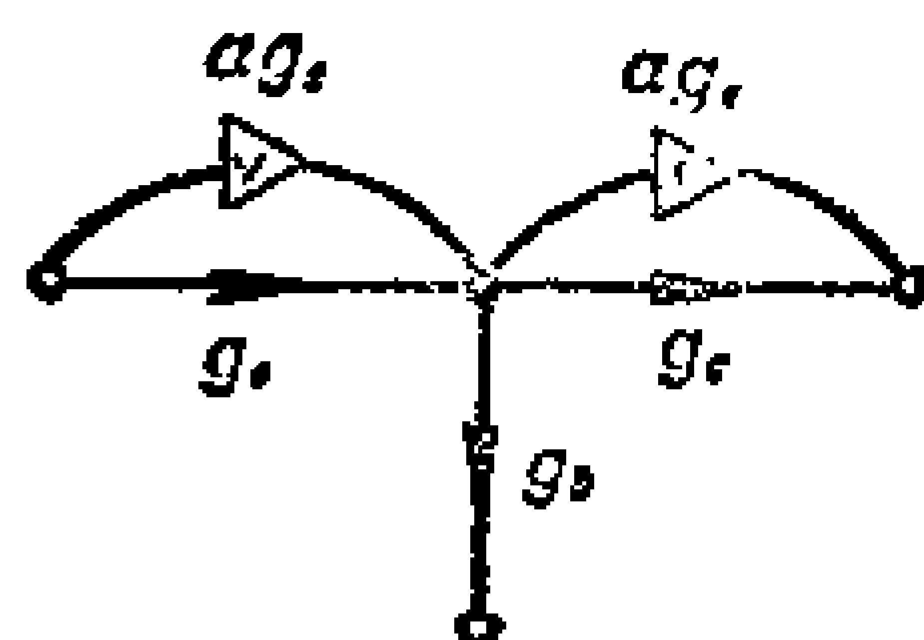


图8-1-13 一个晶体管的拓扑表示

$=ag_1$，$y_1=L_2/s\Delta_m$，$y_2=y_3=-M_{12}/s\Delta_m$　$y_4=L_1/s\Delta_m$。注意，即使 y_2，y_3 的导纳值是相同的，我们还是用 y_2和y_3 来区分不同的导纳。还要注意，对于图中所有的似无源元件，我们给出的方向是任意的。

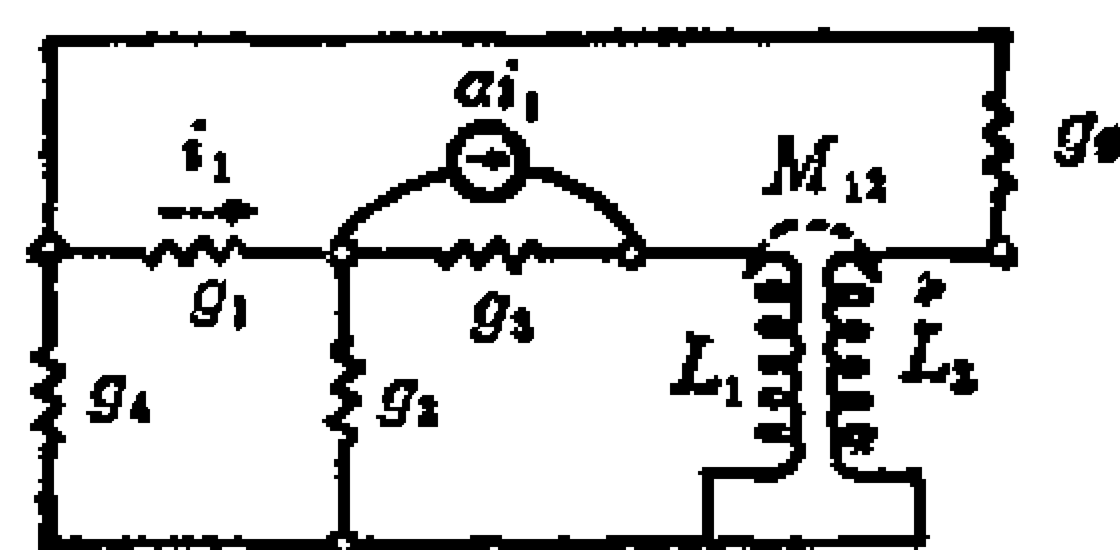


图8-1-14　一个含有晶体管的网络

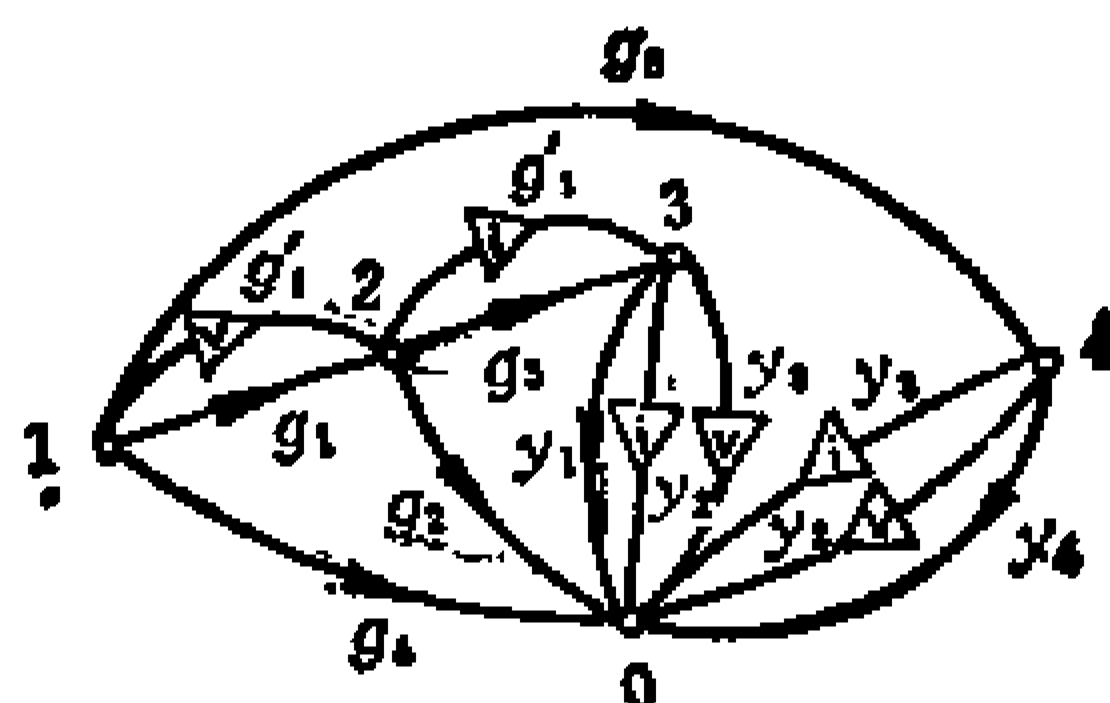


图8-1-15　与图8-1-14中网络对应的线图

考虑一个象图8-1-15那样对应一个网络的线图。每个导纳用两条边来表示，一条是电压边，另一条是电流边。由定义，对于一个似无源导纳，可以用一条边来同时表示电压边和电流边。因此，我们可以作出两个线图 G_v 和 G_i，使 G_v 由 G 中所有的电压边及所有的顶点构成，而 G_i 由 G 中所有的电流边及所有的顶点构成。注意，如果在 G_v 中有一个导纳 y，则在 G_i 中也有导纳 y，反之亦然。

定义8-1-2　设 G 是表示一个网络的线图，线图 G_v 由 G 中所有的电压边组成，称为电压图。线图 G_i 由 G 中所有的电流边组成，称为电流图。

由于在电压图 G_v 中，没有电流边，故每一条边的箭头不必再用符号 v 。这样，G_v 中的每一条边可以画得象似无源元件的边一样。同理，电流图 G_i 中每条边也可以不用画上符号 i 。例如，图8-1-15中线图的电压图和电流图，如图8-1-16所示。值得注意，当网络仅由似无源导纳组成时，其电压图和电流图是完全

相同的。

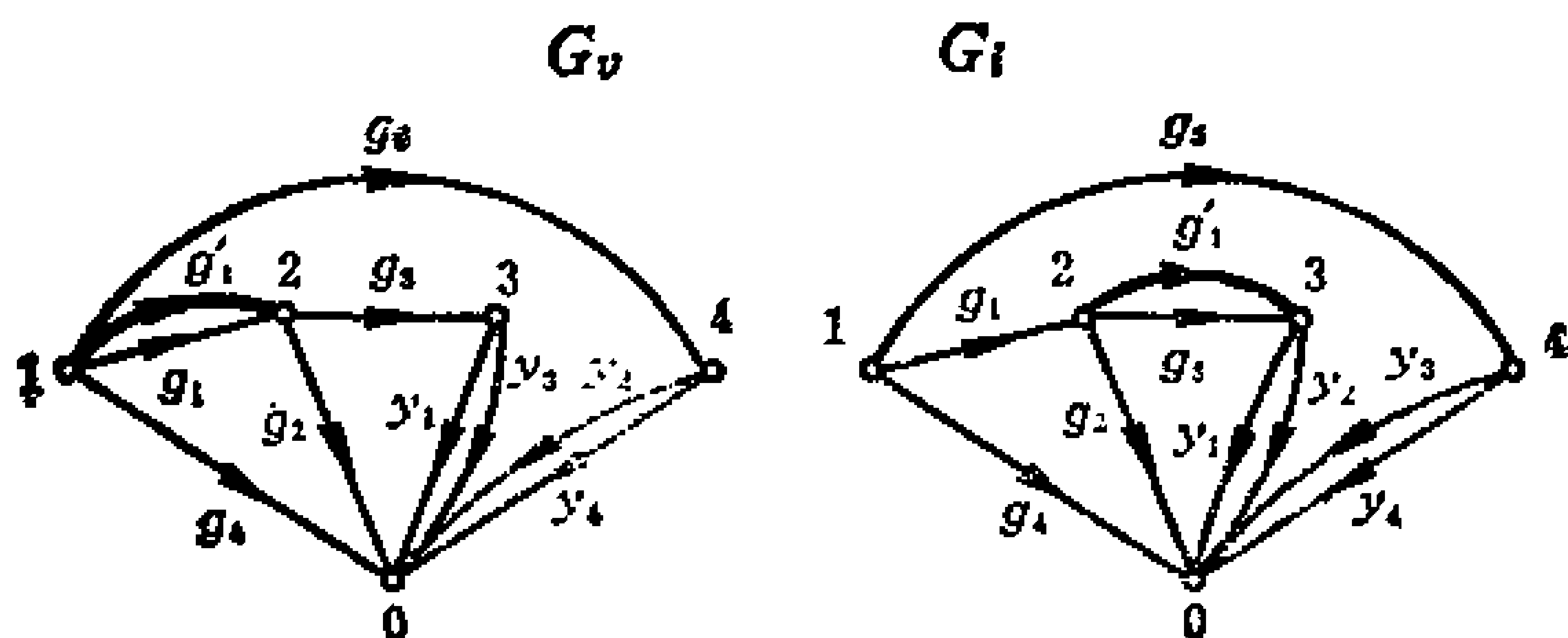


图8-1-16 图8-1-15中线图的对应电压图G_v及电流图G_i

在网络中的每一个导纳都满足式(8-1-1)，因此

$$\begin{aligned} y_1 v'_1 &= i'_1 \\ y_2 v'_2 &= i'_2 \\ &\cdots \\ y_e v'_e &= i'_e \end{aligned} \tag{8-1-12}$$

或者写成

$$Y V_e = I_e \tag{8-1-13}$$

其中

$$V_e = \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_e \end{bmatrix} \tag{8-1-14}$$

$$I_e = \begin{bmatrix} i'_1 \\ i'_2 \\ \vdots \\ i'_e \end{bmatrix} \tag{8-1-15}$$

$$Y=\begin{bmatrix} y_1 & & & 0 \\ & y_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & y_e \end{bmatrix} \tag{8-1-16}$$

因为克希霍夫电流定律是对于一个网络的电流约束而不是电压约束，所以式(7-1-2)中的关联矩阵（或割集矩阵）必为网络的电流图的关联矩阵。设 A_i 是电流图 G_i 的关联矩阵，则式(7-1-2)变成

$$A_i I_e = 0 \tag{8-1-17}$$

利用式(8-1-13)，得到

$$A_i Y V_e = 0 \tag{8-1-18}$$

因为式(7-3-8)所定义的节点变换是电压之间的关系而不是电流之间的关系，故式(7-3-8)中的关联矩阵（或割集矩阵）必须是电压图的关联矩阵（或割集矩阵）. 设 A_v 是电压图 G_v 的关联矩阵，则式(7-3-8)可写成

$$V_e = A_v^t V_n \tag{8-1-19}$$

其中 V_n 的每一元素是一个节点电压。利用式(8-1-18)，得

$$A_i Y A_v^t V_n = 0 \tag{8-1-20}$$

其中 $A_i Y A_v^t$ 称为有源网络的节点导纳矩阵。

运用比内-柯西定理，节点导纳矩阵的行列式可表示为

$$|A_i Y A_v^t| = \sum (A_i Y \text{的大子式}) \times (A_v^t \text{对应的大子式}) \tag{8-1-21}$$

由于 Y 是对角矩阵，故式(8-1-21)能写成

$$|A_i Y A_v^t| = \sum y_{k_1} y_{k_2} \cdots y_{k_m} |A_i(k_1 k_2 \cdots k_m)| \, |A_v^t(k_1 k_2 \cdots k_m)| \tag{8-1-22}$$

其中 $A_i(k_1 k_2 \cdots k_m)$ 是由 A_i 中列 k_1, k_2, …, k_m 组成的子矩阵，$A_v(k_1 k_2 \cdots k_m)$ 是由 A_v 中列 k_1, k_2, …, k_m 组成的子矩阵，这里 m 是 A_i(及 A_v)的行数，对于 n_v 个顶点的连通线图来讲，$m = n_v - 1$。

我们已经知道，$A_i(k_1k_2\cdots k_m)$是非奇异的，当且仅当与列$k_1,k_2,\cdots,k_m$对应的边是G_i的一个树（在分离线图的情况下必定是林）。同样，$A_v(k_1k_2\cdots k_m)$是非奇异的，当且仅当与列$k_1,k_2,\cdots,k_m$对应的边构成G_v的一个树。这样，要使$A_i(k_1k_2\cdots k_m)$和$A_v(k_1k_2\cdots k_m)$都是非奇异的，权为y_{k_1}，$y_{k_2},\cdots,y_{k_m}$的边在G_i和G_v中都必须是一个树。这样的边集合叫做完全树（或者叫公共树）。

定义8-1-3 完全树是一个边的集合，它既是电压图的树，又是电流图的树。

用这个定义，可将式(8-1-22)表示为

$$|A_iYA_v^t|=\sum_{(k)}\epsilon_k\times\text{（完全树树枝导纳乘积）}\qquad(8\text{-}1\text{-}23)$$

其中

$$\epsilon_k=|A_i(k_1k_2\cdots k_m)||A_v^t(k_1k_2\cdots k_m)|=\pm1\qquad(8\text{-}1\text{-}24)$$

在网络由似无源元件构成的情况下，我们可以看出，式(8-1-23)中的完全树变成了通常的树，而ϵ_k总是+1。然而，对于包含似有源元件的网络，我们可以看出，对于一个完全树，ϵ_k或为+1，或为-1。因此，对于每一个完全树，我们必须找出某种计算ϵ_k的方法。

8-2 符 号 置 换

我们现在会看到，完全树的符号置换就是式(8-1-24)中的符号ϵ_k。为了研究符号置换，我们要定义主点如下。

定义8-2-1 设G_t是连通有向图G的一个树。设u和v是G_t中边y的端点，如果在u和参考点之间的路径含有边y，则称顶点u为边y的主点。

因为一个树是连通图，且不含回路，所以在树中任两顶点之

间恰有一条路径.这样,如果从顶点 u 到参考点的路径包含边 y，那么，从顶点 v 到参考点的路径就不包含边 y。由此可知，一条边的两个端点中正好有一个是这条边的主点.例如,图8-2-1中 G_t 的每条边的主点如表8-2-1所示.注意，参考点不是任何一条边的主点。既然 G_t 是一个树，故任何一个顶点恰好是一条边的主点。

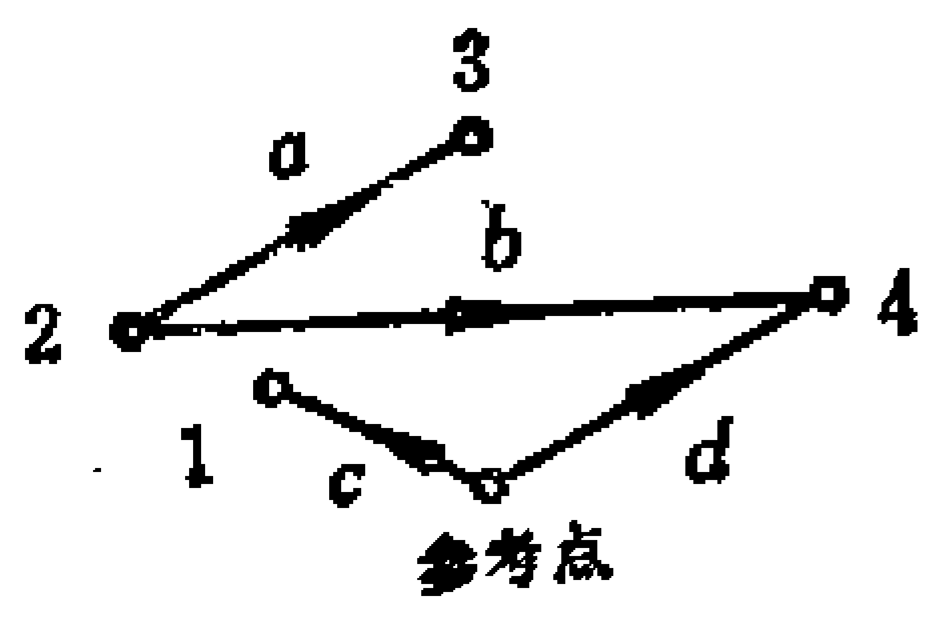


图8-2-1 树G_t

表8-2-1 主 点

边	主 点
a	3
b	2
c	1
d	4

假定 G_t 和 G_u 是两个线图，每个图代表一个树，且二者均由相同的导纳构成，如图8-2-2所示。那么，对于每条边来说，存在着两个主点，一个来自 G_t，另一个来自 G_u。例如，图8-2-2中的 G_t 和 G_u 的边的每一对主点如表8-2-2所示。

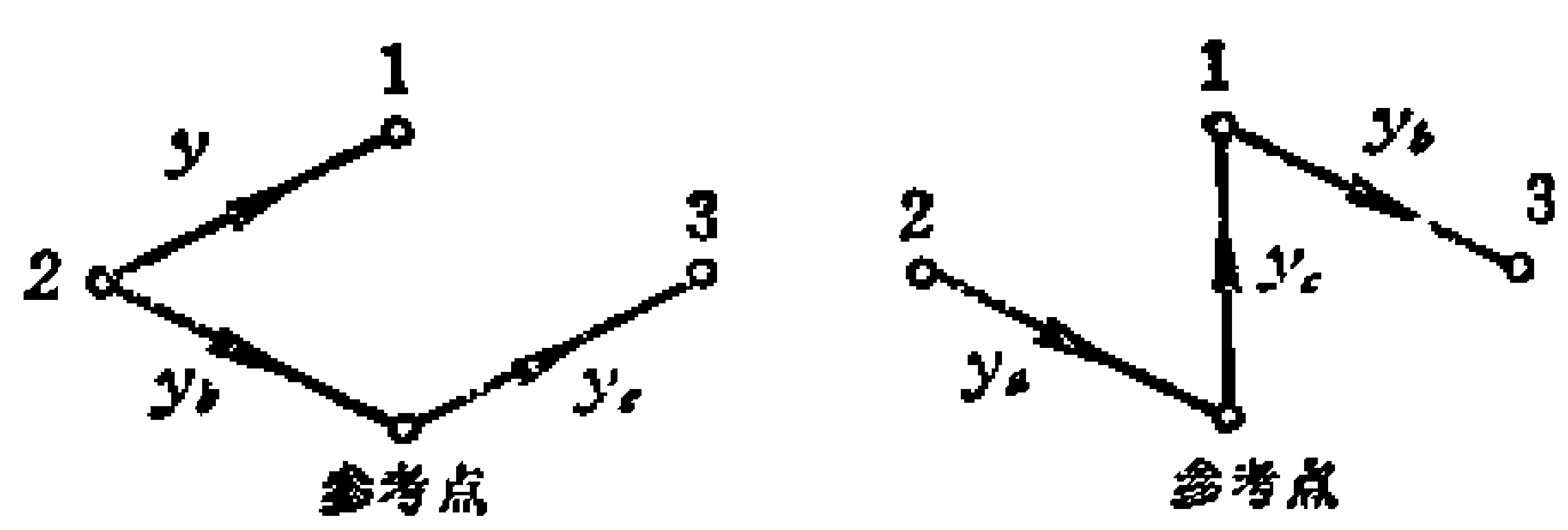


图8-2-2 线图G_t和G_u

现在. 我们可以对由相同导纳组成的两个树 G_t 和 G_u 相对应的符号置换下定义。

表8-2-2　　主　点　对

边	主	点
	G_t	G_u
y_a	1	2
y_b	2	3
y_c	3	1

定义8-2-2　设 G_1 和 G_2 是两个连通有向图，它们由相同的边和相同的顶点组成，且都不含回路。则 G_1 和 G_2 的符号置换是具有下列特征的两行数组：

1.对 $p=1, 2$，行 p 表示 G_p。

2.每一列表示一个主点。

3.对 $p=1, 2$，元素 (p, q) 是：

y——如果顶点 q 是 y 的主点，且在 G_p 中 y 的方向是离开 q 的。

y^-——如果顶点 q 是 y 的主点，且在 G_p 中 y 的方向是指向 q 的。

例如，图8-2-2中对应 G_t 和 G_u 的边集合的符号置换(SP)如下：

$$\begin{matrix} & & 1 & 2 & 3 \\ SP= & \begin{matrix} G_t \\ G_u \end{matrix} & \Big(\begin{matrix} y_a^- \\ y_c^- \end{matrix} & \begin{matrix} y_b \\ y_a \end{matrix} & \begin{matrix} y_c^- \\ y_b^- \end{matrix} \Big) \end{matrix}$$

定义8-2-3　如果以下数量之和是偶数，我们就说符号置换是偶数，否则，我们说它是奇数：

1.符号置换中负上标的个数。

2.把第二行重排使其与第一行相同所需的对换次数。

根据这个规则，上例中的符号置换是偶数。

定义8-2-4 如果符号置换是偶数，则符号置换的值是＋1，否则是－1。

例如上例中的符号置换是偶数，所以此符号置换的值（记为$V[SP]$）是

$$V\left[\begin{pmatrix} y_a^- & y_b & y_c^- \\ y_c^- & y_a & y_b^- \end{pmatrix}\right]=1$$

8-3 主 树

为了说明一个完全树的符号置换的值就是式（8-1-23）中的e_k，我们先来研究称为主树的一对特殊树的符号置换，然后，我们再说明，当一个完全树变换成一对主树时，符号置换的值是不变的。

图8-3-1中所示的树的结构称为主树*。换句话说，如果一个树的所有的边y_1，y_2，…，y_m都与参考点相连，而且每条边的方向不加限制，这样的树叫做主树。

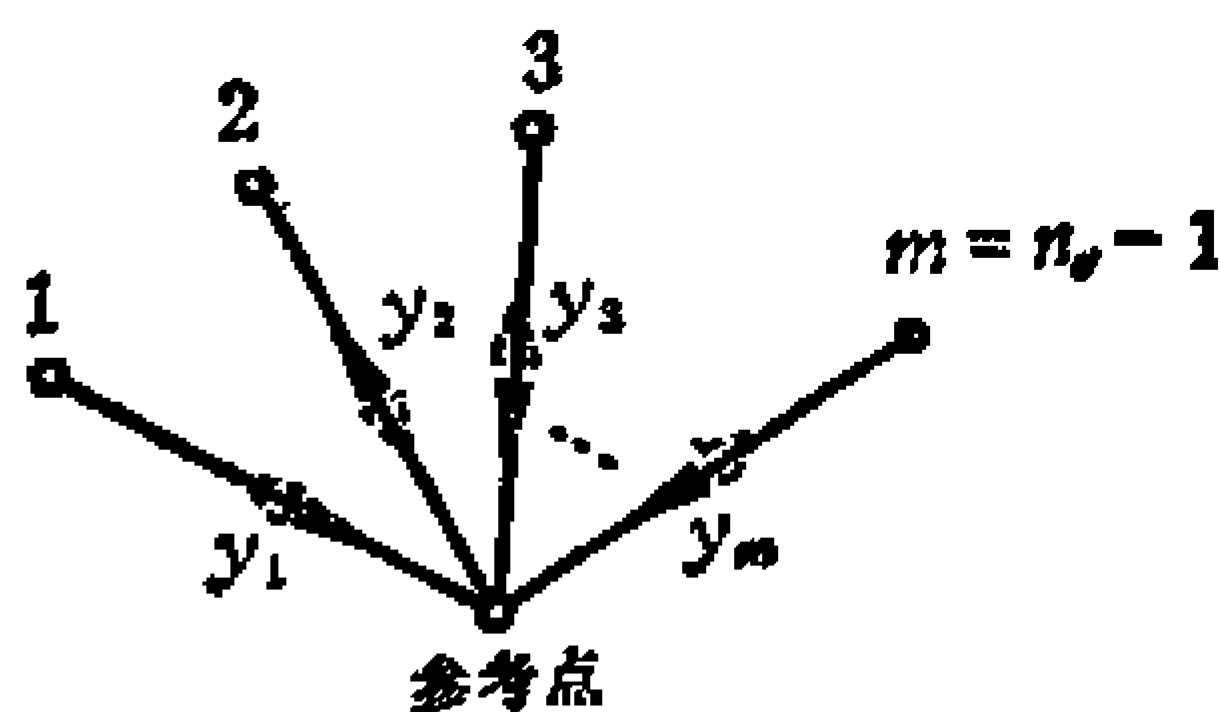


图8-3-1 一个主树

考虑一个主树的关联矩阵A_p，我们知道，A_p是n_v-1阶，且是非奇异的，这里n_v是树的顶点数。因为每一条边的两个端点之中，有一个是参考点，故A_p的每一列只有一个非零元，或为＋1，或为－1。并且，由一条边的主点的定义，我们可以说，A_p中对应于边y的非零元的位置，是在代表y的列与代表y的主点的行的交叉处。最

* 有些图论著作中把主树称为星树(*star tree*)．——译注

后，因为 A_p 是一个关联矩阵，由此可知，A_p的行列式不是 $+1$，就是 -1 .图8-3-1中主树的关联矩阵A_p如下：

$$A_p=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \\ m \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_m \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right] \end{array} \tag{8-3-1}$$

交换这个矩阵中的两行，A_p 的行列式就改变符号．假定边 y_k 的主点是 v，边 y_p 的主点是 u，则在 A_p 的(v, k)处有 ± 1，(u, p)处有 ± 1．交换行 v 和行 u，则(v, k)处的± 1 变到(u, k)处，而(u, p)处的 ± 1 变到(v, p)处．这意味着将边 y_k 的主点变成顶点 u，而将边 y_p 的主点变成顶点 v．因此，这一变换等价于边 y_k 和 y_p 位置的交换．例如，交换上述矩阵的第一行和第二行，得到以下矩阵：

$$A'_p=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \\ m \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_m \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right] \end{array} \tag{8-3-2}$$

这个新矩阵 A'_p 是把图8-3-1的主树中 y_1 和 y_2 位置交换后得到的关联矩阵．因此，在一个主树中，边的位置交换次数N，使 A_p 的行列式受$(-1)^N$ 的影响．

将 A_p 的一列乘以 -1，等价于改变对应于此列的边的方向，例如，到 y_2 乘以 -1 得

$$A_p'' = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \\ m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_m \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right] \end{array} \tag{8-3-3}$$

这个新矩阵 A_p'' 是在图8-3-1中正好把 y_2 的方向颠倒后得到的主树的关联矩阵。

假定在一个主树中有M条边，其方向是离开参考节点的。我们将对应的列乘以－1，使这些边的方向都改变，则主树的关联矩阵 A_p 的所有非零元素都变成正值了。设这样所得的矩阵是 A_p'''，那么A_p 的行列式等于 A_p''' 的行列式乘上$(-1)^M$。例如，考虑图8-3-2所示主树的关联矩阵 A_p：

$$A_p = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \end{array}$$

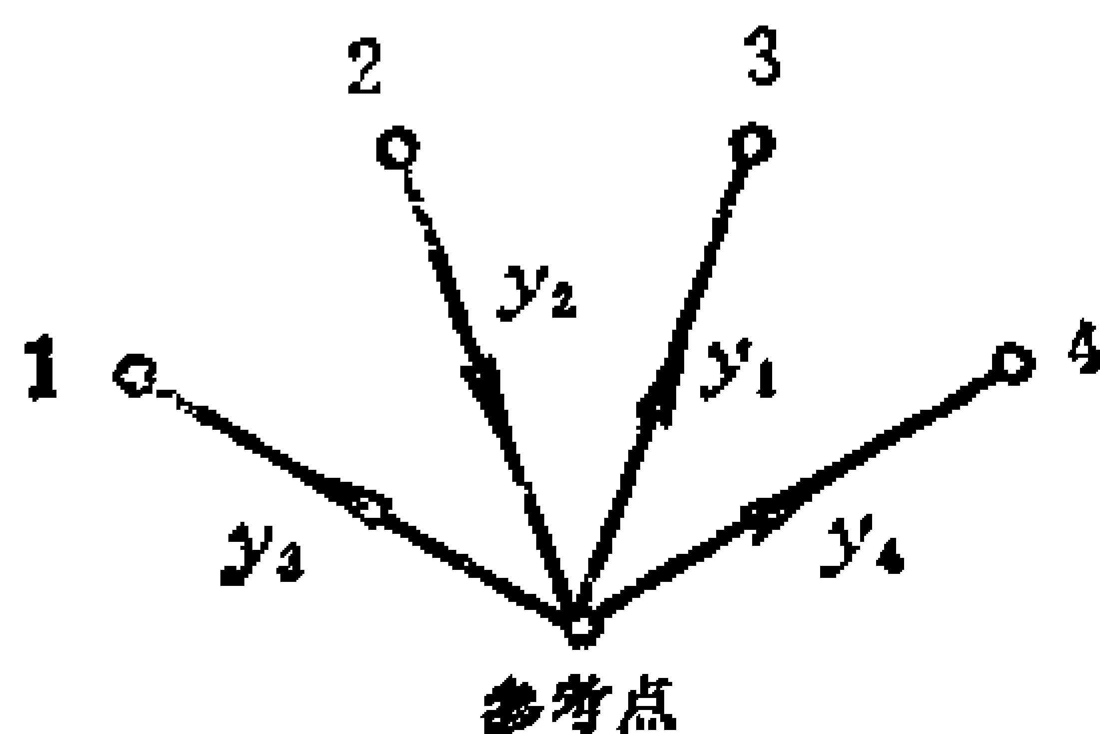


图8-3-2　一个主树

将列y_1, y_3, y_4乘上-1，这相当于颠倒边y_1, y_3和y_4的方向，我们得到一个新的关联矩阵A_p'''：

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

因此

$$|A_p| = (-1)^3 |A_p'''|$$

考虑图8-3-3所示的两个主树t_i和t_v，其中t_i和t_v由相同导纳（边权）组成。设A_{t_i}和A_{t_v}分别为t_i和t_v的关联矩阵，为使每一个非零元素都为正，用-1去乘A_{t_i}和A_{t_v}的列，其次数分

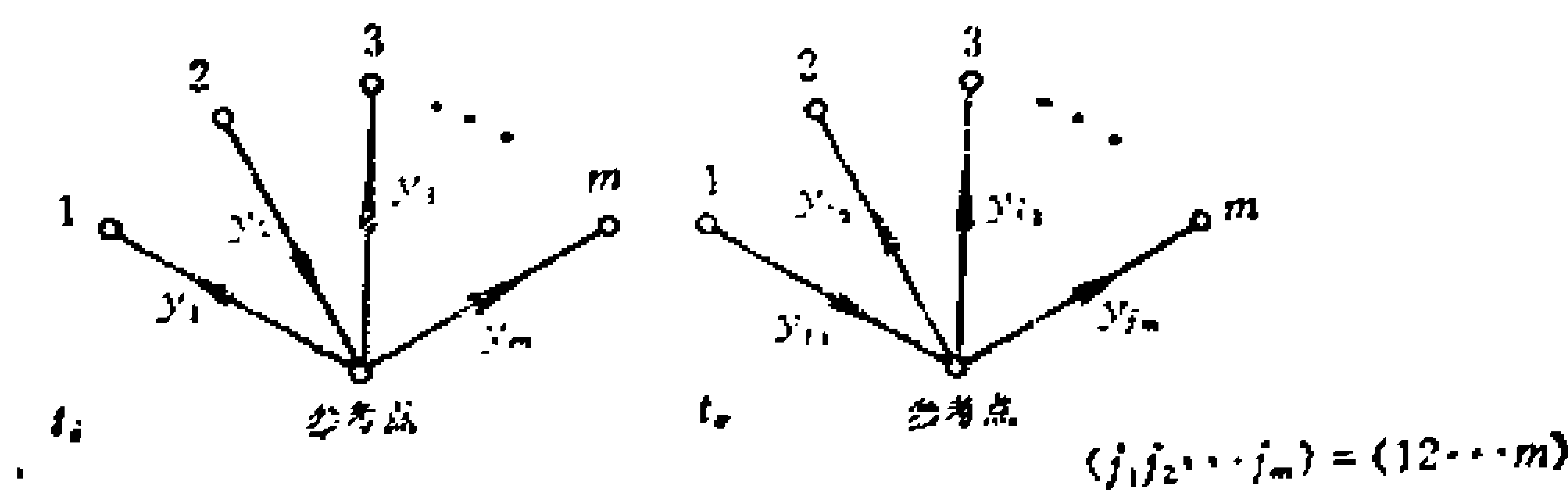


图8-3-3　一对主树

别设为M_i和M_v，而A''_{t_i}和A''_{t_v}是所得的关联矩阵，则

$$|A_{t_i}||A_{t_v}| = (-1)^{M_i+M_v}|A''_{t_i}||A''_{t_v}| \tag{8-3-4}$$

要使t_v中每一条边的位置与树t_i中对应边（即具有相同权的边）的位置相同，t_v中边的位置需要改变的次数为N，则A''_{t_v}的行列式等于$(-1)^N$乘A''_{t_i}的行列式，或

$$|A''_{t_i}| = (-1)^N |A''_{t_v}| \tag{8-3-5}$$

于是，连同式(8-3-4)，得

$$|A_{t_i}||A_{t_v}| = (-1)^{M_i+M_v+N}|A''_{t_v}|^2 \tag{8-3-6}$$

因为 A''_{t_v}是一个有向线图的关联矩阵，并且是非奇异的，这样，A''_{t_v}的行列式不是+1，就是-1。故式(8-3-6)变成：

$$|A_{t_i}||A_{t_v}|=(-1)^{Mi+Mv+N} \qquad (8\text{-}3\text{-}7)$$

能够看出，M_i+M_v 等于 t_i 和 t_v 的符号置换中的负上标数目，而要使符号置换的两行变成相同时，其中一行变换的次数等于N。因此$(-1)^{Mi+Mv+N}$ 等于 t_i 和 t_v 的符号置换值，即

$$(-1)^{Mi+Mv+N}=V[t_i \text{ 和 } t_v \text{ 的 } SP] \qquad (8\text{-}3\text{-}8)$$

这里的 t_i 和 t_v 是主树。

考虑一个与完全树对应的导纳集合$(y_1,y_2,\cdots,y_m)$，也就是说，在电流图中边 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 构成一个树 t_i，同时，它们也构成电压图 G_v 中一个树 t_v。设 $A_i(12\cdots m)$和 $A_v(12\cdots m)$ 分别为 t_i 和 t_v 的关联矩阵，因此 $A_i(12\cdots m)$是电流图 G_i 的关联矩阵 A_i的子矩阵，$A_v(12\cdots m)$是电压图 G_v 的关联矩阵 A_v 的子矩阵。我们将要说明即使 t_i 和 t_v 不是主树，$A_i(12\cdots m)\cdot A_v(12\cdots m)$ 的行列式也等于 t_i 和t_v 的符号置换值。为了说明这一事实，我们首先说明，可以对一个树的关联矩阵 A_t 作初等运算，来把任何一个树变成一个主树，而不影响其行列式y。

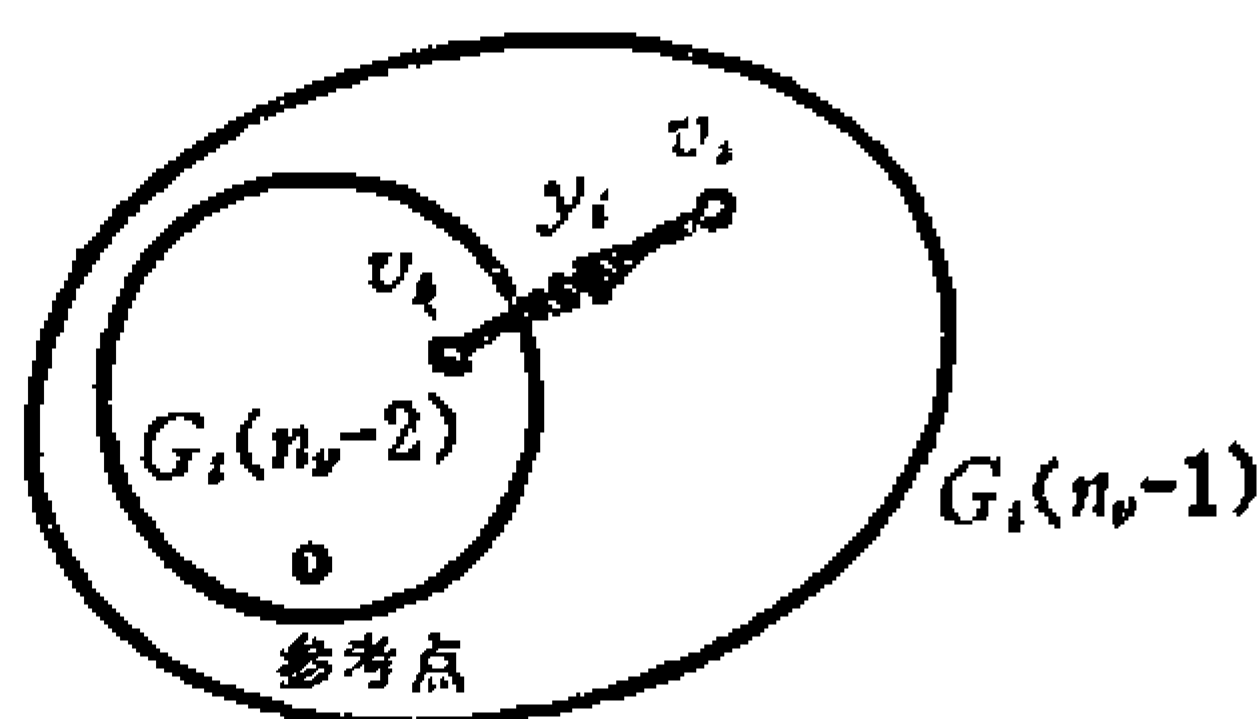


图8-3-4　树$G_t(n_v-1)$

设 $G_t(n_v-1)$是代表一个树的线图，它包含 n_v 个顶点，这样，$G_t(n_v-1)$包含 n_v-1 条边且无回路。因为 $G_t(n_v-1)$是树，其中至少有两个顶点度数为1，这已在前面学过。设这两个顶点中不是参考点的一个是 v_i，而边 y_i 与顶点 v_i 相连。注意，因为 v_i 的度数为1，这样在 $G_t(n_v-1)$中只有一条边 y_i 与 v_i 相连。

设 v_k 是 y_i 的另一个端点，如图8-3-4所示。考虑 $G_t(n_v-1)$

的关联矩阵 A_t，因为 y_i 是连接顶点 v_i 的唯一的一条边，并且 v_i 不是参考点，所以 A_t 中与 v_i 对应的行只在与 y_i 对应的列处有一个非零元素，如下所示：

$$A_t=\begin{array}{c}\\ 1\\ 2\\ \vdots\\ v_i\\ \\ \vdots\\ \\ v_k\\ \\ \vdots\\ v_m\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc} y_1 & y_2 & \cdots & y_i & & \cdots & & y_m\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccccccc} & & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \pm 1 & 0 & \cdots & & 0\\ & & & 0 & & & & \\ & & & \vdots & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & \mp 1 & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & \vdots & & & & \\ & & & 0 & & & & \end{array}\right]\end{array} \tag{8-3-9}$$

只要 v_k 不是参考点，在 (v_k,y_i) 处的元素就是 ∓ 1，因为 y_i 是连接顶点 v_i 和 v_k 的。

$$A'_t=\begin{array}{c}\\ 1\\ 2\\ \\ \vdots\\ v_i\\ \\ \vdots\\ \\ v_k\\ \\ \vdots\\ v_m\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc} y_1 & y_2 & \cdots & y_i & & \cdots & & y_m\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccccccc} & & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & \vdots & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \pm 1 & 0 & \cdots & & 0\\ & & & 0 & & & & \\ & & & \vdots & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & \vdots & & & & \\ & & & 0 & & & & \end{array}\right]\end{array} \tag{8-3-10}$$

把行 v_i 加到行 v_k 上，就可以消去 (v_k, y_i) 处的 ∓ 1。注意，在这一运算下，A_t 的行列式没有改变。另一方面，这样得到的矩阵 A'_t 是一个树的关联矩阵，这个树除了 y_i 是连接顶点 v_i 和参考点（而不是顶点 v_k）之间的边外，其余与 $G_t(n_v-1)$ 相同，如图8-3-5所示。再注意，在 $G_t(n_v-1)$ 中顶点 v_i 是 y_i 的主点。如果顶点 v_k 是参考点，就不必进行如上的运算了。

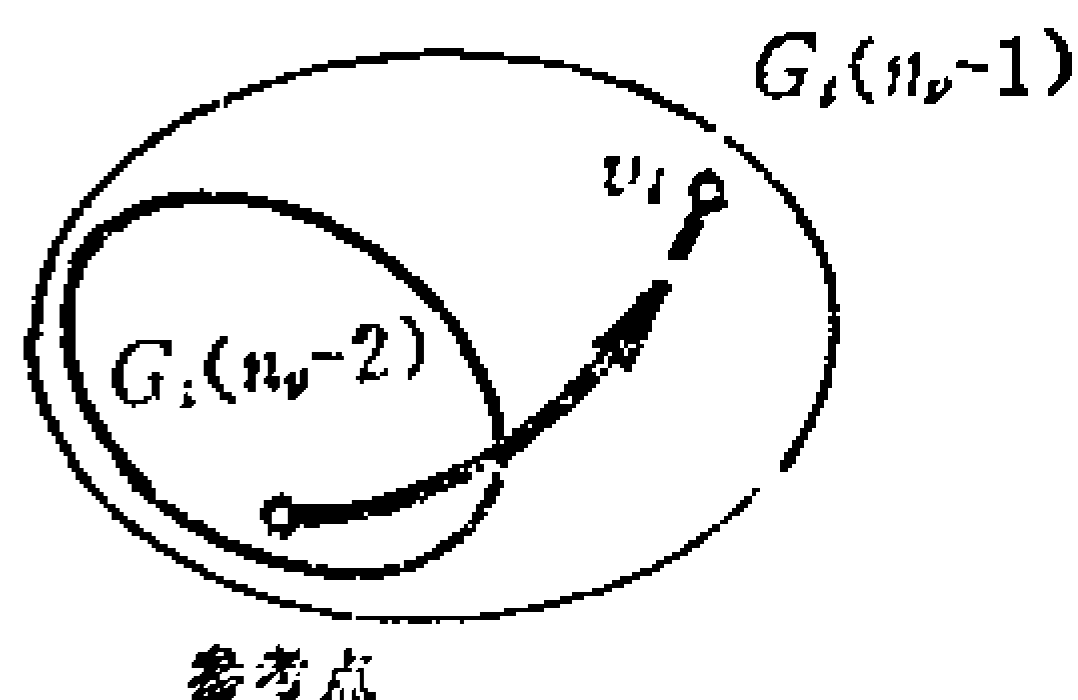


图8-3-5 $G_t(n_v-1)$ 修改后的树

从 $G_t(n_v-1)$ 中取出边 y_i 和顶点 v_i 得到的子图 $G_t(n_v-2)$ 有 n_v-1 个顶点和 n_v-2 条边，且没有回路。因此，$G_t(n_v-2)$ 能看成一个线图的树。这样，在 $G_t \times (n_v-2)$ 中，至少存在两个度数为 1 的顶点，设 v_j 是这两个顶点之一，且不是参考点。又设边 y_j 是连接到顶点 v_j 的一条边，假定 y_j 是连接顶点 v_m 和 v_j 之间的边。注意顶点 v_j 是边 y_j 的主点。如果 v_m 是参考点，则 y_j 列只有一个非零元素。如果 v_m 不是参考点，那么用上述的运算能把边 y_j 移到参考点，而不改变这个树的关联矩阵的行列式。

连续进行这样的过程，我们可以把一个树变成一个主树，而不改变这个树的关联矩阵的行列式。并且，树中的每一条边被移到这条边的主点和参考点之间。假定，把一个给定的树经由这一过程得到的主树叫做给定树的对应主树，那么我们可以看出，一个树的关联矩阵的行列式等于对应主树关联矩阵的行列式。

定理8-3-1 设 $y_{k_1}, y_{k_2}, \cdots, y_{k_m}$ 是一个完全树的边，其中 $t_i=(y_{k_1}y_{k_2}\cdots y_{k_m})$ 是电流图 G_i 的一个树，$t_v=(y_{k_1}y_{k_2}\cdots y_{k_m})$ 是电压图 G_i 的一个树。又设 $A_i(k_1k_2\cdots k_m)$ 是 t_i 的关联矩阵，$A_v(k_1k_2\cdots k_m)$ 是 t_v 的关联矩阵，两者的参考点是相同的。那么

$$e_k = |A_i(k_1k_2\cdots k_m)||A_v^t(k_1k_2\cdots k_m)| = V[t_i\text{和}t_v\text{的}SP]$$
(8-3-11)

因为我们能直接从 t_i 和 t_v 得到每一条边的主点，所以我们可以直接从 t_i 和 t_v 的符号置换求出 e_k，而不必把它们变成主树.

显然，如果一个完全树仅包含似无源元件，那么 $A_i(k_1k_2\cdots k_m)$ 和 $A_v(k_1k_2\cdots k_m)$是相同的。

规则　如果一个完全树仅包含似无源元件，那么此完全树的 e_k 是 + 1。

例8-3-1　考虑图8-3-6所示的线图G，我们可以得到电流图

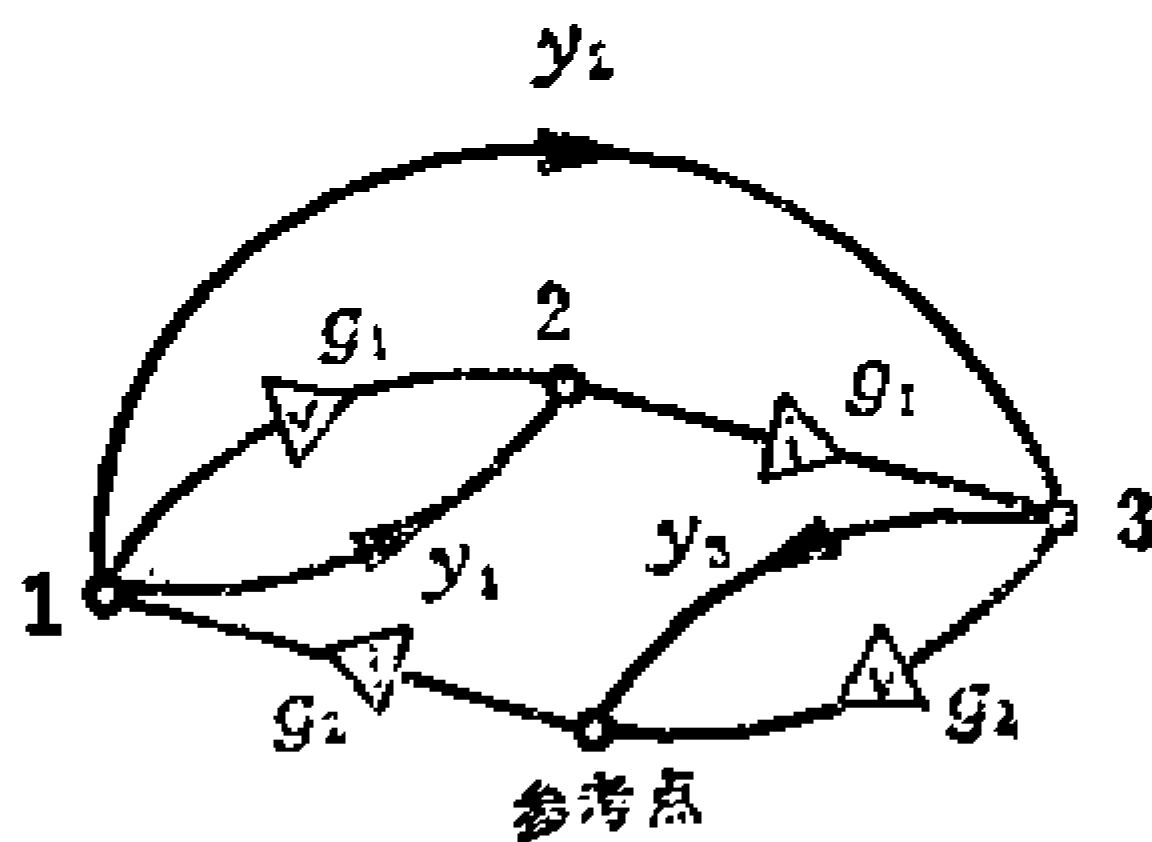
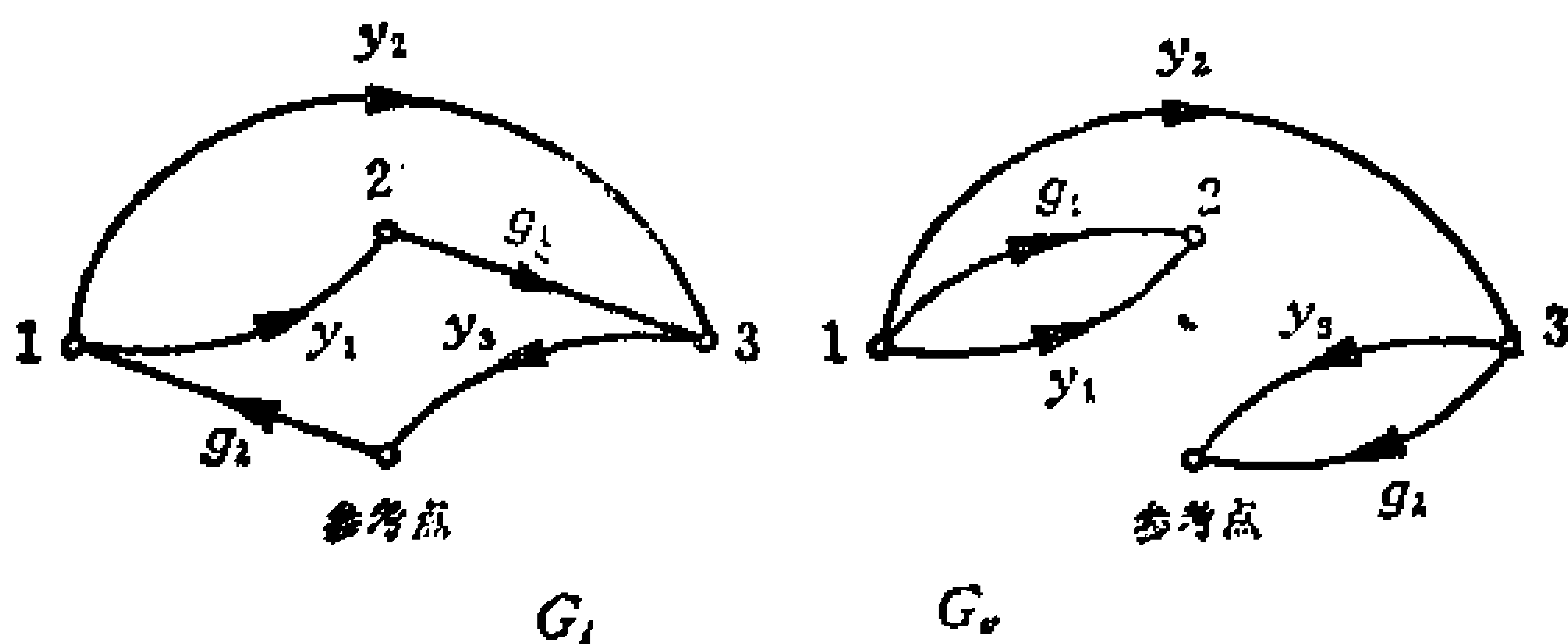


图8-3-6　线图G



G_i　　　　G_v

图8-3-7　电流图和电压图

G_i 和电压图 G_v，如图8-3-7所示，从这些图能求出所有的完全树和每一个完全树的符号，如表8-3-1所示。因此

$$|A_i Y (A_v)^t| = y_1 y_2 y_3 - y_1 y_2 g_2 - y_2 y_3 g_1 + y_2 g_1 g_2$$

表8-3-1　　　完全树及其符号

G_i的树	G_i的树是否也是G_v树的？	符号	$V[SP]$
$y_1 y_2 y_3$	是	+1	仅有似无源元件
$y_1 y_2 g_2$	是	-1	$V\begin{bmatrix} t_i \\ t_v \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \overset{1}{g_2^-} & \overset{2}{y_1^-} & \overset{3}{y_2^-} \\ y_2 & y_1^- & g_2 \end{pmatrix} = -1$
$y_1 g_1 y_3$	否		
$y_1 g_1 g_2$	否		
$y_2 y_3 g_1$	是	-1	$V\begin{bmatrix} t_i \\ t_v \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \overset{1}{y_2} & \overset{2}{g_1} & \overset{3}{y_3} \\ y_2 & g_1^- & y_3 \end{pmatrix} = -1$
$y_2 y_3 g_2$	否		
$y_2 g_1 g_2$	是	+1	$V\begin{bmatrix} t_i \\ t_v \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \overset{1}{g_2^-} & \overset{2}{g_1} & \overset{3}{y_2^-} \\ y_2 & g_1^- & g_2 \end{pmatrix} = 1$
$y_3 g_1 g_2$	否		

8-4　开路策动点函数

在前面章节里，我们已经研究过节点导纳矩阵的行列式的拓扑公式，要求出开路策动点导纳函数的拓扑公式，只要研究节点导纳矩阵的代数余子式 Δ_{ii} 即可。

图8-4-1所示的网络是由一个给定网络N和一个连接在N的输入点i和o之间的导纳y组成的。设Δ^1是这个网络的节点导纳矩阵的行列式。

图8-4-1 网络N和y

由式(8-1-23)，Δ'可以写成

$$\Delta' = \sum_{(j)} \varepsilon_j \times \text{(网络}N\text{连同}y\text{的完全树}t_j\text{的树枝导纳乘积)} \qquad (8\text{-}4\text{-}1)$$

这些完全树中，有一些包含y，一些不包含y。不包含y的完全树就是给定的网络N的完全树。因此，式(8-4-1)能表示成

$$\Delta' = \sum_{(j)} \varepsilon_j \times (N\text{的完全树}t_j\text{树枝导纳乘积}) + \sum_{(i)} \varepsilon_i \times (\text{含}y\text{的完全树}t_i\text{树枝导纳乘积}) \qquad (8\text{-}4\text{-}2)$$

也就是：

$$\Delta' = V + yW_{(i,o;\, io)} \qquad (8\text{-}4\text{-}3)$$

其中V和$W_{(i,o;\, i,o)}$定义如下。

定义8-4-1

$$V = \sum_{(j)} \varepsilon_j \times \text{(给定网络}N\text{的完全树}t_j\text{树枝导纳乘积)} \qquad (8\text{-}4\text{-}4)$$

而

$$W_{(i,o;\, i,o)} = \frac{1}{y} \sum_{(r)} \varepsilon_r \times (\text{完全树}t_r(y)\text{树枝导纳乘积}) \qquad (8\text{-}4\text{-}5)$$

其中$t_r(y)$是包含y的完全树。

现在，我们可以一般地来定义符号$W_{(j,k;\, i,o)}$。

定义8-4-2

$$W_{(j,k;\ i,o)}=\frac{1}{y}\sum_{(k)}\varepsilon_k\times\ （完全树\ t_k(y)\ 树枝导纳乘积）$$

（8-4-6）

其中$t_k(y)$是包含y的完全树。y的位置由$W_{(j,k;\ i,o)}$的下标来表示，也就是说，y的电流边是从j到k，y的电压边是从i到o。

因为图8-4-1中的网络没有外加电源，故我们有

$$A_iY(A_v)^tV_n=0 \tag{8-4-7}$$

为了得到非平凡解，

$$|A_iY(A_v)^t|=\Delta'=0 \tag{8-4-8}$$

因此，据式(8-4-3)，

$$V+y!V_{(i,o;\ i,o)}=0 \tag{8-4-9}$$

或

$$-y=\frac{V}{W_{(i,o;\ i,o)}} \tag{8-4-10}$$

$-y$的拓扑表示如图8-4-2所示。由定义可见：

$$-y=\frac{J_i}{v_i} \tag{8-4-11}$$

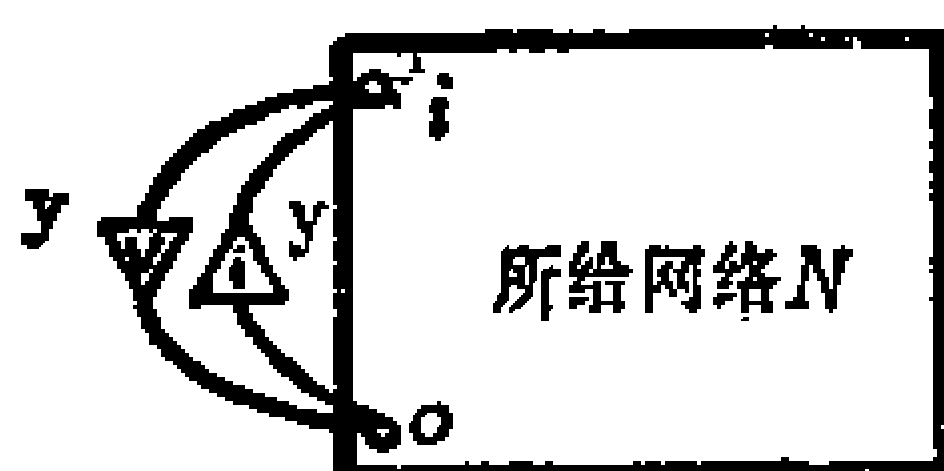


图8-4-2　网络N和y

其中J_i是从参考点o流入顶点i的电流，v_i是从顶点i到参考点o的电压。所以$-y$是网络N的顶点i和o之间的开路策动点导纳$Y_{oi,o}$。这样，式(8-4-10)的右端就给出了顶点i和o之间的策动点导纳函数的拓扑公式：

$$Y_{oi,o}=\frac{V}{W_{(i,o;\ i,o)}} \tag{8-4-12}$$

从式(8-4-6)我们可以看出，$W_{(i,o;\ i,o)}$能由以下步骤得到：

1. 将 y 接在顶点 i 和 o 之间。

2. 找出所有包含 y 的完全树。

3. 确定每一个包含 y 的完全树的符号。

4. 将这些完全树导纳乘积的每一项中的 y 去掉，带上由第 3 步求得的符号，再求代数和，所得的结果即为 $W_{(i+o;\ i+o)}$。

例如，在图8-3-6的 G 中，选取 3 为参考点，按以下步骤求出 $W_{(1+3;\ 1+3)}$：

1. 将 y 接到 G 的顶点 1 和 3 上，如图8-4-3所示。

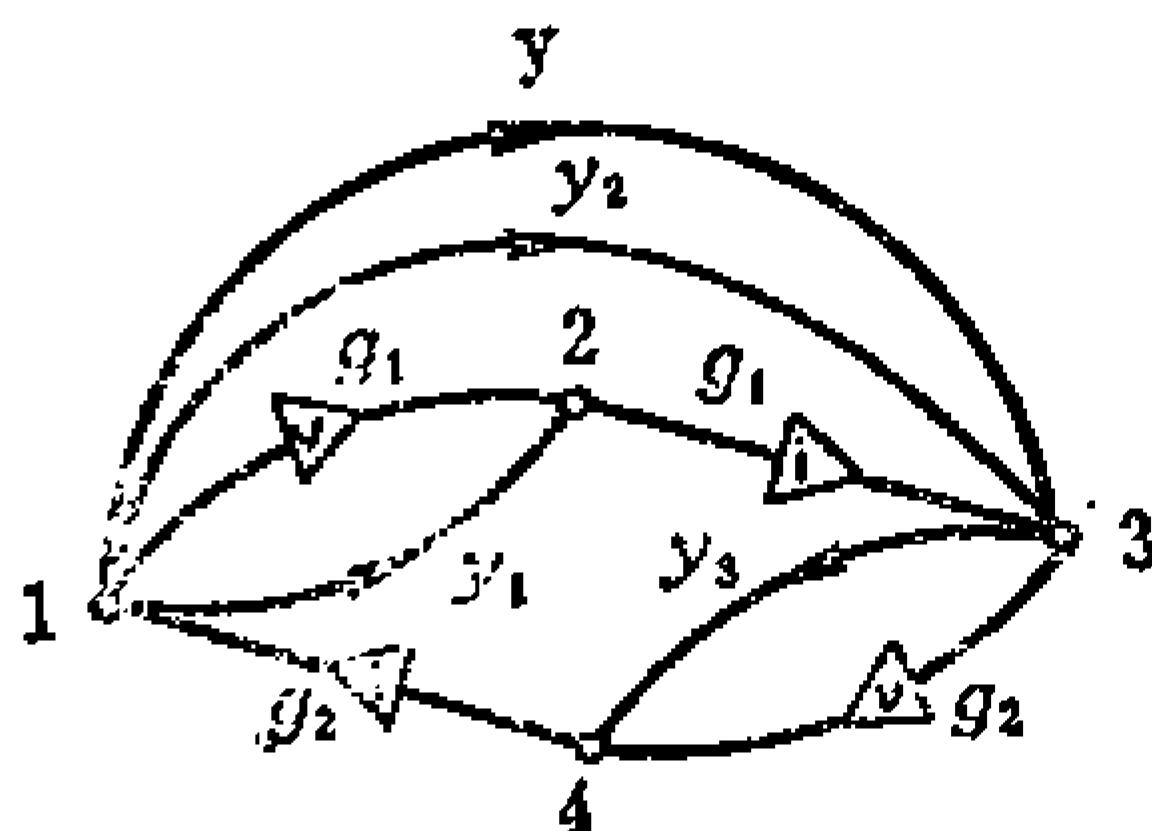


图8-4-3　线图 G 连同顶点 1，3 之间的 y

2. 求出所得的图的电流图 G'_i 和电压图 G'_v，如图 8-4-4所示。

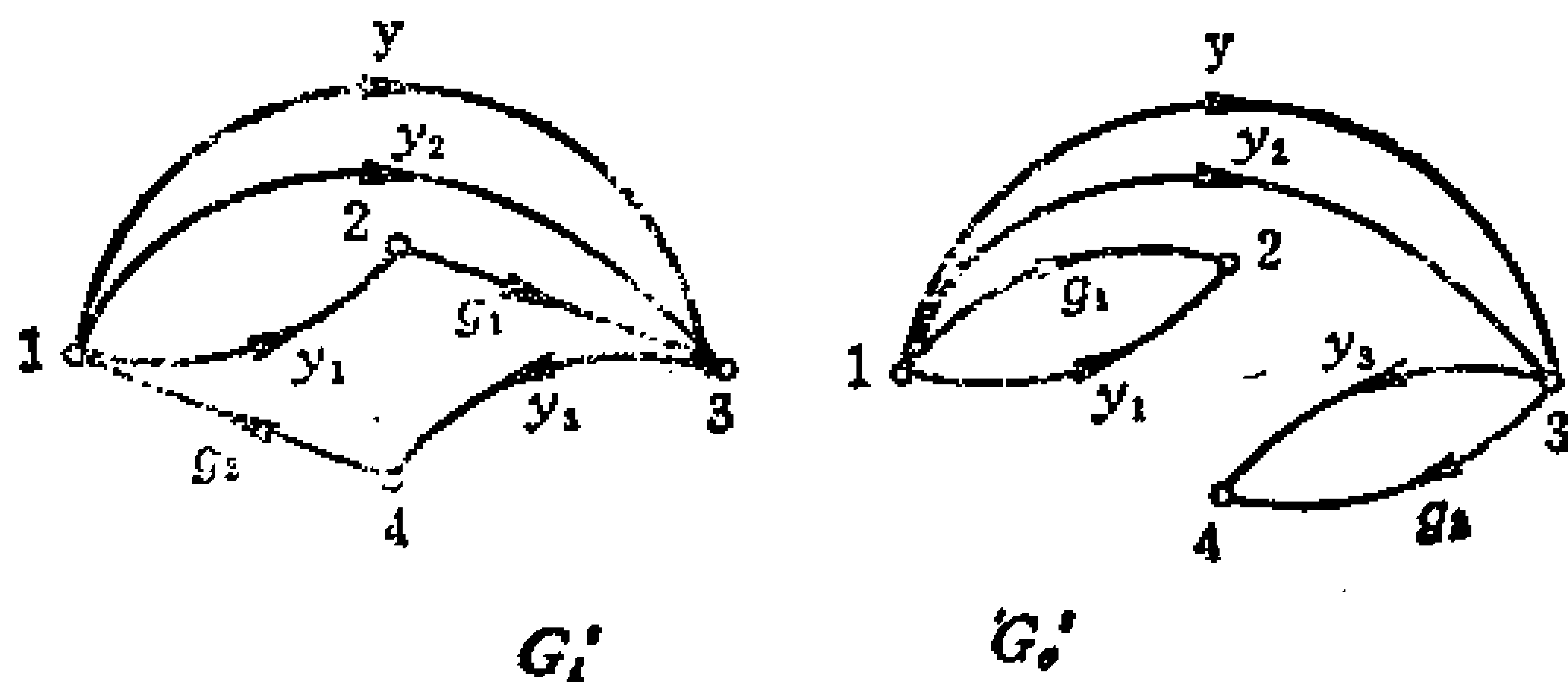


图8-4-4　图8-4-3中线图的电流图和电压图

3. 找出电流图 G'_i 中所有包含 y 的树：

$$yy_1y_3,\quad yy_1g_2,\quad yy_3g_1,\quad yg_1g_2$$

4. 从第 3 步得到的树中选出也属于电压图 G'_v 的树：

$$yy_1y_3,\quad yy_1g_2,\quad yy_3g_1,\quad yg_1g_2$$

5，确定第 4 步得到的每一个完全树的符号。因为 y 和 y_2 是并联的，只要用 y 来代替 y_2，这些完全树的符号就与表8-3-1中的符号相同。

6. 由此得到 $W_{(1,3;\,1,3)}$：

$$W_{(1,3;\,1,3)}=y_1y_3-y_1g_2-y_3g_1+g_1g_2$$

我们可以用不同的方法得到同样的结果。显然，知道了节点导纳矩阵 $A_iY(A_v)'$ 的行列式和代数余子式 Δ'_{pp}，就能求出开路策动点函数。因为我们已经研究过 $A_iY(A_v)'$ 的行列式，所以，我们只要考虑 $A_iY(A_v)'$ 的代数余子式 Δ'_{pp} 即可。同样明显地是

$$\Delta'_{pp}=|A_{i-p}Y(A_{v-p})'|\qquad(8\text{-}4\text{-}13)$$

其中 A_{i-p} 是从 A_i 中删去第 p 行得到的，A_{v-p} 是从 A_v 中删去第 p 行得到的。我们知道，A_{i-p} 是线图 $G_i(p=o)$ 的关联矩阵，这个线图是从 G_i 合并顶点 p 和参考点 o 得到的。而 A_{v-p} 是由 G_v 合并顶点 p 和参考点 o 得到的线图 $G_v(p=o)$ 的关联矩阵。因此

$$\Delta'_{pp}=\sum_{(T)}\varepsilon_j\times[G_i(p=o)\text{和}G_v(p=o)\text{的完全树树枝导纳乘积}]\qquad(8\text{-}4\text{-}14)$$

设边集合 $(y_{k_1}y_{k_2}\cdots y_{k_m})$ 是 $G_i(p=o)$ 和 $G_v(p=o)$ 的完全树，则由边 $y_{k_1},y_{k_2},\cdots,y_{k_m}$ 构成的子图叫做完全2-树，记为 $t_{2_p,o}$。因为如把顶点 p 和参考点 o 合并，$t_{2_p,o}$ 就变成一个完全树，所以 $t_{2_p,o}$ 由两部分组成，一部分包含顶点 p，另一部分包含顶点 o，并且这两部分含有 G 的所有顶点，而不含回路。

用完全2-树的概念，式(8-4-14)能表示为

$$\Delta'_{pp} = \sum_{(j)} e_j \times (\text{完全2-树 } t_{2_{p,o}} \text{ 树枝导纳乘积}) \qquad (8\text{-}4\text{-}15)$$

其中 e_j 是考虑到把顶点 p 和 o 合并（o 是参考点）的完全2-树的符号置换。显然，如果我们把边 y 加到顶点 p 和参考点之间，y 连同完全2-树 $t_{2_{p,o}}$ 中的所有的边就变成所得图中的一个树。因此式(8-4-5)成立且等于 Δ'_{pp}。例如，把图8-3-7中的电流图和电压图中顶点 1 和 3 合并，得到 $G_i(1=3)$ 和 $G_v(1=3)$，如图8-4-5所示，从这些图中我们容易得到 $W_{(1,3;\ 1,3)}$。

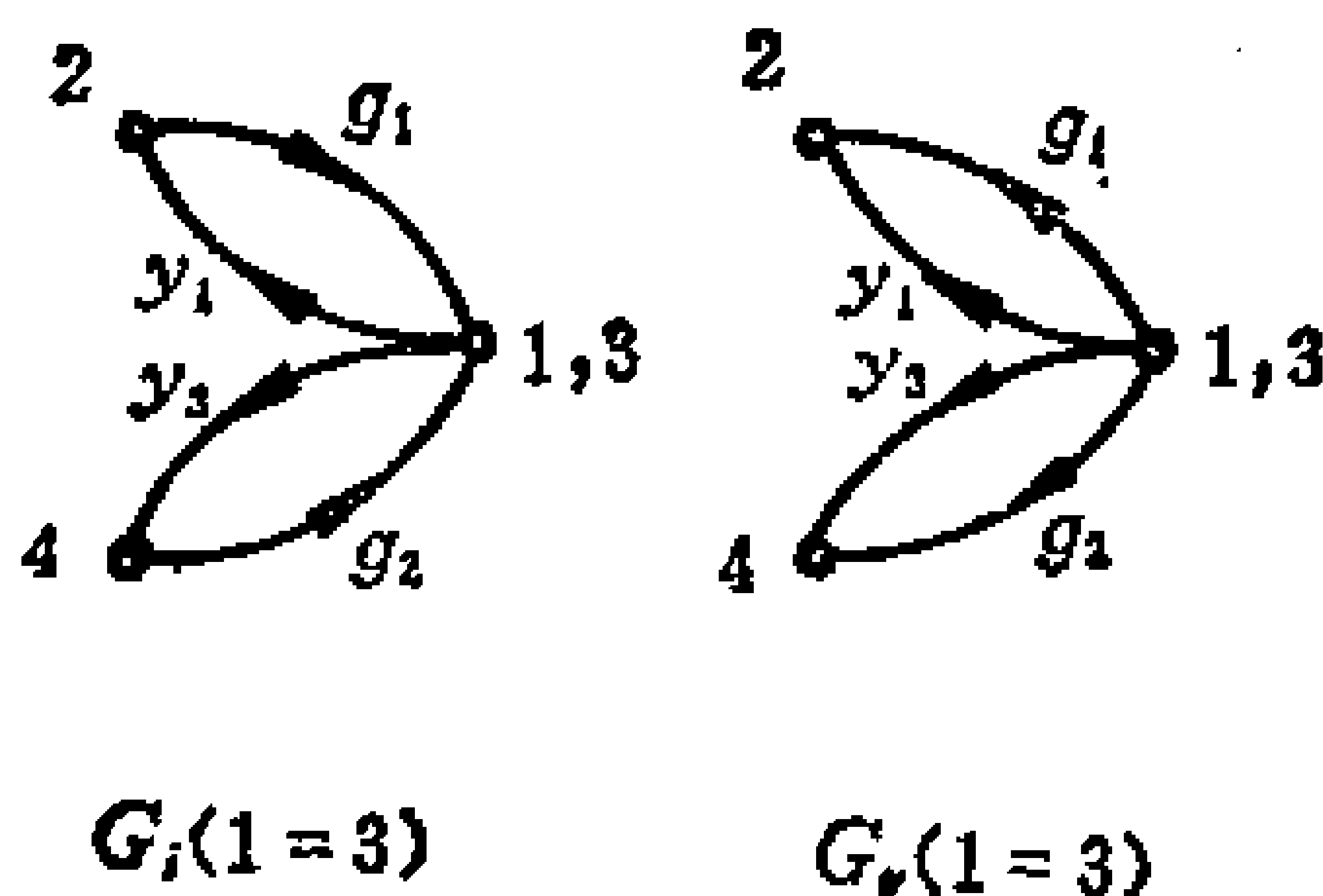


图8-4-5 从图8-3-7中 G_i 和 G_v 得到的 $G_i(1=3)$ 和 $G_v(1=3)$

8-5 开路转移函数

在图8-4-1中，我们把导纳 y 接到网络 N 的输入顶点 i 和 o 之间来求代数余子式 Δ'_{ii}。为了用拓扑方法来计算一个开路转移函数的代数余子式，我们把满足

$$yv_{j,k} = i_{i,o} \qquad (8\text{-}5\text{-}1)$$

的导纳 y 象图8-5-1那样连接*，，其中 i 和 o 是网络 N 的输入顶

* 原书把式(8-5-1)误为 $yi_{i,o} = v_{j,k}$，现已改正。——译注

点，j 和 k 是输出顶点。

现在这个网络的节点导纳矩阵的行列式 Δ' 是

图8-5-1 网络与似有源的y

$$\Delta' = \sum_{(j)} e_j \times \text{（完全树树枝导纳乘积）}$$

$$= \sum_{(j)} e_j \times \text{（不含 y 的完全树的树枝导纳乘积）}$$

$$+ \sum_{(j')} e_{j'} \times \text{（含 y 的完全树的树枝导纳乘积）} \qquad (8\text{-}5\text{-}2)$$

也就是：

$$\Delta' = V + yW_{(i\,o;\,j\,k)} \qquad (8\text{-}5\text{-}3)$$

其中

$$V = \sum_{(j)} e_j \times \text{（网络}N\text{的完全树树枝导纳乘积）} \qquad (8\text{-}5\text{-}4)$$

$$W_{(i\,o;\,j\,k)} = \frac{1}{y}\sum_{(j')} e_{j'} \times \text{（含 y 的完全树树枝导纳乘积）}$$

$$(8\text{-}5\text{-}5)$$

同前面给出的理由一样，Δ' 必为零，也就是

$$-y = \frac{V}{W_{(i\,o;\,j\,k)}} \qquad (8\text{-}5\text{-}6)$$

因为 $-y$ 等价于颠倒 y 的电流边的方向，如图8-5-2所示，我们能够看出，$-y$ 就等于开路转移函数 $Y_{o(i\,o;\,j\,k)}$。因此

$$Y_{o(i\,o;\,j\,k)} = \frac{V}{W_{(i\,o;\,j\,k)}} \qquad (8\text{-}5\text{-}7)$$

求$W_{(i,o;\ j,k)}$的步骤和求$W_{(i,o;\ i,o)}$的一样，只不过这里y的电流边是从顶点i连接到顶点o的，y的电压边从顶点j连接到顶点k。注意，y的电流边的定向与网络函数定义的电流$J_{i,o}$的方向相反(后者是从顶点o到顶点i)。例如，图8-3-6中G的$W_{(1,3;\ 2,4)}$能由以下步骤得到：

1. 将y的电流边从顶点1接到顶点3，y的电压边从顶点2接到顶点4（图8-5-3)。

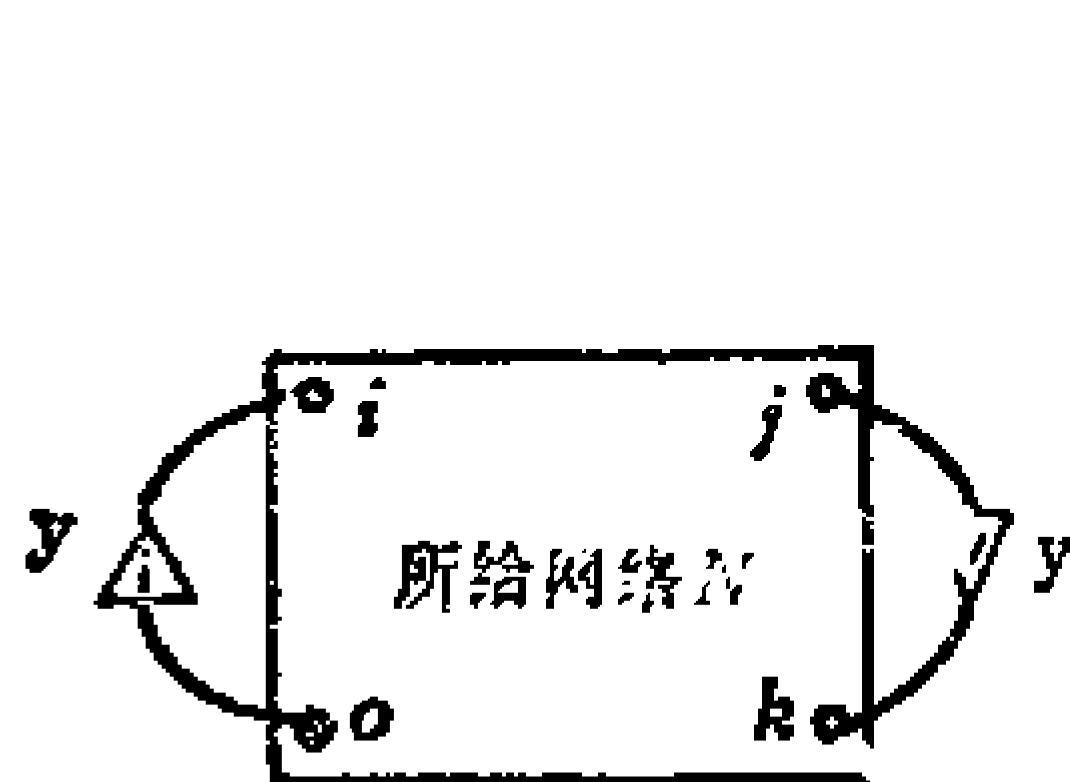


图8-5-2　网络N与y

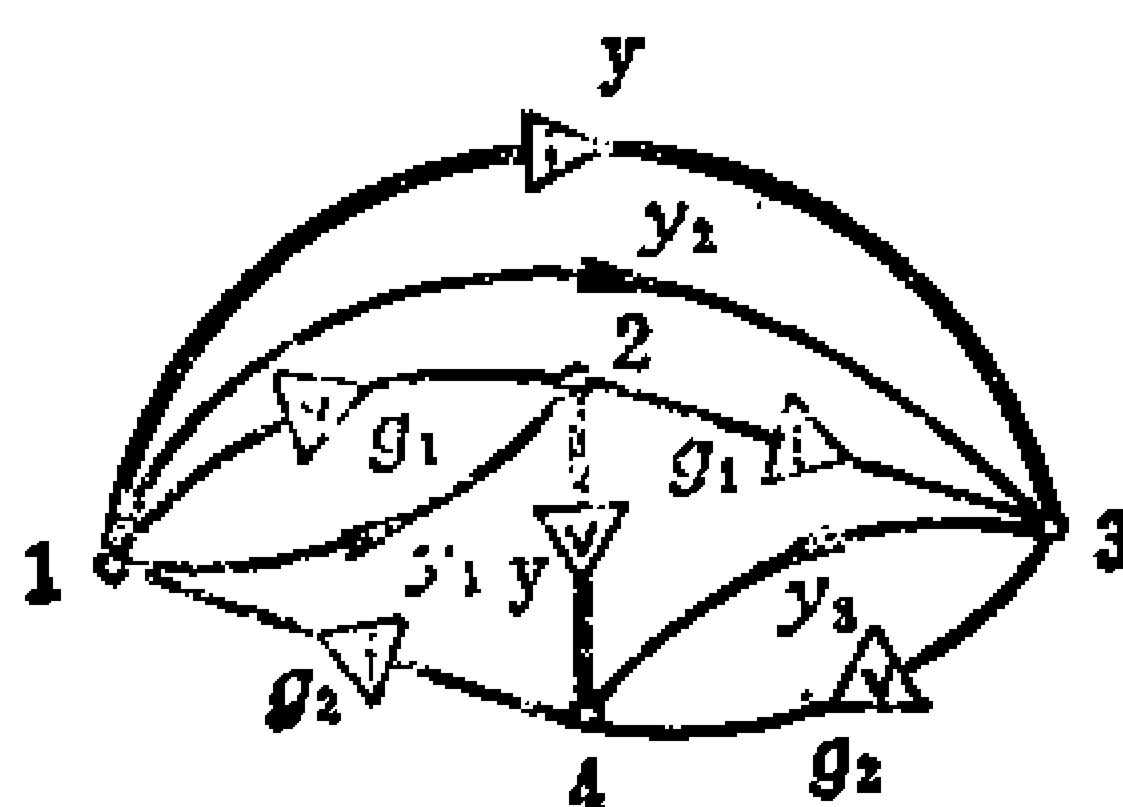


图8-5-3　有y的线图$G(y)$

2. 画出所得线图的电流图和电压图（图8-5-4)。

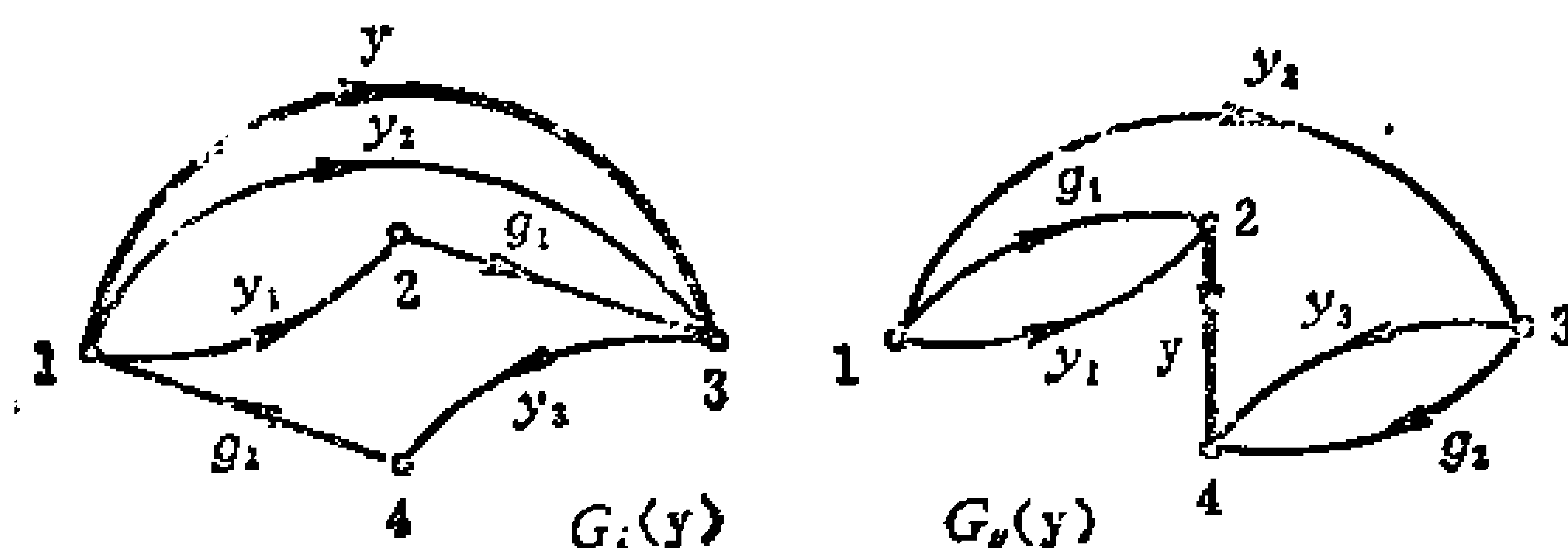


图8-5-4　图8-5-3中G的电流图$G_i(y)$和电压图$G_v(y)$

3. 找出电流图中包含y的所有树：

$$yy_1y_3,\quad yy_1g_2,\quad yy_3g_1,\quad yg_1g_2$$

4.从第 3 步得到的树中，选出也属于电压图的树：

$$yy_1y_3,\ yy_1g_2,\ yy_3g_1,\ yg_1g_2$$

5.确定第 4 步得到的每一个完全树的符号：

$$V\begin{bmatrix} t_i \\ t_v \end{bmatrix}\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} y & \bar{y_1} & y_3 \\ y_1 & y & y_3 \end{pmatrix} \end{array} = 1,\quad V\begin{bmatrix} t_i \\ t_v \end{bmatrix}\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \bar{g_2} & \bar{y_1} & \bar{y} \\ y_1 & y & g_2 \end{pmatrix} \end{array} = -1$$

$$V\begin{bmatrix} t_i \\ t_v \end{bmatrix}\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} y & g_1 & y_3 \\ g_1 & y & y_3 \end{pmatrix} \end{array} = -1,\quad V\begin{bmatrix} t_i \\ t_v \end{bmatrix}\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \bar{g_2} & g_1 & \bar{y} \\ g_1 & y & g_2 \end{pmatrix} \end{array} = +1$$

6.由此得到 $W_{(1,3;2,4)}$：

$$W_{(1,3;2,4)} = y_1y_3 - y_1g_2 - y_3g_1 + g_1g_2$$

从关于参考点 o 的基本节点方程：

$$\begin{bmatrix} v_{i,o} \\ v_{j,k} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta'}\begin{bmatrix} \Delta'_{ii} & \Delta'_{ji} - \Delta'_{ki} \\ \Delta'_{ij} - \Delta'_{ik} & \Delta'_{jj} + \Delta'_{kk} - \Delta'_{jk} - \Delta'_{kj} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_{i,o} \\ J_{j,k} \end{bmatrix} \tag{8-5-8}$$

利用式(8-4-12)和(8-5-7)，我们能写出如下方程：

$$\begin{bmatrix} v_{i,o} \\ v_{j,k} \end{bmatrix} = \frac{1}{V}\begin{bmatrix} W_{(i,o;\,i,o)} & W_{(j,k;\,i,o)} \\ W_{(i,o;\,j,k)} & W_{(j,k;\,j,k)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_{i,o} \\ J_{j,k} \end{bmatrix}$$

这就是开路网络函数的拓扑公式。

8-6 短路网络函数

从式(8-5-8)，我们可以得到

$$\begin{bmatrix} J_{i,o} \\ J_{j,k} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta'_{iijj} + \Delta'_{iikk} - \Delta'_{iijk} - \Delta'_{iikj}}$$

$$\times\begin{bmatrix}\Delta'_{jj}+\Delta'_{kk}-\Delta'_{jk}-\Delta'_{kj} & -(\Delta'_{ji}-\Delta'_{ki}) \\ -(\Delta'_{ij}-\Delta'_{ik}) & \Delta'_{ii}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{i,o} \\ v_{j,k}\end{bmatrix}$$

(8-6-1)

这个方程右端的元素就是短路网络函数。把它与式(8-5-8)比较，我们可以看出，除了$(\Delta'_{iijj}+\Delta'_{iikk}-\Delta'_{iijk}-\Delta'_{iikj})$外，其他的都已在前面研究过了。因此，我们只要找出$(\Delta'_{iijj}+\Delta'_{iikk}-\Delta'_{iijk}-\Delta'_{iikj})$的拓扑公式，就可以得到短路网络函数的拓扑公式。

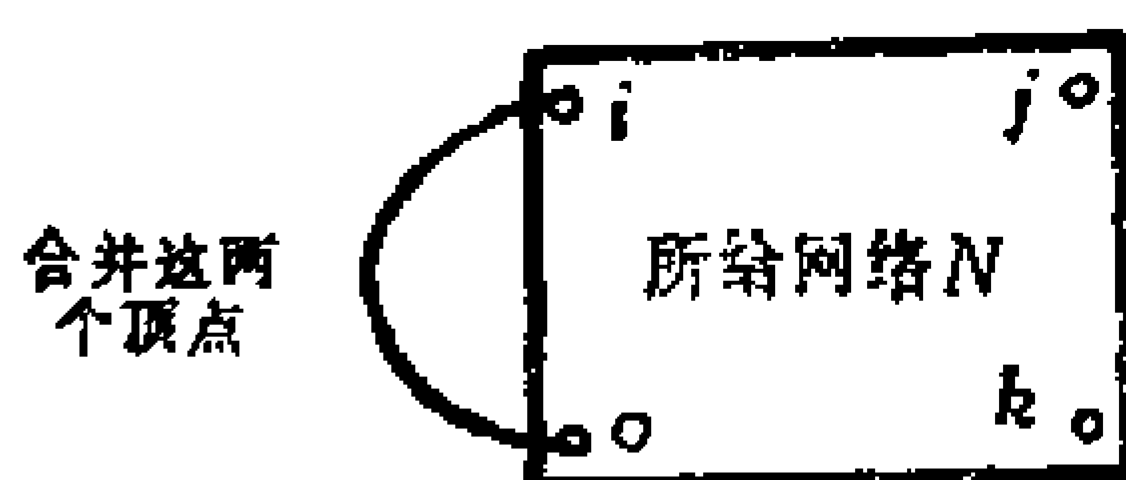


图8-6-1 网络$N(i=o)$

考虑从网络N合并顶点i和o得到的网络$N(i=o)$，如图8-6-1所示。由$N(i=o)$的基本节点方程，我们有

$$\begin{bmatrix}v_{p,o} \\ v_{j,k}\end{bmatrix}=\frac{1}{\underline{\underline{\Delta}}}\begin{bmatrix}\underline{\underline{\Delta}}_{pp} & \underline{\underline{\Delta}}_{jp}-\underline{\underline{\Delta}}_{kp} \\ \underline{\underline{\Delta}}_{pj}-\underline{\underline{\Delta}}_{pk} & \underline{\underline{\Delta}}_{jj}+\underline{\underline{\Delta}}_{kk}-\underline{\underline{\Delta}}_{jk}-\underline{\underline{\Delta}}_{kj}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J_{p,o} \\ J_{j,k}\end{bmatrix}$$

(8-6-2)

因为$\underline{\Delta}$是网络$N(i=o)$的节点导纳矩阵的行列式，而$N(i=o)$是从N合并顶点i和o得到的网络，所以$\underline{\underline{\Delta}}$等于所给网络$N$的节点导纳矩阵$A_iY(A_v)^t$的代数余子式$\Delta'_{ii}$。并且，式(8-6-2)中的代数余子式$\underline{\underline{\Delta}}_{pp}$是这样一个矩阵的行列式，这个矩阵是由$N$的节点导纳矩阵$A_iY(A_v)^t$删去对应于顶点$i$和$p$的第$i$、第$p$行和第$i$、第$p$列得到的。由式(8-5-9)，网络$N(i=o)$的$W_{(j,k;j,k)}$等于

$$W_{(j,k;j,k)}=\underline{\underline{\Delta}}_{jj}+\underline{\underline{\Delta}}_{kk}-\underline{\underline{\Delta}}_{jk}-\underline{\underline{\Delta}}_{kj} \tag{8-6-3}$$

因此

$$N(i=o) \text{的} W_{(j,k;j,k)} = N \text{ 的 } A_i Y(A_v)' \text{的}$$

$$\Delta'_{ijj} + \Delta'_{ikk} - \Delta'_{ijk} - \Delta'_{ikj} \qquad (8\text{-}6\text{-}4)$$

由式(8-4-15),(8-5-8)和(8-5-9)

$$N(i=o) \text{的} W_{(j,k;j,k)} = \sum_{(j)} \varepsilon_j \times [N(i=o)\text{的完全2-树 } t_{2j,k} \text{ 树枝导纳乘积}] \qquad (8\text{-}6\text{-}5)$$

可以看出，$N(i=o)$的每一个完全2-树 $t_{2j,k}$ 是把 $N(i=o)$ 的顶点 j 和 k 合并而得到的$N(i=o, j=k)$的一个完全树。因此

$$N(i=o) \text{的} W_{(j,k;j,k)} = \sum_{(j)} \varepsilon_j \times [N(i=o, j=k)\text{的完全树树枝导纳乘积}] \qquad (8\text{-}6\text{-}6)$$

设 $U_{(i,o;j,k)}$定义如下：

$$U_{(i,o;j,k)} = \sum_{(j)} \varepsilon_j \times [N(i=o,\ j=k)\text{的完全树树枝导纳乘积}] \qquad (8\text{-}6\text{-}7)$$

由式(8-6-7),(8-5-8)和(8-5-9),式(8-6-1)能表示为

$$\begin{bmatrix} J_{i,o} \\ J_{j,k} \end{bmatrix} = \frac{1}{U_{(i,o;j,k)}} \begin{bmatrix} W_{(j,k;j,k)} & -W_{(j,k;i,o)} \\ -W_{(i,o;j,k)} & W_{(i,o;i,o)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i,o} \\ v_{j,k} \end{bmatrix} \qquad (8\text{-}6\text{-}8)$$

此式给出短路网络函数的拓扑公式。

如果不用合并顶点 i 和 o 及顶点 j 和 k 的方法，我们也可以用以下步骤求出 $U_{(i,o;j,k)}$：

1.将似无源导纳 y_1 接在顶点 i 和 o 之间，将似无源导纳 y_2 接在顶点 j 和 k 之间。

2.找出所有既含 y_1 又含 y_2 的完全树，并求出V.换句话说，求得

$$V(y_1y_2)=\sum_{(j)}g_j\times(\text{既含 }y_1\text{ 又含 }y_2\text{ 的完全树树枝导纳乘积})$$

(8-6-9)

3．$U_{(i\circ o,\,j\circ k)}$是

$$U_{(i\circ o,\,j\circ k)}=\frac{1}{y_1y_2}V(y_1y_2)$$

一般说来，从$N(i=o,j=k)$来求出$U_{(i\circ o;j\circ k)}$比较容易。例如，要求出图8-3-6中G的$U_{(1\circ 3\circ 2\circ 4)}$可以

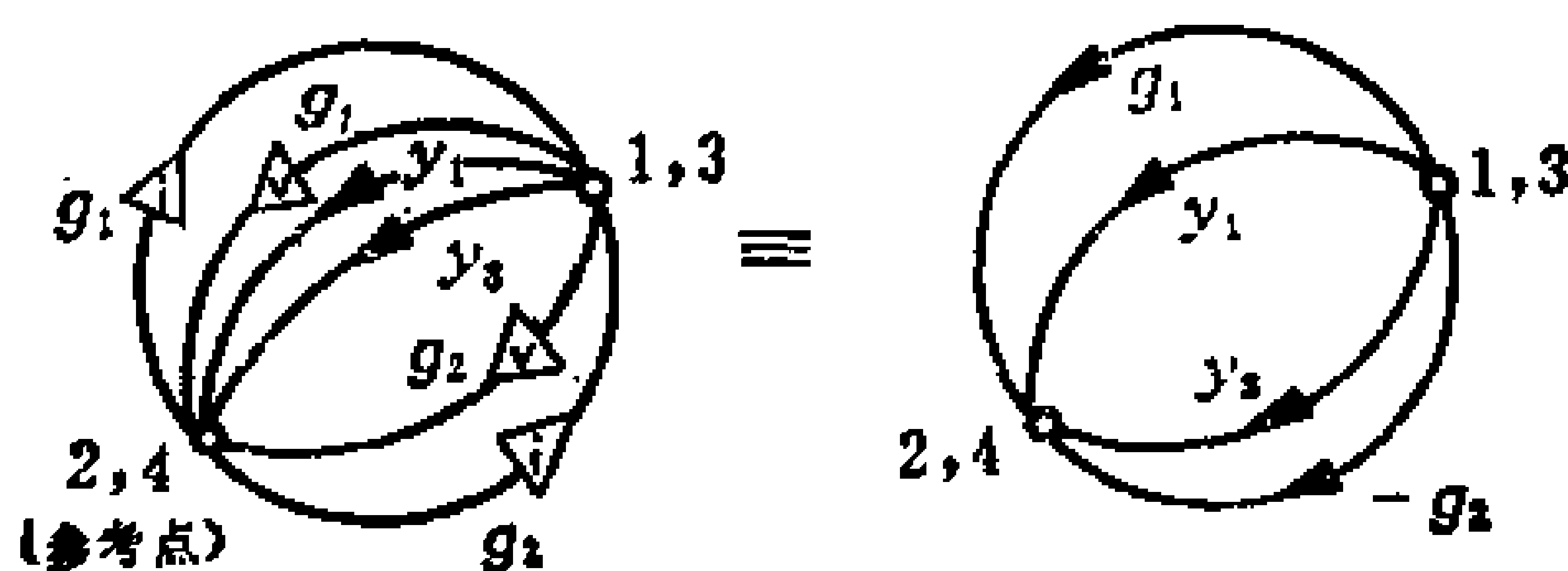


图8-6-2　图8-3-6中G的$G(1=3,2=4)$

象图8-6-2那样构造$G(1=3,2=4)$。然后求出$G(1=3,2=4)$的所有完全树，我们得到

$$U_{(1\circ 3\circ 2\circ 4)}=y_1+y_3-g_1-g_2$$

8-7　单　向　网　络

前面介绍的用拓扑公式分析网络的优点是，如果一个网络的导纳被看作是任意的，在拓扑公式中就没有相消项。换句话说，如果边y_{i_1}，y_{i_2}，$\cdots$，y_{i_m}是树（或者在似有源网络的情况是完全树），项$y_{i_1}y_{i_2}\cdots y_{i_m}$将在拓扑公式所得到的行列式中。因为不可能有其他树也由y_{i_1}，y_{i_2}，$\cdots$，y_{i_m}组成，这样，项$y_{i_1}y_{i_2}\cdots y_{i_m}$就不

会被消去。对于代数余子式也是这样。因此，只要我们采用拓扑公式，就不必担心相消项的问题。然而，在似有源网络的情况下，必须计算每一个完全树的符号，这大概算作这种方法的一个缺点。如果我们对每个导纳 y 的电压边和电流边的位置加以限制，允许某些相消项的存在就能避免涉及这个符号问题。达到这个目的的方法之一是只用单向导纳来表示网络。

定义8-7-1 一个单向导纳(unistor) y 定义为

$$yv_{po}=i_{pk} \tag{8-7-1}$$

其中 v_{po} 是顶点 p 到参考点 o 的电压，i_{pk} 是从顶点 p 流到顶点 k 的电流。式(8-7-1)给出的单向导纳的拓扑表示如图8-7-1。

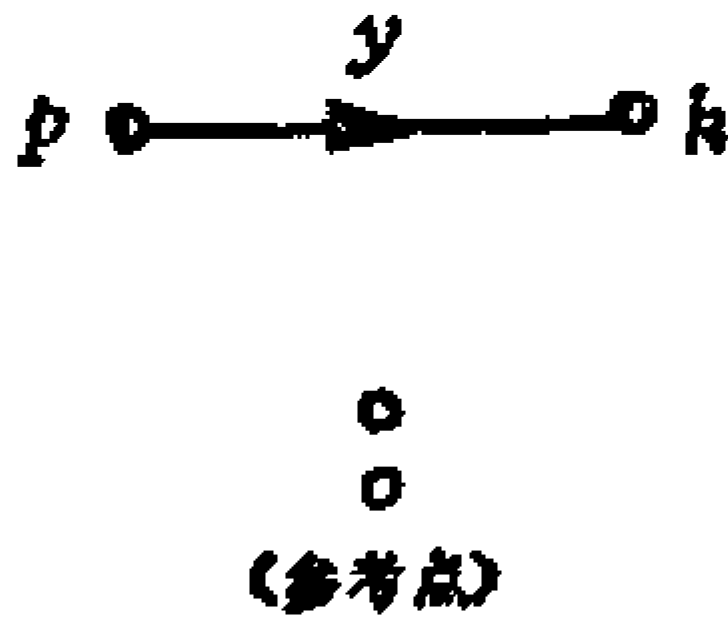


图8-7-1 单向导纳的表示法

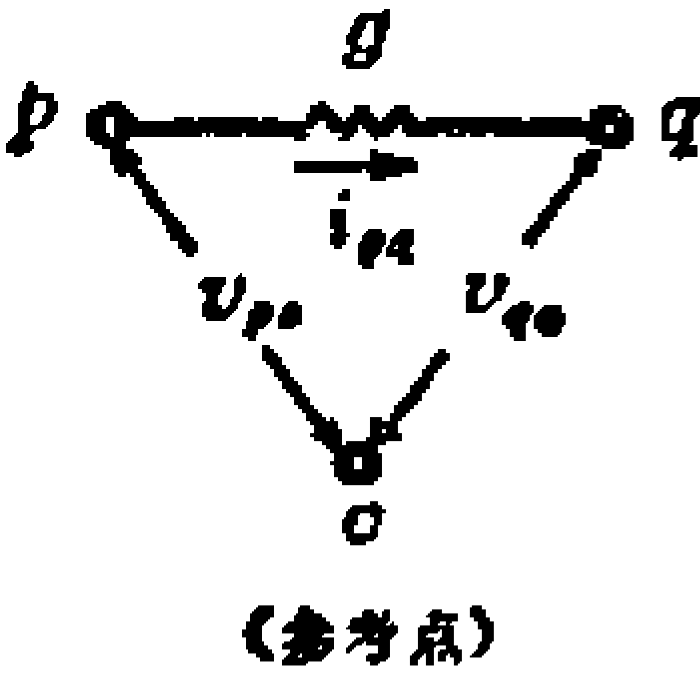


图8-7-2 电导 g

考虑一个连接顶点 p 和 q 之间的电导，如图8-7-2所示。从等式

$$g(v_{po}-v_{qo})=i'_{pq} \tag{8-7-2}$$

我们能看出，如果定义

$$gv_{po}=i_{pq} \tag{8-7-3}$$

$$gv_{qo}=i''_{pq} \tag{8-7-4}$$

那么

$$i_{pq}=i'_{pq}-i''_{pq} \tag{8-7-5}$$

我们可以用两个满足式(8-7-3)和(8-7-4)的单向导纳来表示电导

g，如图8-7-3所示。

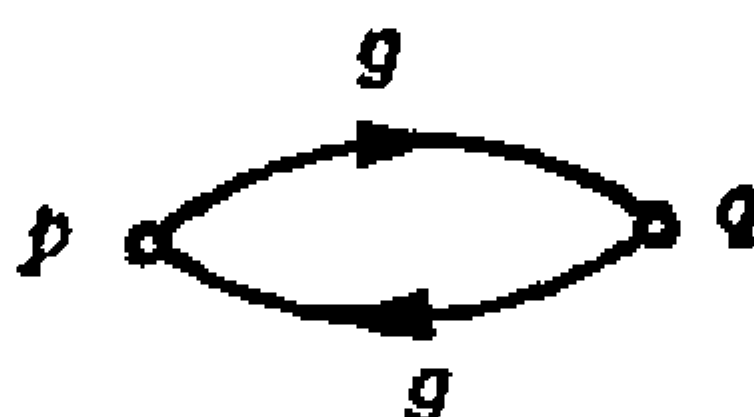


图8-7-3 电导 g 的单向导纳表示法

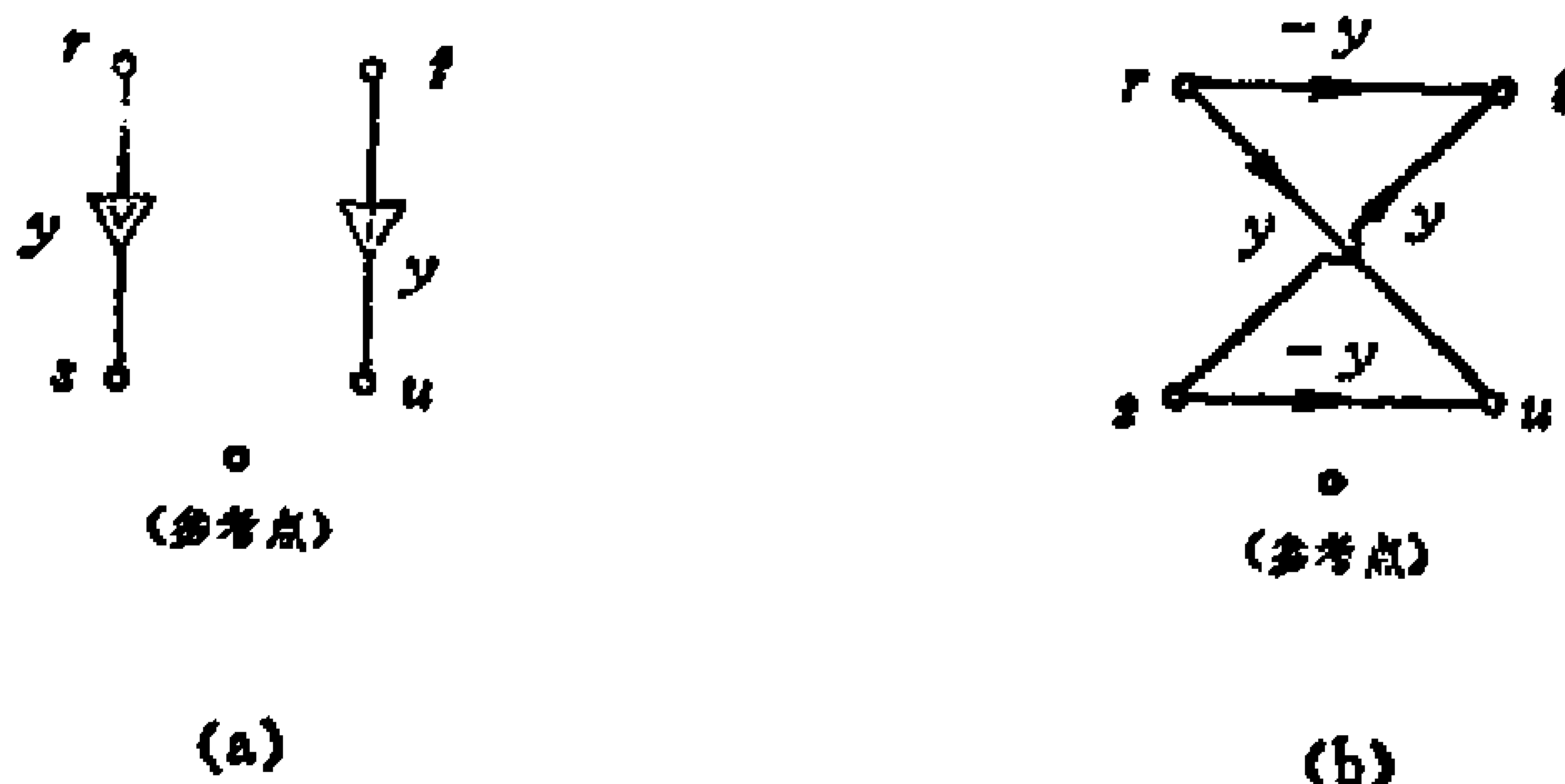


图8-7-4 导纳 y

(a) y 的电压边和电流边；(b) y 的单向导纳表示法

一般地说，假定我们有一个如图8-7-4(a)所示的导纳 y，其中

$$yv_{rs} = i_{tu} \tag{8-7-6}$$

考虑图8-7-4(b)所示的单向导纳网络，我们可以看出，在顶点 r 流出的总电流是

$$(-y)v_{ro} + yv_{ro} = 0 \tag{8-7-7}$$

同样，在顶点 s 流出的总电流也等于0。另一方面，在顶点 t 流出的总电流是

$$-[(-y)v_{ro} + yv_{so}] = y(v_{ro} - v_{so}) = i_{tu} \tag{8-7-8}$$

其中 i_{tu} 是式(8-7-6)给出的电流。并且在顶点 u 流出的总电流是

$$-[yv_{ro} + (-y)v_{so}] = -y(v_{ro} - v_{so}) = -i_{tu} \tag{8-7-9}$$

因此图8-7-4(b)中的单向导纳网络就代表图8-7-4(a)中的导纳 y。

当 $s=u$ 时，图8-7-4(b)中的单向导纳网络如图8-7-5(a)所示。当 $s=u$ 且 $r=t$ 时，这个单向导纳网络如图8-7-5(b)所示，这是似无源导纳元件的表示法。

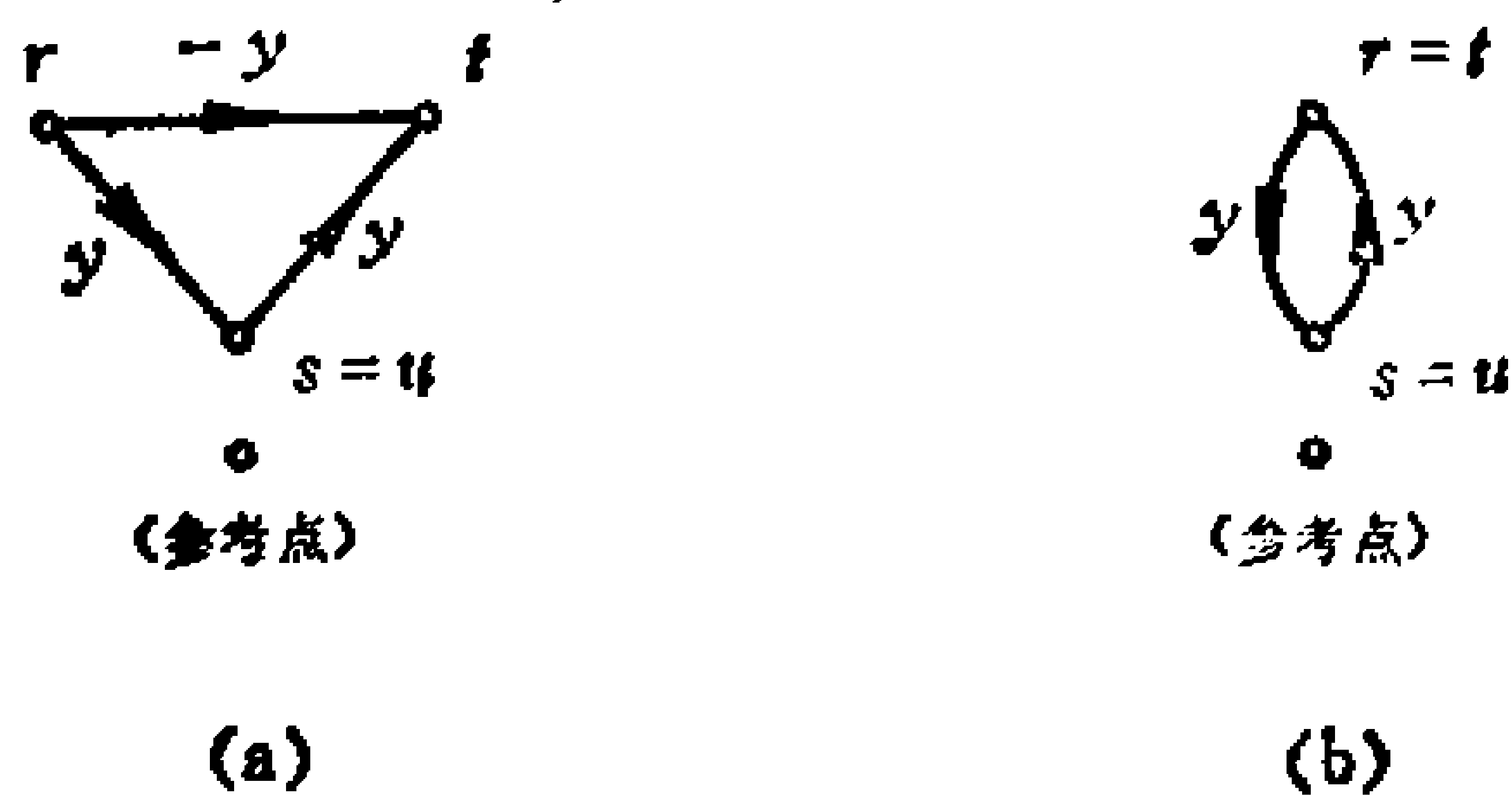


图8-7-5 图8-7-4中单向导纳网络的特殊情况

(a)当 $s=u$ 时的单向导纳网络；(b)当 $s=u$ 且 $r=t$ 时的单向导纳网络

注意，根据单向导纳的定义，任何一个与参考点连接，且其方向离开参考点的单向导纳可以省略。现在我们知道，任何一个导纳能用单向导纳来表示。例如，图8-7-6中的网络可以用图8-7-7(a)所示的单向导纳网络表示。取顶点 o 作为参考点，图8-7-7(a)中的单向导纳网络可以简化为图8-7-7(b)中的网络，它也表示图8-7-6中的网络。注意，当两个单向导纳连接在相同的顶点之间（并联），并且方向相同时，我们可以把它们的权加在一起，用一个单向导纳代替它们。

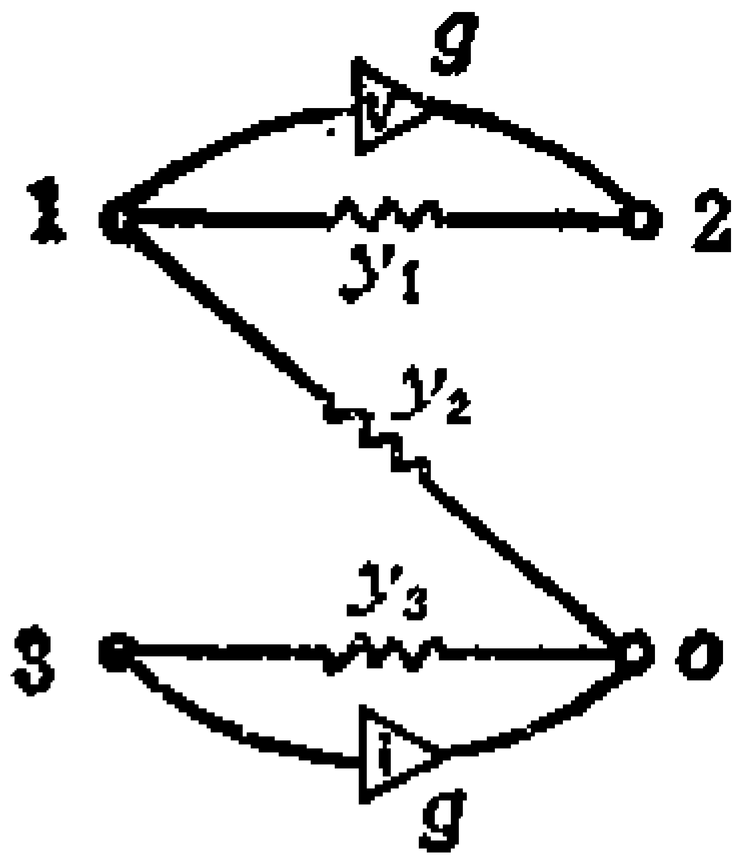


图8-7-6 一个网络

设 N_u 是一个单向导纳组成的网络，那么对于 N_u 中所有的

单向导纳，以 o 为参考点，我们有以下等式：

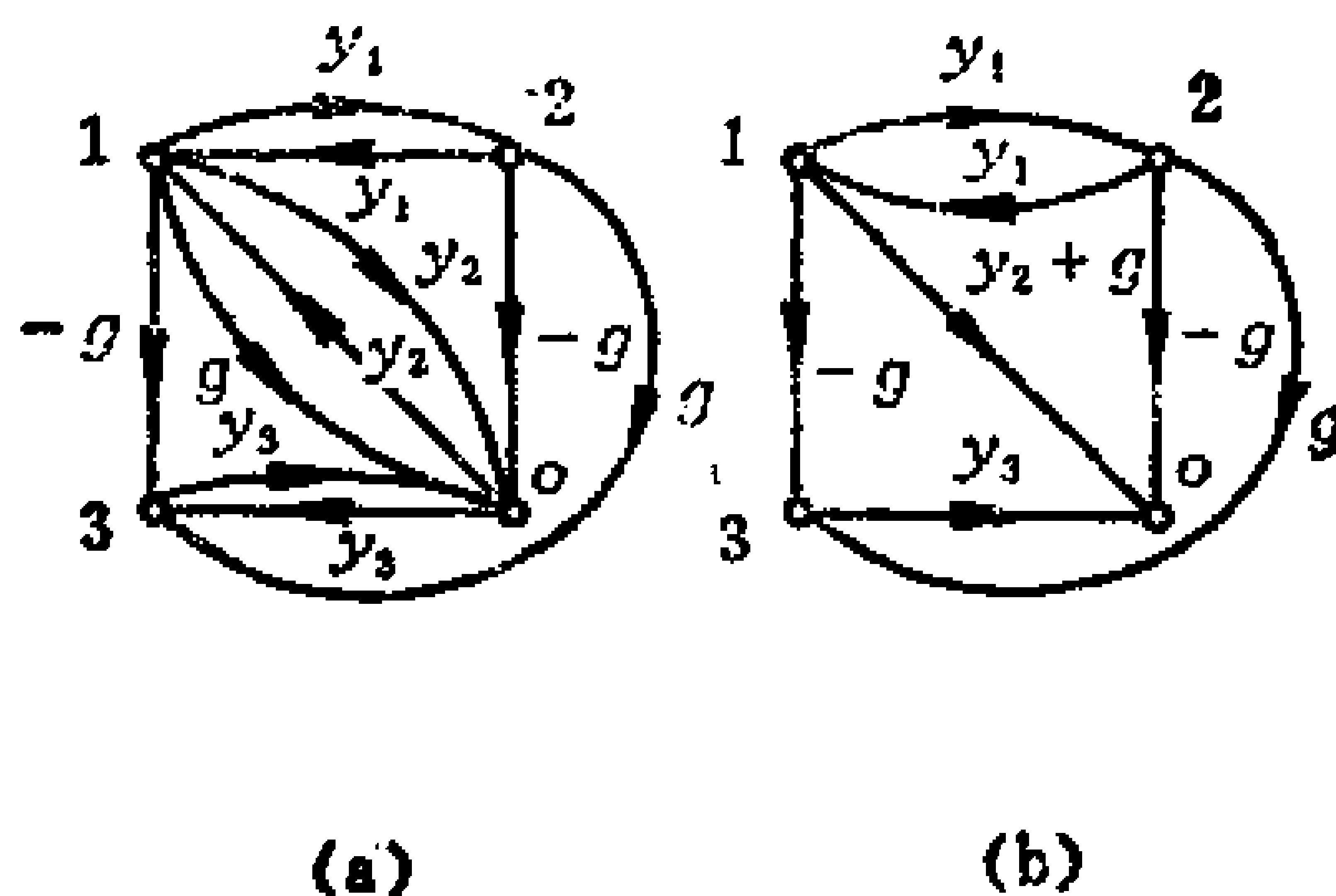


图8-7-7

(a)单向导纳网络 N_1 (b)以 o 为参考点的简化单向导纳网络 N

$$
\begin{aligned}
y_1 v_{p_1 o} &= i_{p_1 k_1} \\
y_2 v_{p_2 o} &= i_{p_2 k_2} \\
&\vdots \\
y_n v_{p_n o} &= i_{p_n k_n}
\end{aligned}
\tag{8-7-10}
$$

它们可以写成矩阵形式，

$$YV_e = I_e \tag{8-7-11}$$

其中

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & & & 0 \\ & y_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & y_n \end{bmatrix} \tag{8-7-12}$$

$$V_e = \begin{bmatrix} v_{p_1 o} \\ v_{p_2 o} \\ \vdots \\ v_{p_n o} \end{bmatrix} \tag{8-7-13}$$

$$I_e = \begin{bmatrix} i_{p_1k_1} \\ i_{p_2k_2} \\ \vdots \\ i_{p_nk_n} \end{bmatrix} \tag{8-7-14}$$

设 G_i 和 G_v 是 N_u 的电流图和电压图，把图8-7-8(a)所示的从顶点 i 到顶点 j 的每一个单向导纳，看成是图8-7-8(b)所示从顶点 i 到 j 的电流边、从顶点 i 到参考点的电压边的简洁记法。我们可容易看出，N_u 的电流图 G_i 正好和N_u 相同。因此，电流

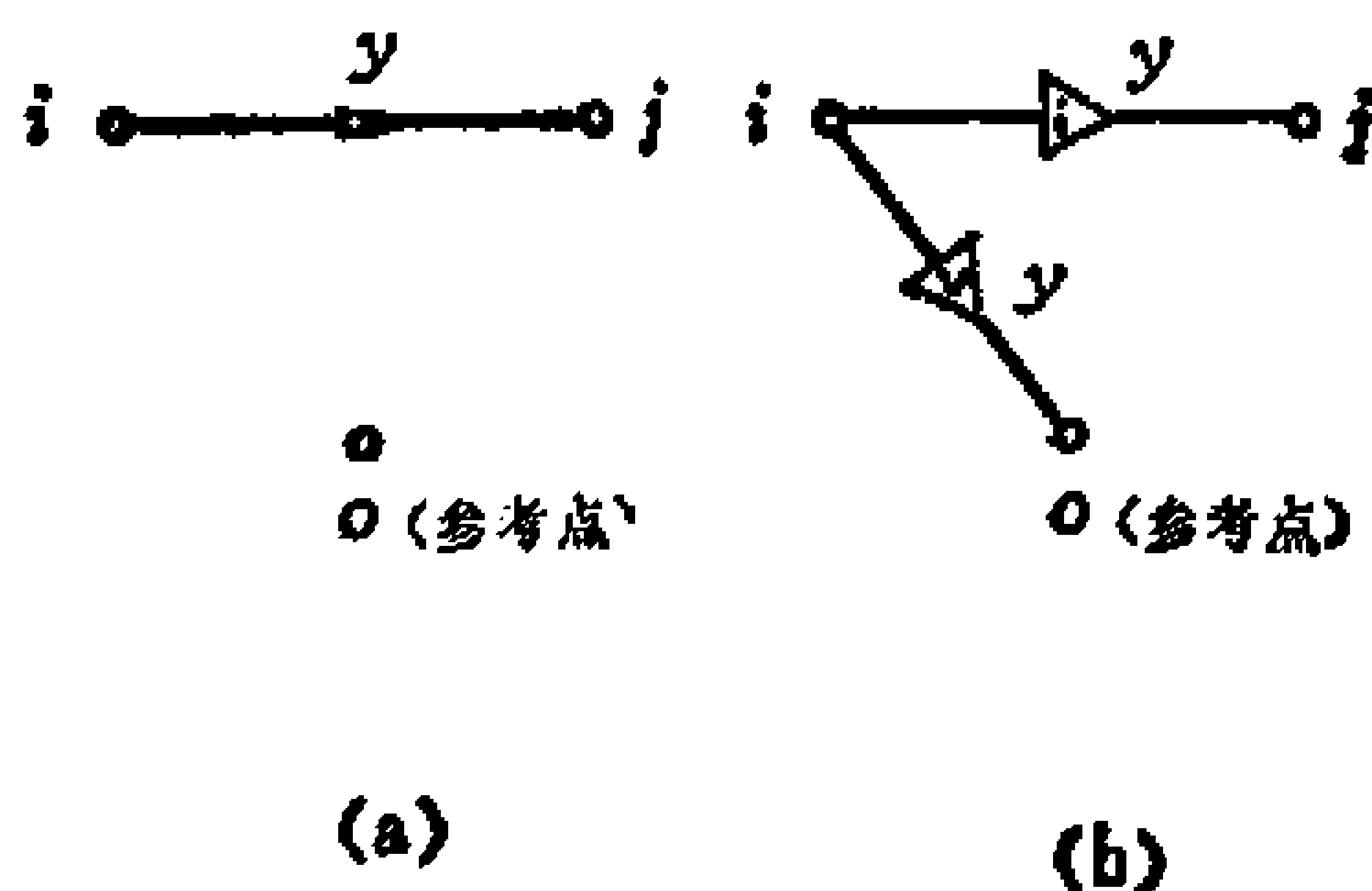


图8-7-8

(a)单向导纳 y，　(b)单向导纳 y 的电压边及电流边

图 G_i 的关联矩阵 A_i 就是 N_u 的关联矩阵 A。于是据克希霍夫电流定律，我们有

$$AI_e = AYV_e = 0 \tag{8-7-15}$$

在节点变换中，由式(8-1-19)

$$V_e = A_v^t V_n \tag{8-7-16}$$

其中 A_v 是电压图 G_v的关联矩阵。因为每一条电压边是从对应电流边所连接出来的那个顶点接出来的，所以 A_v 中 + 1 的位置正好与 A_i 中 + 1 的位置相同。另一方面，每一条电压边都是接在

参考点上，而电流边却不一定，因此 A_v 中没有 -1。于是 A_v 可以从 A_i 中将所有 -1 改为 0 得到。

定义8-7-2 符号 A^+ 定义为从 A 中将所有 -1 用 0 代换得到的矩阵。

用这个定义，我们有

$$A_v = N_u \text{ 的 } A^+ \tag{8-7-17}$$

于是式(8-7-16)中的节点变换变成

$$V_e = (A^+)'V_n \tag{8-7-18}$$

将此式代入式(8-7-15)得

$$AY(A^+)'V_n = 0 \tag{8-7-19}$$

这就是网络 N_u 的基本节点方程。当有外部电流接在 N_u 参考点与某些顶点之间时，式(8-7-19)将变成

$$AY(A^+)'V_n = J \tag{8-7-20}$$

例8-7-1 考虑由单向导纳组成的网络 N_u，如图8-7-9所示。

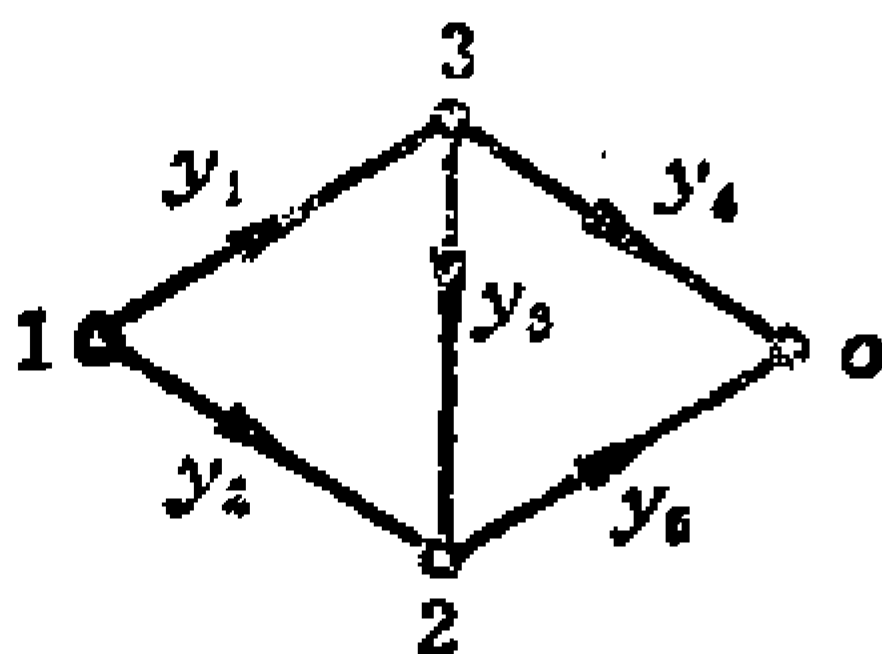


图8-7-9 网络 N_u

以 o 为参考点的关联矩阵是

$$A = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

因此

$$A^{+}=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array}\\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\end{array}$$

所以 N_u 的节点导纳矩阵为

$$AY(A^{+})^{t}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 & & & & \\ & y_2 & & 0 & \\ & & y_3 & & \\ & 0 & & y_4 & \\ & & & & y_5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} y_1+y_2 & 0 & 0 \\ -y_2 & y_5 & -y_3 \\ -y_1 & 0 & y_3+y_4 \end{bmatrix}$$

利用比内-柯西定理，节点导纳矩阵 $AY(A^{+})^{t}$ 的行列式可表示为

$$|AY(A^{+})^{t}|=\sum[AY\text{ 的大子行列式}]\times[(A^{+})^{t}\text{对应的大子行列式}]$$

$$=\sum(y_{j_1}y_{j_2}\cdots y_{j_m})|A(j_1j_2\cdots j_m)||A^{+}(j_1j_2\cdots j_m)| \tag{8-7-21}$$

其中 $A(j_1j_2\cdots j_m)$和 $A^{+}(j_1j_2\cdots j_m)$分别是由 A 和 A^{+} 的列 j_1，j_2，$\cdots$，j_m 组成的方矩阵。我们知道，如果边 $y_{j_1},y_{j_2},\cdots,y_{j_m}$ 构成 N_u 中的一个树，那么 $A(j_1j_2\cdots j_m)$是非奇异的，同样，如果边 y_{j_1}，

$i_2, \cdots, y_{i_m}$ 构成 N_u 的电压图 G_v 中的一个树，那么 $A^+(j_1 j_2 \cdots j_m)$ 也是非奇异的。

现在，为了后面的分析，定义有向树的概念如下。

定义8-7-3 有向树是 N_u 中的一个树，其中任一顶点到参考点都存在一条有向路径。

例如，在图8-7-10中，(y_1, y_2, y_3) 是一个有向树，而 (y_1, y_3, y_4) 不是有向树，其中 o 是参考点。

由有向树的定义，式(8-7-20)可以表达为

$$|AY(A^+)^t| = \sum \text{有向树 } t_o \text{ 树枝导纳乘积} \qquad (8\text{-}7\text{-}22)$$

其中 t_o 是以 o 为参考点的有向树。证明留给读者。

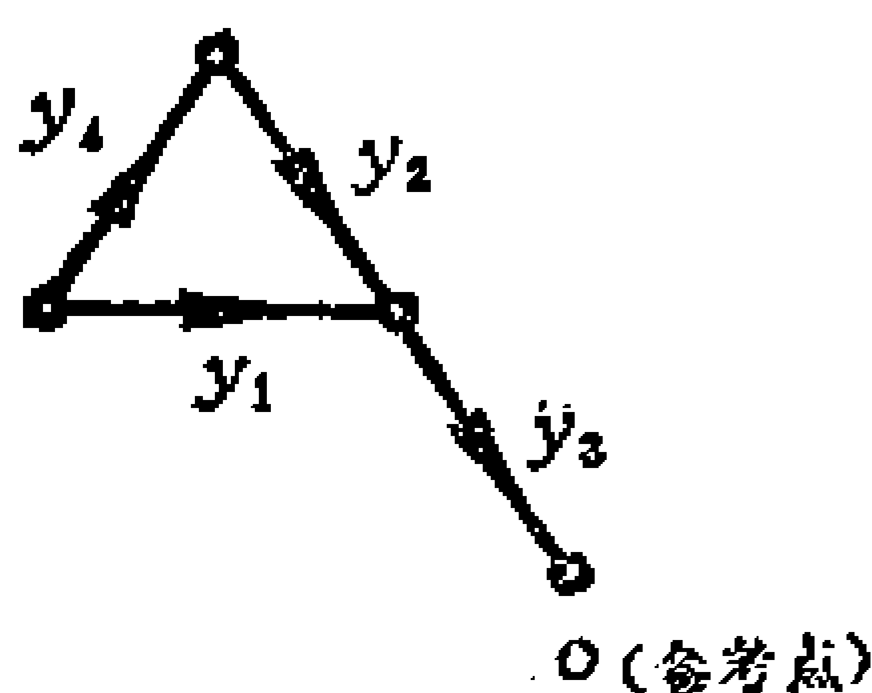


图8-7-10 网络 N_u

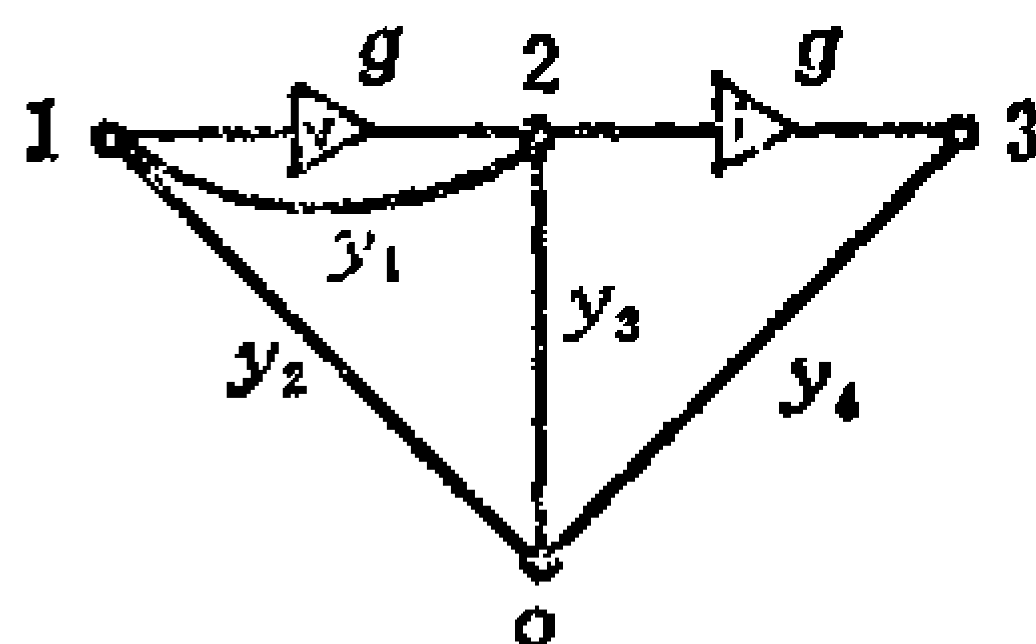


图8-7-11 电网络 N

例8-7-2 考虑图8-7-11中的网络，其对应的由单向导纳组成的单向网络 N_u 如图8-7-12(a)所示，它可以简化成图8-7-12(b)的形式。从这个网络 N_u，我们可以求出节点导纳矩阵的行列式。

$$\Delta = |AY(A^+)^t| = y_1 y_2 y_4 + (y_1 - g) y_3 y_4 + y_3 y_1 g + y_2 y_4(-g) + y_2 y_3 y_4$$

经简化，可得： $\Delta = y_1 y_2 y_4 + y_1 y_3 y_4 + y_2 y_3 y_4 - y_2 y_4 g$

我们也能求出代数余子式的拓扑公式，例如，

$$\Delta_{ii}=\sum \text{有向2-树 } t_{2i,o} \text{ 树枝导纳乘积} \qquad (8\text{-}7\text{-}23)$$

然而，如在前面有源网络的拓扑分析中所作的那样，我们可以用

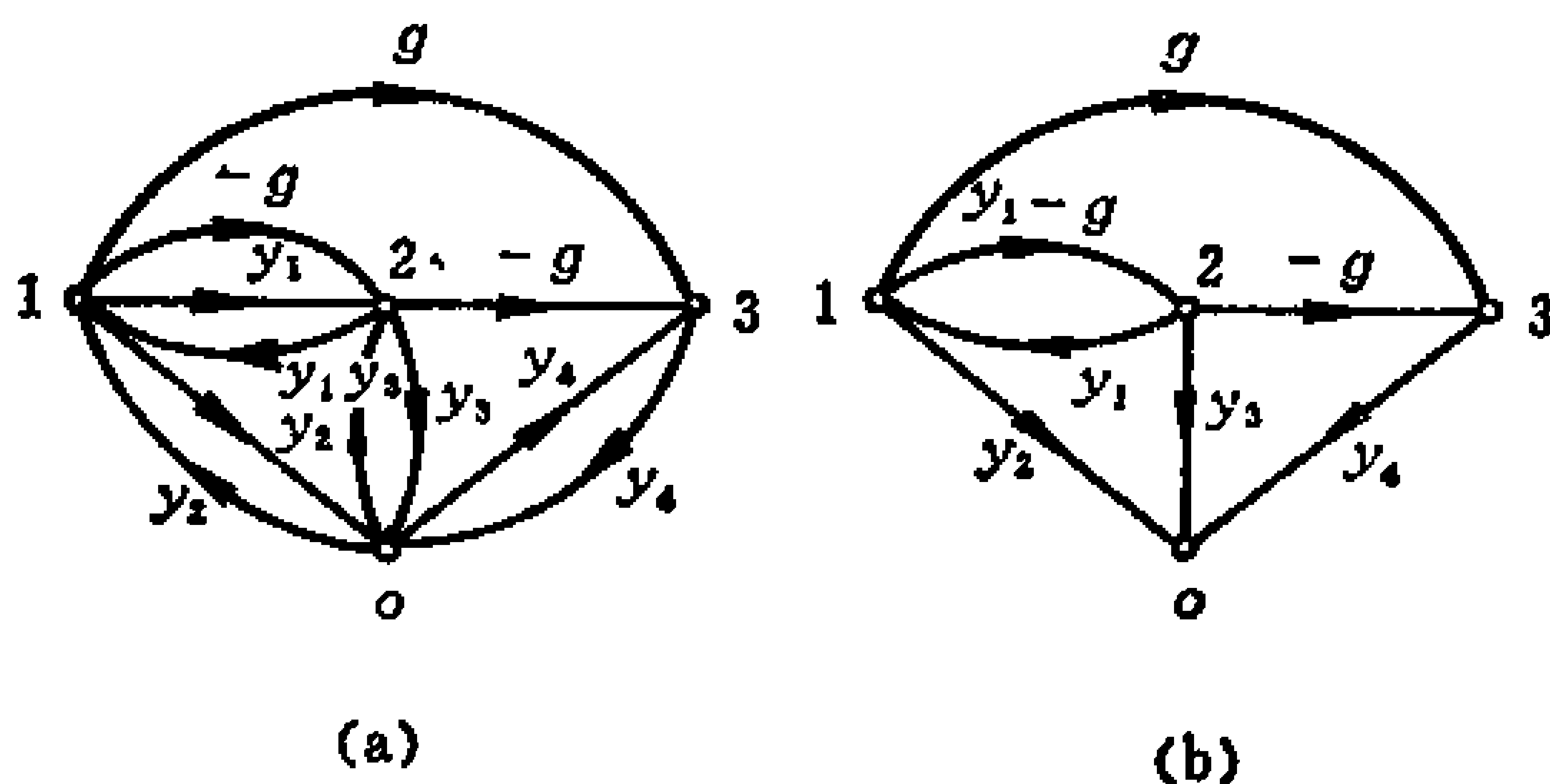


图8-7-12

(a)N的单向导纳网络；(b)简化后的单向导纳网络$N_\circ$

加入一个导纳 y 的方法来比较简单地得到所求的解。

这种用单向网络进行的拓扑分析并不怎样方便，因为在最终结果中仍有相消项存在*。

有好几种把似无源网络及似有源网络结合起来进行拓扑分析的技巧，可以使确定每一个完全树的符号的步骤变得简单。但我们在这里就不再讨论它们了。

8-8 电网络的等效变换

有许多电网络在固定的顶点之间有相同的网络函数。这些电网络叫做定点条件下的等效网络。这里我们来讨论一种算法，一

---

* 可参阅陈树柏主编《网络图论及其应用》，科学出版社，1982.——译注

个给定网络在一个点集下如何用拓扑方法构造一个等效网络，这种算法称为等效变换。

考虑由两个子网络N_A和N_B组成的网络N，这两个网络由顶点1，2，…，n连接，如图8-8-1所示．顶点$a_1, a_2, \cdots, a_l$和顶点1，2，…，n在N_A中，顶点b_1，$b_2, \cdots, b_f$和顶点1，2，…，n在N_B中。不失一般性，设顶点n是参考点，V_A是列向量，其中每一个元素v_{a_p}是顶点a_p到参考点n的节点电压，$p=1,2,\cdots,l$；设V_B是列向量，其中每一个元素v_{b_q}是顶点b_q到参考点n的节点电压，$q=1,2,\cdots,f$；又设V_C是列向量，其中每个元素v_c是顶点c到参考点n的节点电压，$c=1, 2,\cdots,n-1$．以此类似，设J_A是由j_{a_p}组成的列向量，j_{a_p}是从参考点n流入顶点a_p的电流，$p=1,2,\cdots,l$；设J_B是列向量，其中每个元素j_{b_q}是从参考点n流入顶点b_q的电流，$q=1,2,\cdots, f$；J_c是电流向量，其中每一元素j_c是从参考点n流入顶点c的电流，$c=1,2,\cdots,n-1$。

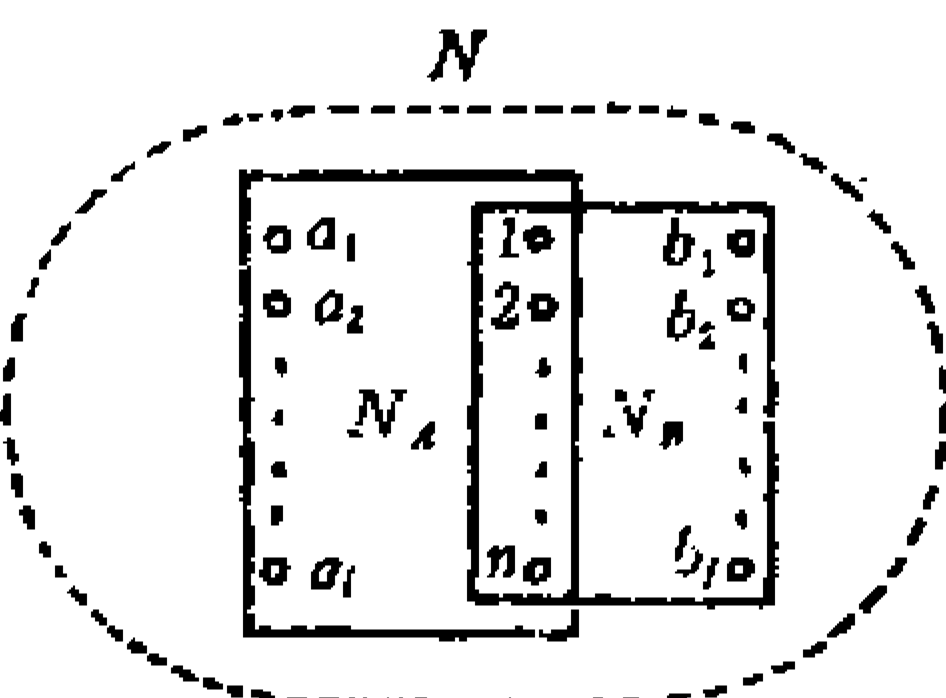


图8-8-1　由N_A和N_B组成的网络N

网络N的基本节点方程可表示为：

$$\begin{bmatrix} Y_{A_{11}} & Y_{A_{12}} & 0 \\ Y_{A_{21}} & Y_{A_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_A \\ V_C \\ V_B \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{B_{11}} & Y_{B_{12}} \\ 0 & Y_{B_{21}} & Y_{B_{22}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_A \\ V_C \\ V_B \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} J_A \\ J_C \\ J_B \end{bmatrix} \tag{8-8-1}$$

其中$\begin{bmatrix} Y_{A_{11}} & Y_{A_{12}} \\ Y_{A_{21}} & Y_{A_{22}} \end{bmatrix}$取自子网络$N_A$，而$\begin{bmatrix} Y_{B_{11}} & Y_{B_{12}} \\ Y_{B_{21}} & Y_{B_{22}} \end{bmatrix}$取自子网络$N_B$。将式(8-8-1)重写，我们有

$$\begin{bmatrix} Y_{A_{11}} & Y_{A_{12}} \\ Y_{A_{21}} & Y_{A_{22}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_A \\ V_C \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{B_{11}} & Y_{B_{12}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_C \\ V_B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} J_A \\ J_C \end{bmatrix} \tag{8-8-2}$$

$$Y_{B_{21}}V_C+Y_{B_{22}}V_B=J_B \tag{8-8-3}$$

由式(8-8-3)，V_B能表示为

$$V_B=(Y_{B_{22}})^{-1}J_B-(Y_{B_{22}})^{-1}Y_{B_{21}}V_C \tag{8-8-4}$$

将此代入式(8-8-2)，我们有

$$\begin{bmatrix} Y_{A_{11}} & Y_{A_{12}} \\ Y_{A_{21}} & Y_{A_{22}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_A \\ V_C \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ Y_{B_{11}}-Y_{B_{12}}(Y_{B_{22}})^{-1}Y_{B_{21}} \end{bmatrix}V_C$$

$$=\begin{bmatrix} J_A \\ J_C-Y_{B_{12}}(Y_{B_{22}})^{-1}J_B \end{bmatrix} \tag{8-8-5}$$

这是假定$Y_{B_{22}}$非奇异的情况下得到的，显然，式(8-8-1)和(8-8-5)给出了子网络N_A中的顶点之间相同的网络函数。另一方面，式(8-8-5)表明我们可以用新的子网络N_C来代替子网络N_B，N_C的节点导纳矩阵等于$Y_{B_{11}}-Y_{B_{12}}(Y_{B_{22}})^{-1}Y_{B_{21}}$，它有一个电流源为$-Y_{B_{12}}(Y_{B_{22}})^{-1}J_B$，如图8-8-2所示。

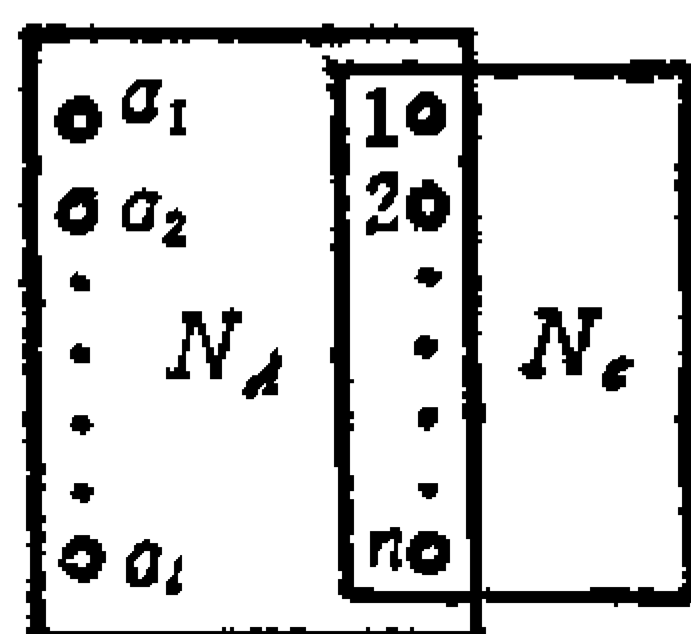


图8-8-2　N的等效网络

当我们单独考虑子网络N_B，并计算顶点1,2,…,n中每一对顶点之间的n端短路导纳函数时，我们可以看出，答案正好等于$Y_{B_{11}}-Y_{B_{12}}(Y_{B_{22}})^{-1}Y_{B_{21}}$。并且$-Y_{B_{12}}(Y_{B_{22}})^{-1}J_B$表示在$N_B$中由于$J_B$产生的从参考点$n$到顶点$c$的等效$n$端短路电流源，这里$c=1,2,\cdots,n-1$。因此，只要$Y_{B_{22}}$是非奇异的，（这是顶点

1,2,…,n 中每一对顶点之间存在 n 端短路导纳函数的必要条件），我们就可以求出子网络 N_B，从而消去顶点 $b_1,b_2,\cdots,b_f$，而不改变子网络 N_A 中任一对顶点之间的N的网络函数.求子网络 N_C 的规则如下：

规则 a　从参考点n到每一个顶点 u $(u=1,2,\cdots,n-1)$，我们给出 N_c 中的一个电流源 J_u，它等于 N_B 的 n 端短路电流 i_u：

$$N_c \text{ 中的 } J_u = N_B \text{ 中的 } i_u\big|_{v_1=v_2=\cdots=v_{n-1}=0} \tag{8-8-6}$$

其中 v_p 是从顶点 p 到参考点 n 的节点电压，$p=1,2,\cdots,n-1$，i 是从顶点 u 流入参考点 n 的电流。

规则 b　在顶点1,2,…,$n-1$中每一对顶点(t,u)之间给出N_c 中的导纳 y_{tu} 和 y_{ut}，它们满足

$$y_{tu}v_u = i_t \tag{8-8-7}$$

和

$$y_{ut}v_t = i_u \tag{8-8-8}$$

其中 y_{tu} 和 y_{ut} 等于 N'_B（没有电流源的 N_B）的 n 端短路转移导纳函数，即

$$y_{tu} = N'_B \text{ 中的} \frac{J_t}{v_u}\bigg|_{\substack{v_1=v_2=\cdots=v_{n-1}=0\\ v_u\neq 0}} \tag{8-8-9}$$

$$y_{ut} = N'_B \text{ 中的} \frac{J_u}{v_t}\bigg|_{\substack{v_1=v_2=\cdots=v_{n-1}=0\\ v_t\neq 0}} \tag{8-8-10}$$

规则c　从顶点1,2,…,$n-1$中每一个顶点 u 到参考点 n 给出 N_c 的 y_{un}，规定为

$$y_{un}v_u = i_u \tag{8-8-11}$$

它等于 N'_B 的顶点 u 和参考点 n 之间的 n 端短路策动点导纳函数，即

$$y_{un} = N'_B \text{ 中的} \frac{J_u}{v_u}\bigg|_{\substack{v_1=v_2=\cdots=v_{n-1}=0\\ v_u\neq 0}} \tag{8-8-12}$$

例8-8-1 考虑图8-8-3中的网络，注意因为似无源元件的方向是任意的，所以在这个图中允许用无向边来表示似无源元件。这样做是很方便的，因为我们可以在需要的时候指定适当的方向。假定我们只需要考虑 N_A 中顶点之间的网络函数.由于在 N_B 中没有电流源，我们可以从规定 b 开始。设顶点3是参考点，则

$$y_{12}=\left.\frac{J_1}{v_2}\right|_{v_1=0}=\frac{y_3y_4g}{(y_1+y_4)(y_2+y_3)}$$

$$y_{21}=\left.\frac{J_2}{v_1}\right|_{v_2=0}=0$$

根据规则 c，

$$y_{13}=\left.\frac{J_1}{v_1}\right|_{v_2=0}=\frac{y_1y_4}{y_1+y_4}$$

$$y_{23}=\left.\frac{J_2}{v_2}\right|_{v_1=0}=\frac{y_2y_3}{y_2+y_3}$$

所得的网络如图8-8-4所示。

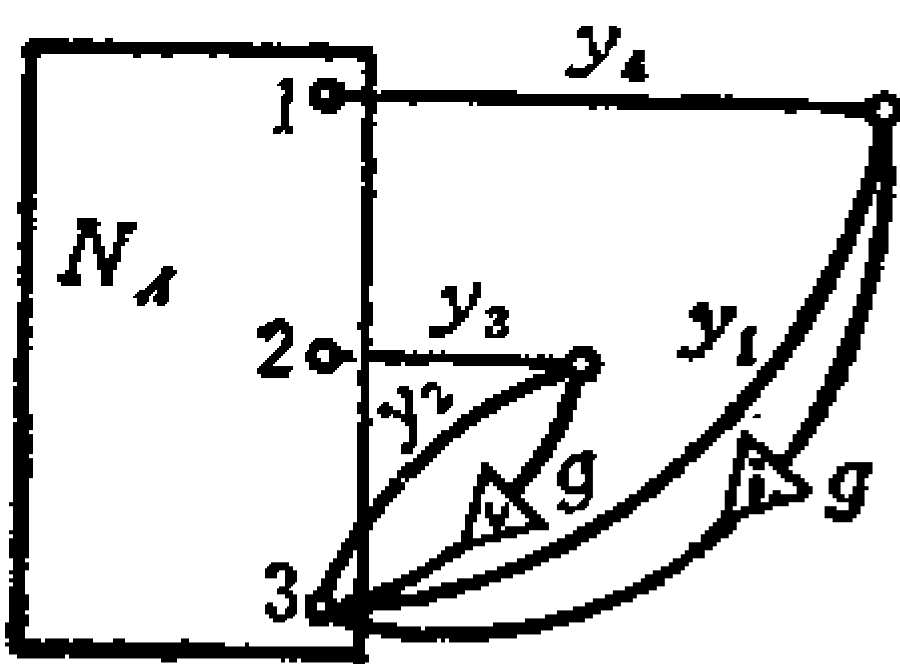


图8-8-3 一个给定的网络

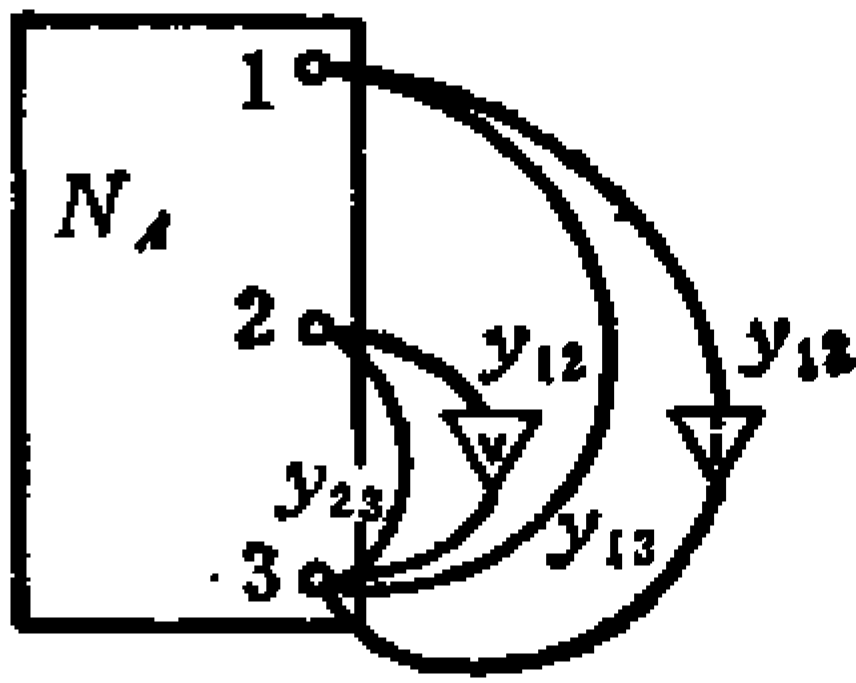


图8-8-4 等效网络

当子网络 N_B 不包含似有源元件（包括互感耦合元件）时，规则 b 和 c 变成一条规则。

规则 b' 在顶点 $1,2,\cdots,n$ 中每一对顶点 (t,u) 之间，我们给

出 N_c 中 t 与 u 之间的似无源导纳 $\tilde{y}_{tu}$，它等于 N'_B 中 t 和 u 之间的 n 端短路转移导纳函数的负数（参考点是 t，u 以外的点）：

$$\tilde{y}_{tu} = \left.\frac{J'_t}{V'_u}\right|_{\substack{v_{1r}=v_{2r}=\cdots=v_{nr}=0 \\ v'_u \neq 0}} = N'_B \text{ 中的 } \left.\frac{J'_u}{V'_t}\right|_{\substack{v_{1r}=v_{2r}=\cdots=v_{nr}=0 \\ v'_t \neq 0}} \tag{8-8-13}$$

其中 J'_p 是从顶点1，2，…，n 中除 t 和 u 以外任选作参考点的 r 流入顶点 p 的电流，V'_p 是从顶点 p 到所选作参考点 r 的电压，$p = t, u$。

为了给出 n 端短路网络函数的拓扑公式，我们采用如下符号。

定义8-8-1 关于一个线图 G 的符号 $W_{n_0,n_1|\overline{\overline{n_2\cdots n_k}}}$ 定义为

$$W_{n_0,n_1|\overline{\overline{n_2\cdots n_k}}} = \sum e_j \times (\text{完全}k\text{-树 } t_{n_0,n_1|\overline{\overline{n_2\cdots n_k}}} \text{的树枝导纳乘积}) \tag{8-8-14}$$

这里符号 $t_{n_0,n_1|\overline{\overline{n_2\cdots n_k}}}$ 表示图 G 的一个子图，当顶点 $n_2,\cdots,n_k$ 被合并时，它连同一条外加的边 y 变成一个完全树，其中 y 的电流边是从 n_0 接到 n_k，而 y 的电压边是从 n_1 接到 n_k。

定义8-8-2 对于线图 G 的符号 $V_{\overline{\overline{n_1n_2\cdots n_k}}}$ 定义为

$$V_{\overline{\overline{n_1n_2\cdots n_k}}} = \sum e_j \times (\text{完全 }k\text{-树 } t_{\overline{\overline{n_1n_2\cdots n_k}}} \text{的树枝导纳乘积}) \tag{8-8-15}$$

其中子图 $t_{\overline{\overline{n_1n_2\cdots n_k}}}$ 表示当顶点 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 被合并时，它变成一个完全树。

用这些定义，我们就可以给出 n 端短路网络函数的拓扑公

式。

考虑由式(8-8-12)给出的策动点函数

$$y_{un}=\frac{J_u}{V_u}\Bigg|_{\substack{v_1=v_2=\cdots=v_{n-1}=0\\ v_u\neq 0}} \tag{8-8-16}$$

在N'_B中将除u外的顶点1,2,…,n全部合并起来，我们得到一个新的网络，记为$N'_B[p=n;\ p=1,2\cdots,n-1,p\neq u]$。那么，式(8-8-16)就简化成这个新网络$N'_B[p=n;\ p=1,\ 2,\ \cdots,n-1,\ p\neq u]$的开路策动点导纳函数。于是

$$y_{un}=\left\{N'_B[p=n;p=1,2,\cdots,n-1,p\neq u]\text{ 的}\frac{V}{W_{u,u|n}}\right\} \tag{8-8-17}$$

其中

$$V=\sum e_j\times\{N'_B[p=n;p=1,2,\cdots,n-1,p\neq u]\text{的}$$

$$\text{完全树树枝导纳乘积}\} \tag{8-8-18}$$

因为$N'_B[p=n;p=1,2,\cdots,n-1,p\neq u]$是由$N'_B$合并除$u$外的1，2,…,$n$各顶点得到的，所以

$$N'_B[p=n;p=1,2,\cdots,n-1,p\neq u]\text{的}V=N'_B\text{的}V_{\overline{1\,2\cdots u-1\,u+1\cdots n}} \tag{8-8-19}$$

并且，
$$N'_B[p=n;p=1,2,\cdots,n-1,p\neq u]\text{的}W_{u,u|n}=N'_B\text{的}V_{\overline{12\cdots n}} \tag{8-8-20}$$

因此

$$y_{un}=N'_B\text{的}\frac{V_{\overline{1\,2\cdots u-1\,u+1\cdots n}}}{V_{\overline{1\,2\cdots n}}} \tag{8-8-21}$$

注意，这个等式的分子$V_{\overline{1\,2\cdots u-1\,u+1\cdots n}}$的下标不包含顶点$u$.这就是一个$n$端短路策动点导纳函数的拓扑公式。

式(8-8-9)以及式(8-8-10)中的导纳y_{iu}可以看作

$$y_{tu}=N'_B[p=n;p=1,2,\cdots,n-1,p\neq t,u] \text{ 的} \left.\frac{J_t}{v_u}\right|_{v_t=0}$$

(8-8-22)

其中 $N'_B[p=n;p=1,2,\cdots,n-1,p\neq t,u]$是 N'_B 合并除顶点 t 和 u 以外的1,2,…,n 各顶点得到的。从式(8-6-8)和定义8-8-2，我们知道

$$y_{tu}=\left.\frac{J_t}{v_u}\right|_{v_t=0}=N'_B[p=n;p=1,2,\cdots,n-1,p\neq t,u]\text{的}\frac{-W_{u,t|\overline{t\,n}}}{V_{\overline{\overline{u\,t\,n}}}} \tag{8-8-23}$$

我们有

$$y_{tu}=N'_B \text{ 的} \frac{-W_{u,t|\overline{\overline{1\;2\cdots t-1\;t+1\cdots u-1\;u+1\cdots n}}}}{V_{\overline{\overline{1\;2\cdots n}}}}$$

(8-8-24)

注意，当 N'_B 不包含似有源元件（包括互感耦合元件）时，这个等式变成

$$\tilde{y}_{tu}=\tilde{y}_{ut}=-y_{tu}=N'_B\text{的}\frac{W_{u,t|\overline{\overline{1\;2\cdots t-1\;t+1\cdots u-1\;u+1\cdots n}}}}{V_{\overline{\overline{1\;2\cdots n}}}}$$

(8-8-25)

等效电流源也可以由拓扑公式得到。设 J_b 是在 N_B 中从参考点 n 流入到顶点 b 的电流源，其中 $b\neq 1,2,\cdots,n-1$。那么从参考点 n 到顶点 t ($t=1,2,\cdots,n$)，对应于J_b的等效电流源J_t由等效变换给出。

因为

$$N''_B\text{的}\left.\frac{J_t}{J_b}\right|_{v_1=v_2=\cdots=v_{n-1}=0}=N''_B[p=n;p=1,2,\cdots,n-1,$$

$$p\neq t]\text{的}\left.\frac{J_t}{J_b}\right|_{v_t=0} \tag{8-8-26}$$

而且，

$$N''_B[p=n;p=1,2,\cdots,n-1,p\neq t]\text{的}\left.\frac{J_t}{J_b}\right|_{v_t=0}$$

$$=N'_B[p=n;p=1,2,\cdots,n-1,p\neq t]\text{的}\left.\frac{J_{t\to v_b}}{J_{b/v_b}}\right|_{v_t=0}$$

(8-8-27)

其中 N'_B 是从 N_B 中删去除 J_b 外的所有电流源得到的，$N''_B[p=n;p=1,2,\cdots,n-1,p\neq t]$是从$N''_B$ 合并除顶点 t 外的顶点1，2，…，n 得到的。式(8-8-27)的右端可以看作两个短路导纳函数的比值。因此由式(8-6-8)，我们有

$$\left.\frac{J_t}{J_b}\right|_{v_t=0}=N''_B\,[p=n;p=1,2,\cdots,n-1,p\neq t]\text{ 的}\frac{W_{b,t\mid\bar{n}}}{W_{t,t\mid\bar{n}}}$$

(8-8-28)

或者

$$\left.\frac{J_t}{J_b}\right|_{v_1=v_2=\cdots=v_{n-1}=0}=N'_B\text{的}\frac{W_{b,t\mid\overline{1}\,\overline{2}\cdots\overline{t-1},\overline{t+1}\cdots\overline{n}}}{V_{\overline{1}\,\overline{2}\cdots\overline{n}}}\qquad(8\text{-}8\text{-}29)$$

注意，如果我们用式(8-8-29)，就必须对 N_B 中每一个电流源找出等效电流源 $J_1,J_2,\cdots,J_{n-1}$。

假定子网络 N_B 不但是由似无源元件组成，而且在顶点1，2，

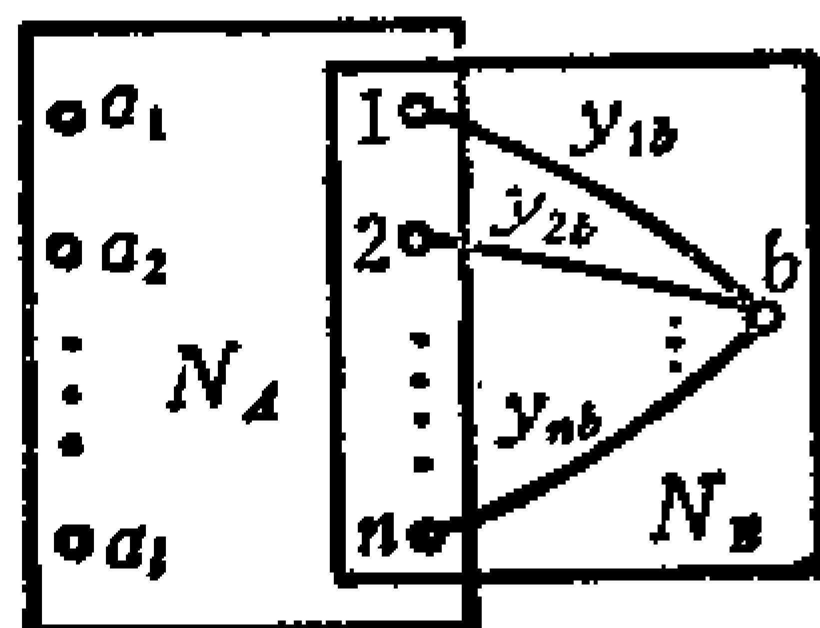


图8-8-5　一个有特殊结构的网络N_B

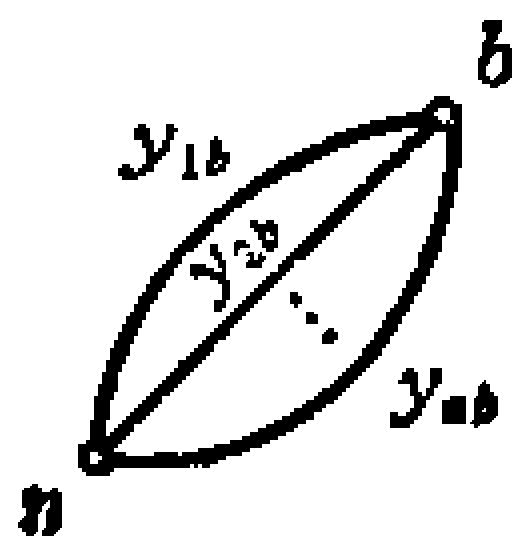


图8-8-6　合并了顶点1，2，…，n 的N_B

$\cdots,n$（它们是 N_B 与子网络 N_A 的公共点）之外还有一个顶点 b，如图8-8-5所示。为了简便，令 y_{rb} 是顶点 r 和 b 之间的导纳，$r=1,2,\cdots,n$。我们可以看出，式(8-8-25)中分母是 N_B 合并顶点 $1,2,\cdots,n$ 所得的网络的树枝导纳乘积之和．合并顶点$1,2,\cdots,n$所得的网络如图8-8-6所示。容易看出，这个网络的树枝导纳乘积之和恰好就是每个导纳之和。因此

$$V_{\overline{\overline{1\ 2\cdots n}}}=\sum_{r=1}^{n}y_{rb} \tag{8-8-30}$$

另一方面，$W_{ut|\overline{\overline{1\ 2\cdots t-1\ t+1\cdots u-1\ u+1\cdots n}}}$ 是 N_B 合并除顶点 t 和 u 外的顶点$1,2,\cdots,n$所得的网络的2-树 $t_{2ut,n}$ 的树枝导纳乘积之和．合并除顶点 t，u 外的顶点$1,2,\cdots,n$所得的网络如图8-8-7所示。因此

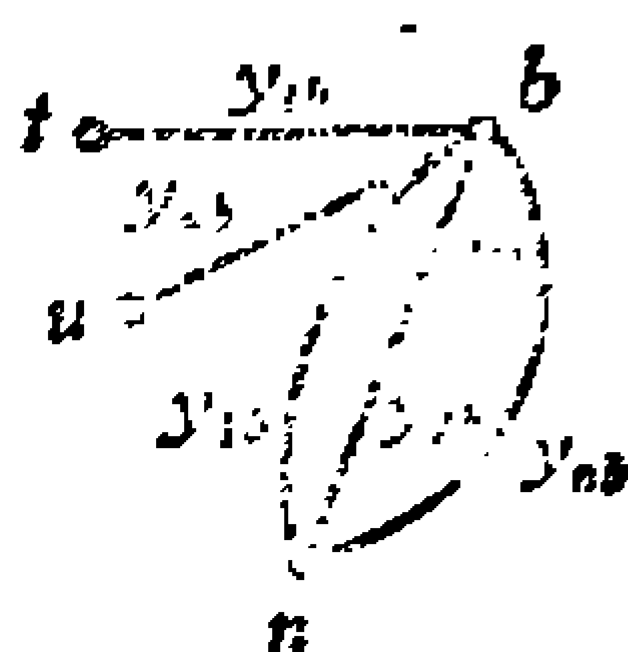


图8-8-7　合并除t、u外的顶点$1,2,\cdots,n$的N_B

$$W_{ut|\overline{\overline{1\ 2\cdots t-1\ t+1\cdots u-1\ u+1\cdots n}}}=y_{tb}y_{ub} \tag{8-8-31}$$

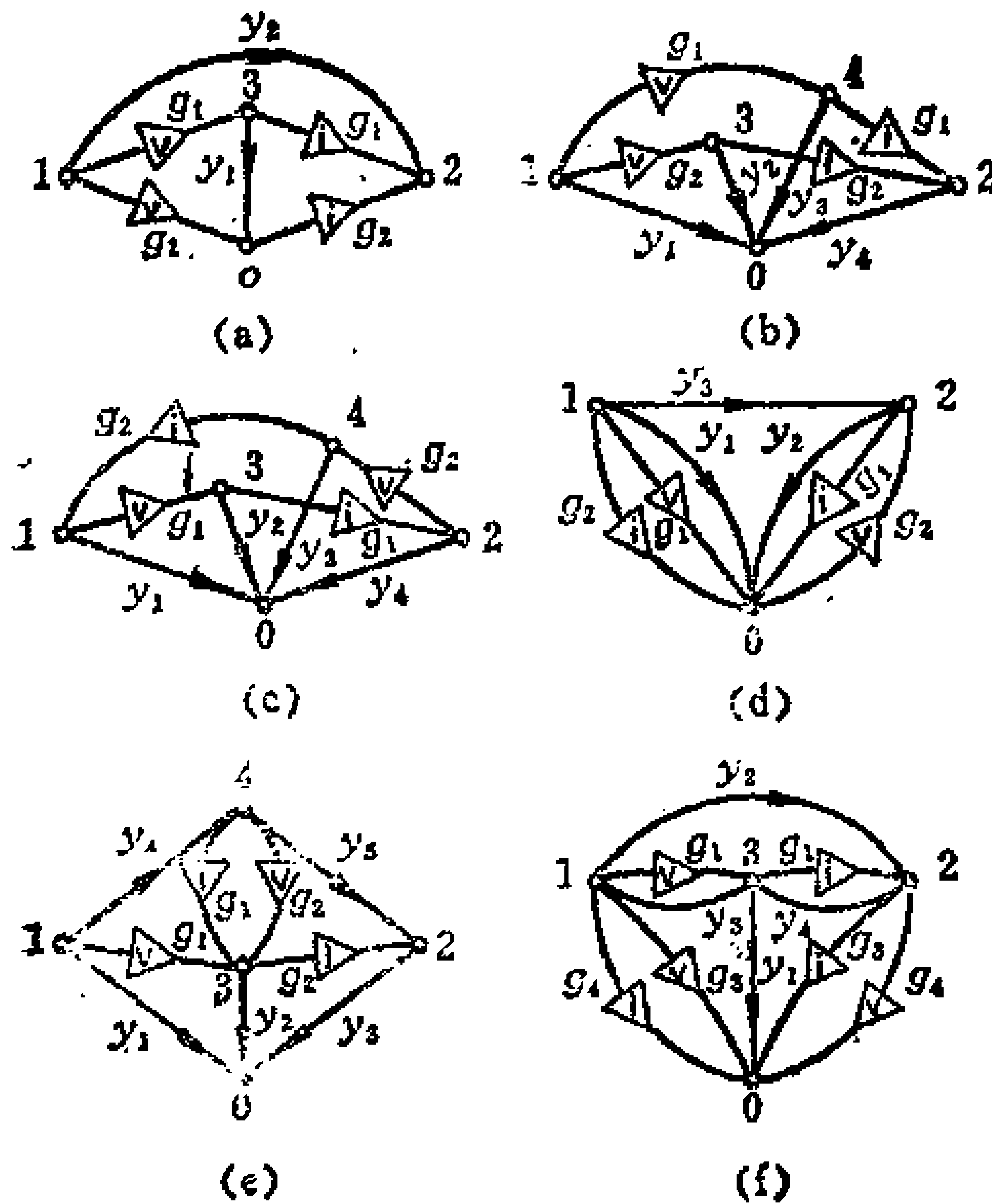
于是

$$y_{tu}=\frac{y_{tb}y_{ub}}{\left(\sum_{k=1}^{n}y_{rb}\right)} \tag{8-8-32}$$

这就是网孔-星形变换的公式。当 $n=3$ 时，式(8-8-32)就是众所周知的 t-π 变换。

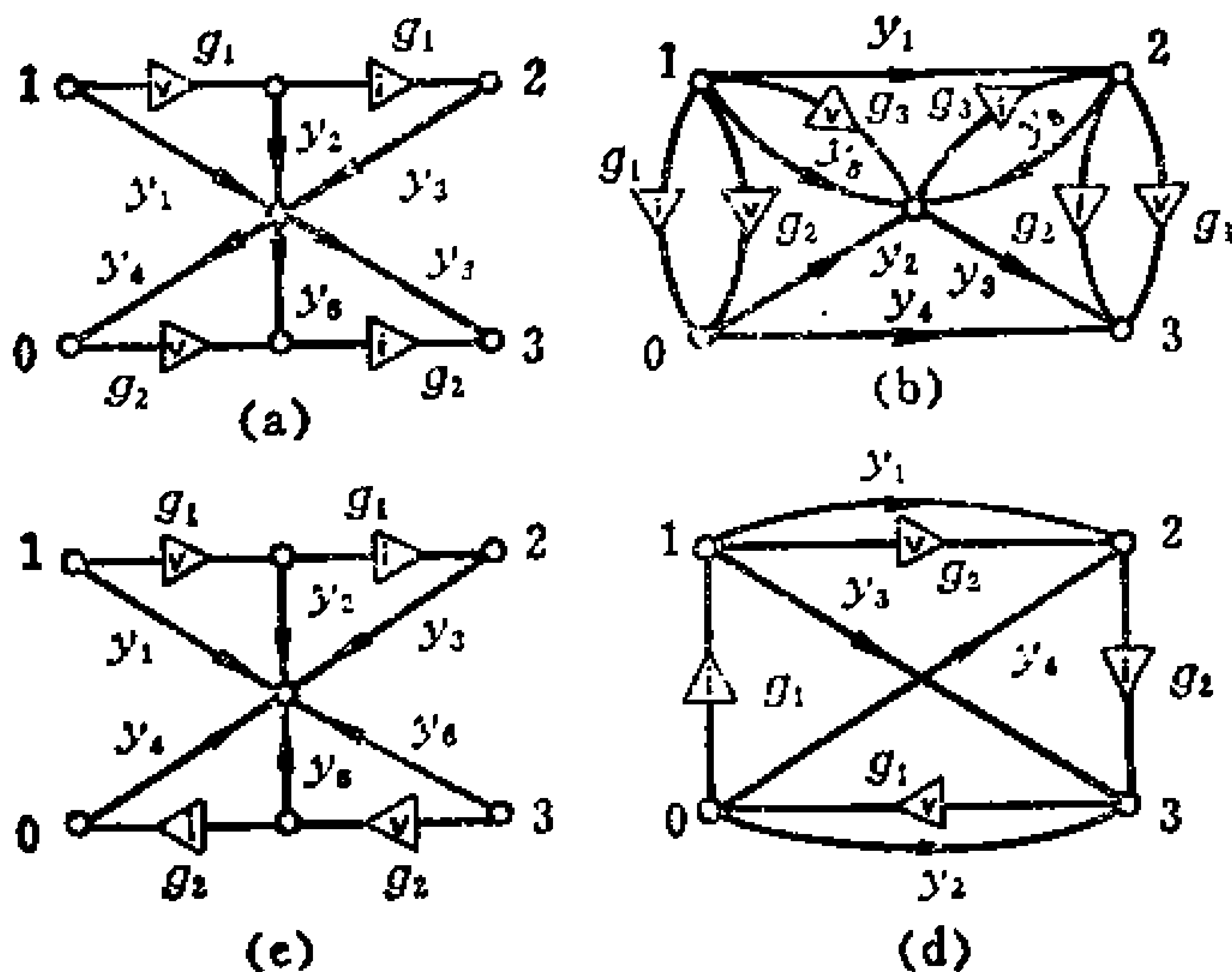
习　题

1. 利用式(8-1-23)，(8-3-11)，(8-4-1)和(8-5-5)给出的拓朴公式求出图 P-8-1中网络的开路策动点函数 I_{10}/V_{10} 和转移函数 I_{20}/V_{10}。



图P-8-1　似有源网络

2. 利用式(8-1-23)，(8-3-11)和(8-5-5)求出图P-8-2中网络的开路转移函数 I_{23}/V_{10}。



图P-8-2 似有源网络

3. 利用式(8-4-1)和(8-5-5)，求出图P-8-2中网络的电压比 V_{23}/V_{10}。

4. 利用似有源网络的拓扑公式〔式(8-1-23)，(8-3-11)和(8-5-5)〕证明对于似无源网络式(7-5-60)给出的拓扑公式 $I_{23}/V_{10}=V/(W_{12,30}-W_{13,20})$

提示：一个包含边 $y_{23,10}$ 的树或在 $W_{12,30}$ 中，或在 $W_{13,20}$ 中，其中 $y_{23,10}$ 的电流边是从顶点 2 到顶点 3，而 $y_{23,10}$ 的电压边是从顶点 1 到顶点 0。

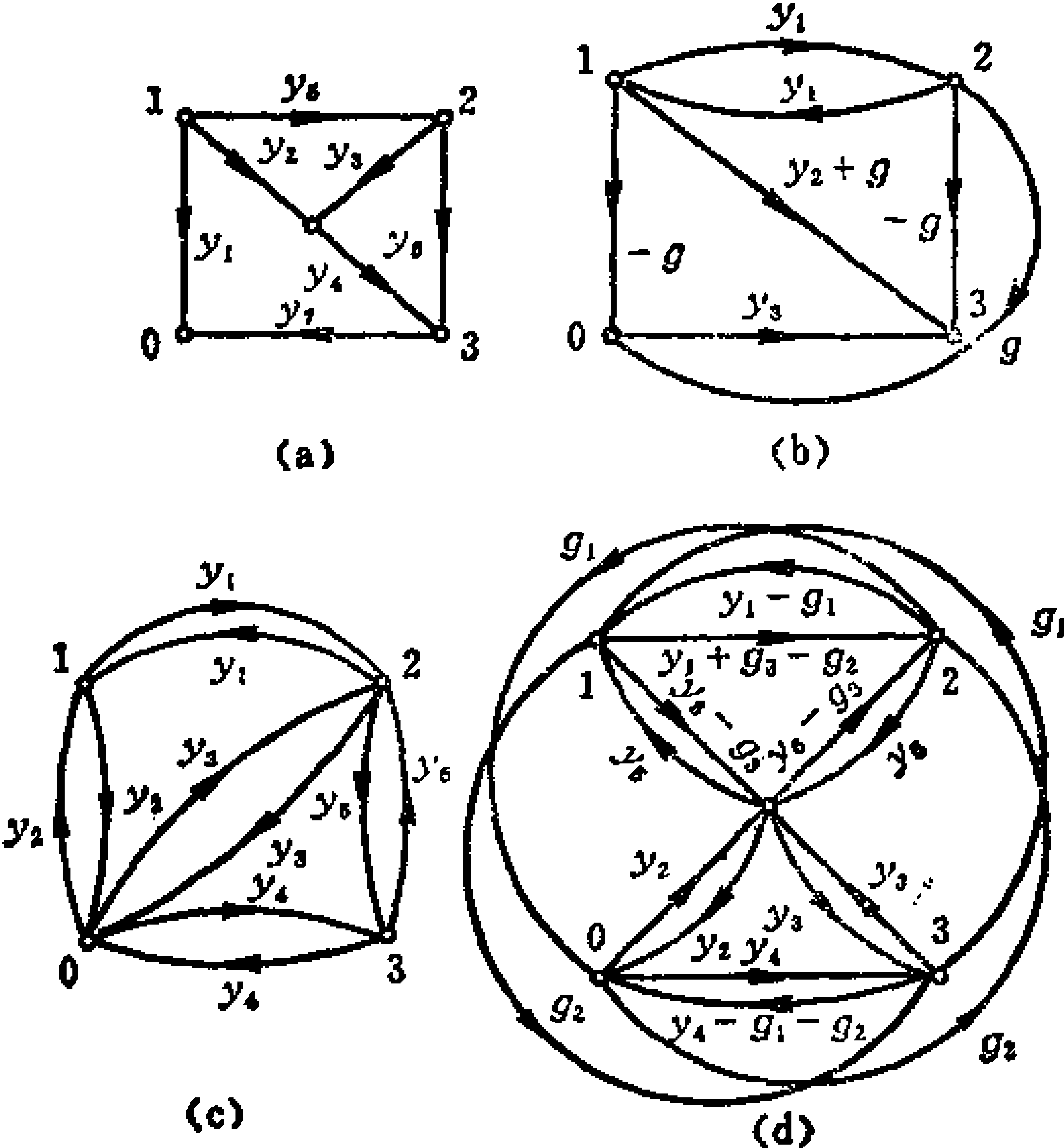
5. 说明 $B_vZB_i^t$ 是一个网络的网孔阻抗矩阵。其中 B_v 和 B^i 分别为电压图和电流图的回路矩阵，Z是阻抗对角矩阵（阻抗 j

等于导纳 y 的倒数)。

6.证明或否定以下说法：为了确定一个完全树的符号，我们将所有似无源元件短路，然后求所得图的符号置换。换句话说，一个完全树的符号仅取决于这个完全树的似有源元件。

7.先将网络变成单向网络，再利用式(8-7-22)求出图 P-8-1中网络的开路策动点函数 I_{10}/V_{10} 和开路转移函数 I_{20}/V_{10}。

8.推导一种求单向网络电压比的方法，并用此法求出图 P-8-8中单向网络的电压比 V_{23}/V_{10}，以检验你的方法正确与否。



图P-8-8 单向导纳网络

9. 当单向网络没有相消项时，找出公式

$$\Delta = \sum \text{有向树 } t_0 \text{ 树枝导纳乘积}$$

成立的条件。

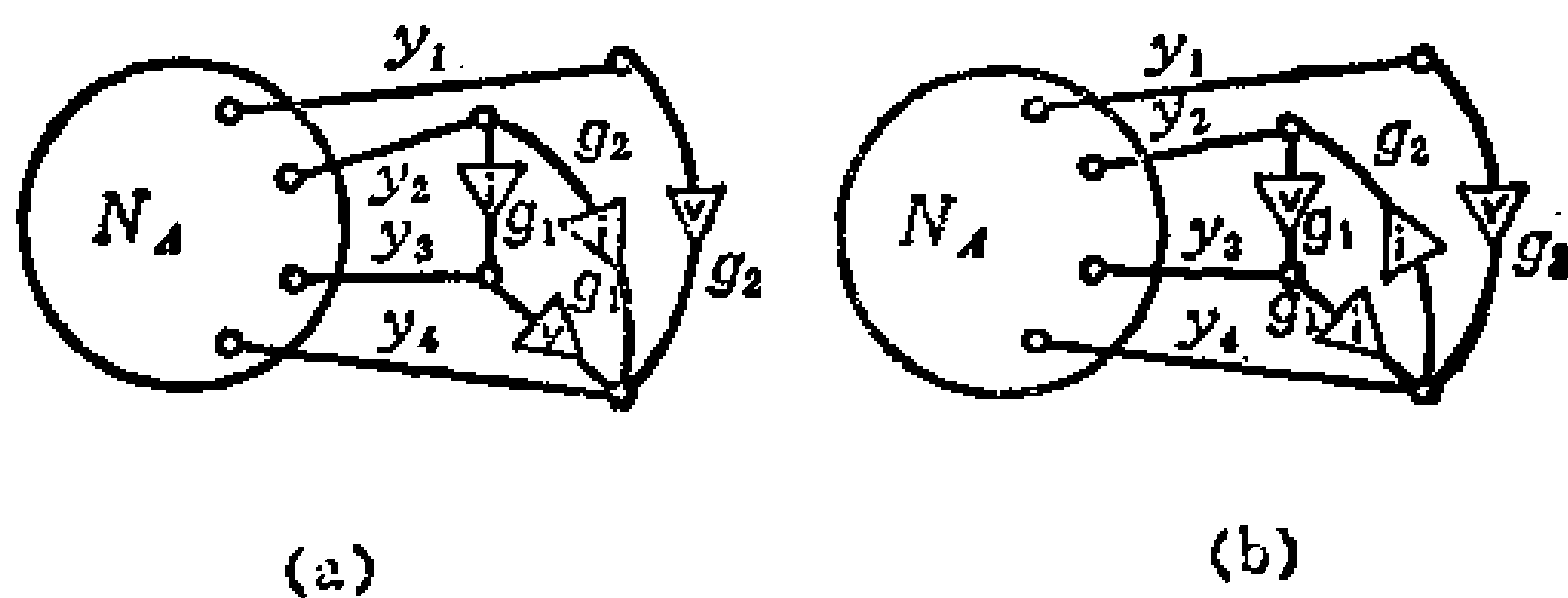
10. 推导在有固定参考点的单向网络中求有向树数目的公式.

11. 推导一个单向网络的网孔阻抗矩阵行列式的公式。

12. 证明式(8-7-23)。

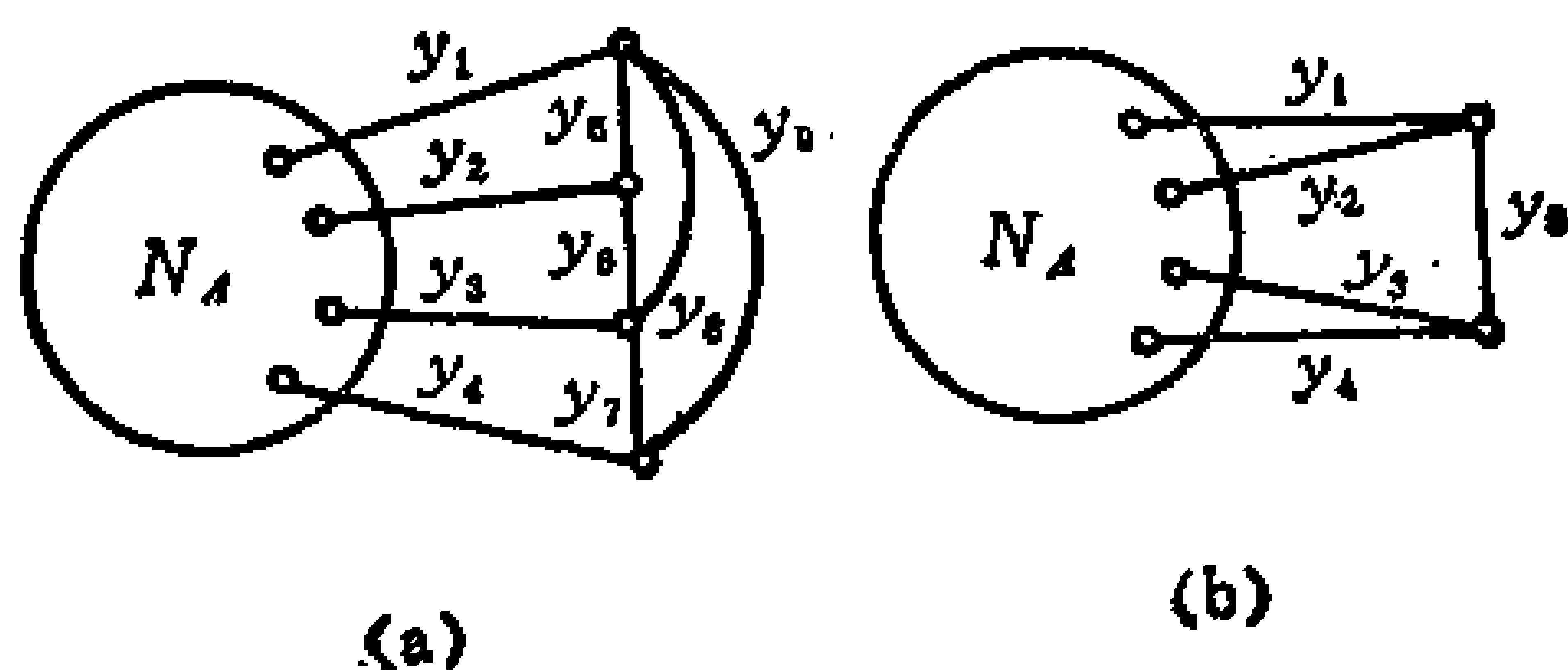
13. 参照式(8-7-23)，推导 Δ_{ij} 的拓扑公式。

14. 推导单向网络的短路网络函数的公式。



图P-8-15

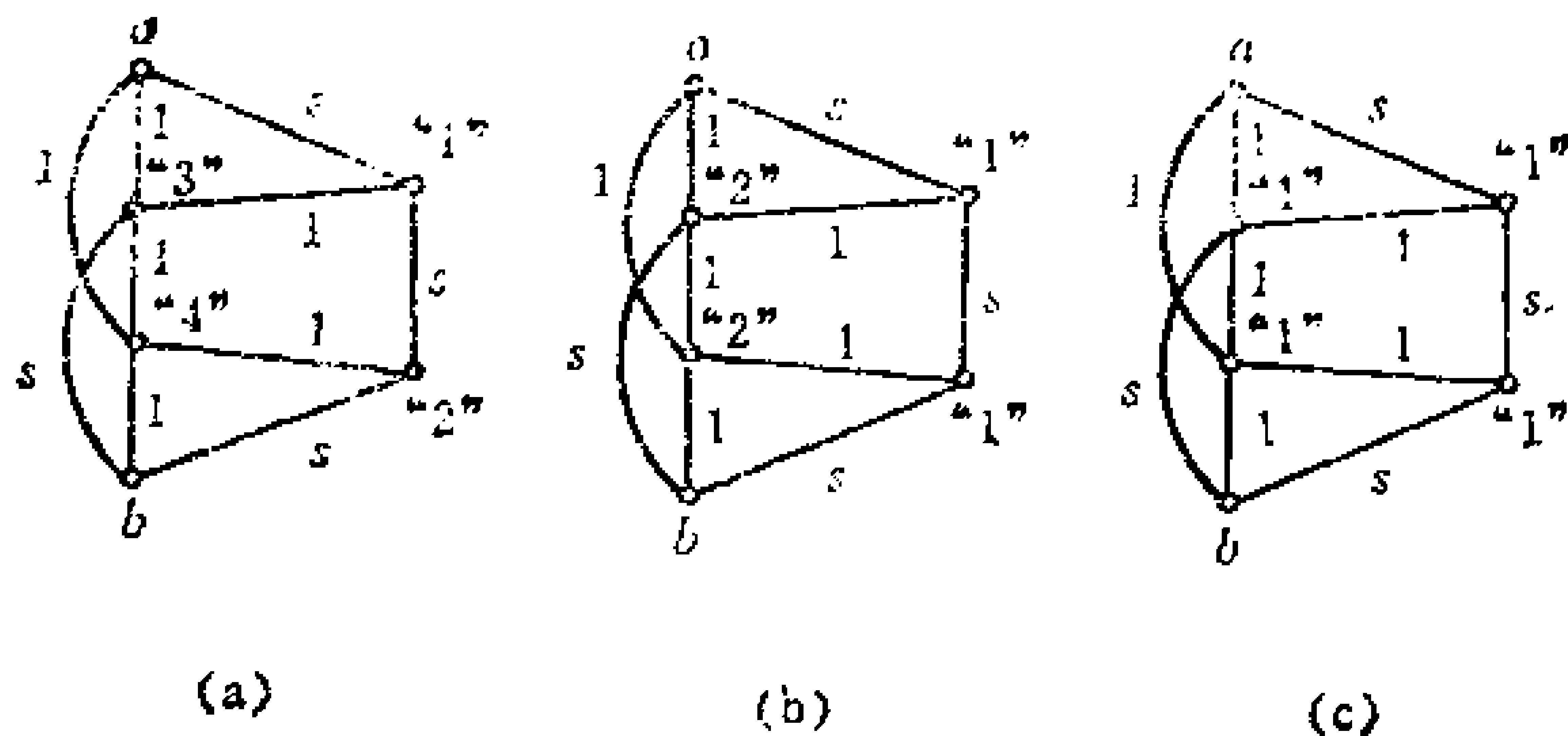
15. 利用式(8-8-9)，(3-8-10)和(8-8-12)，求出图 P-8-15中网络的等效网络.



图P-8-16

16 利用式(8-8-12)和(8-8-13)，求出图P-8-16中网络的等效网络。

17. 求出图P-8-17中网络的开路策动点函数V_{ab}/I_{ab}，逐次运用式(8-8-21)以及式(8-8-25)或(8-8-32)，使标"1"的顶点首先被移去，然后用一步运算移去所有标"2"的顶点，接着移去标"3"的顶点，最后移去标"4"的顶点。



图P-8-17

第九章　树的生成

9-1　生成树的必要性

考虑矩阵

$$M=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ & \cdots & & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \tag{9-1-1}$$

M的行列式能表示为

$$|M|=\sum_{(j)}\delta_{j_1j_2\cdots j_n}m_{1j_1}m_{2j_2}\cdots m_{nj_n} \tag{9-1-2}$$

我们可以看出，只要M的元素互不相同，上式中任意两项$m_{1j_1}m_{2j_2}\cdots m_{nj_n}$与$m_{1j_1'}m_{2j_2'}\cdots m_{nj_n'}$是不同的。但是，如果$M$是一个节点导纳矩阵（或其他任一导纳矩阵$Q_1YQ_2'$，这里$Q_1$和$Q_2$都是割集矩阵)。导纳$y$可以在不止一项中出现。因此，当我们展开这个矩阵的行列式时，一般说来，有许多项可以互相抵消。例如，图9-1-1中网络的节点导纳矩阵是

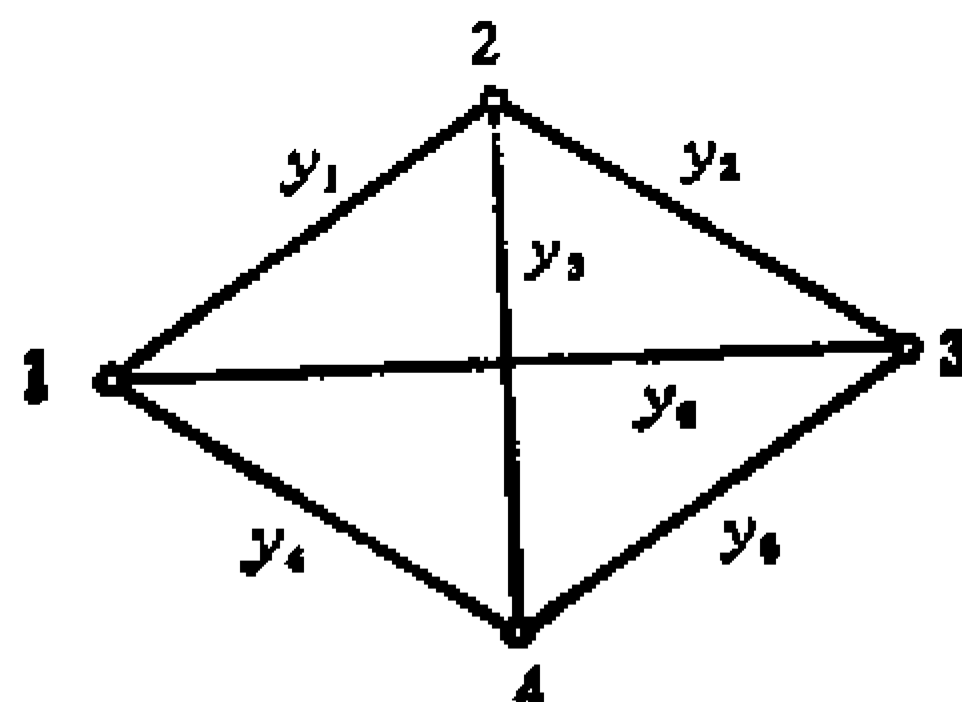


图9-1-1　一个网络

$$AYA^t=\begin{bmatrix} y_1+y_4+y_6 & -y_1 & -y_6 \\ -y_1 & y_1+y_2+y_3 & -y_2 \\ -y_6 & -y_2 & y_2+y_5+y_6 \end{bmatrix} \qquad (9\text{-}1\text{-}3)$$

这个矩阵的行列式是

$$\begin{aligned} |AYA^t| &= (y_1+y_4+y_6)[(y_1+y_2+y_3)(y_2+y_5+y_6)-y_2^2] \\ &\quad + y_1[(-y_1)(y_2+y_5+y_6)-y_2y_6] \\ &\quad - y_6[y_1y_2+y_6(y_1+y_2+y_3)] \\ &= y_1^2y_2+y_1^2y_5+y_1^2y_6+y_1y_2^2+y_1y_2y_5+y_1y_2y_6 \\ &\quad + y_1y_2y_3+y_1y_3y_5+y_1y_3y_6+y_1y_2y_4+y_1y_4y_5 \\ &\quad + y_1y_4y_6+y_2^2y_4+y_2y_4y_5+y_2y_4y_6+y_2y_3y_4 \\ &\quad + y_3y_4y_5+y_3y_4y_6+y_1y_2y_6+y_1y_5y_6+y_1y_6^2 \\ &\quad + y_2^2y_6+y_2y_5y_6+y_2y_6^2+y_2y_3y_6+y_3y_5y_6 \\ &\quad + y_3y_6^2-y_1y_2^2-y_2^2y_4-y_2^2y_6-y_1^2y_2-y_1^2y_5 \\ &\quad - y_1^2y_6-y_1y_2y_6-y_1y_2y_6-y_1y_6^2-y_2y_6^2-y_3y_6^2 \\ &= y_1y_2y_5+y_1y_2y_3+y_1y_3y_5+y_1y_3y_6+y_1y_2y_4 \\ &\quad + y_1y_4y_5+y_1y_4y_6+y_2y_4y_5+y_2y_4y_6+y_2y_3y_4 \\ &\quad + y_3y_4y_5+y_3y_4y_6+y_1y_5y_6+y_2y_5y_6+y_2y_3y_6 \\ &\quad + y_3y_5y_6 \end{aligned}$$

其中有许多项被相消掉了。由此式我们可以看出，前面给出的网络（除单向网络外的所有网络）的拓扑公式的一个优点就是，只要所给网络的导纳互不相同，就不会有这些相消项。

我们前面研究的网络拓扑分析要求知道网络的所有的树。假定我们有一个由 n_v 个顶点，n_e 条边组成的网络，为了得到所有的树，要检查 n_v-1 条边的所有可能组合，这样我们必须检验 $\binom{n_e}{n_{v-1}}$ 个边集合。例如，对于有 5 个顶点和10条边的完全图来说，4 条边的集合有 $\binom{10}{4}=210$ 个，然而，其中的树有 $5^3=125$

个．对于 6 个顶点的完全图来说，5 条边的集合有3003个，但其中仅有 $6^4=1296$个树．7 个顶点的完全图有 6 条边的集合 54264 个，但其中仅有16807个是树。

以上事实说明，对 n_n-1 条边的所有集合进行检验以得到所有的树不是一种简便的方法．理想的方法是按照一定的步骤生成树，而无须担心我们是否得到了所有的树；并且，这种系统的方法还应当保证，同一个树不会重复产生，因而用不着检查重复的树。这一章我们要研究两种生成树的方法，这两种方法都不会产生重复的树，而且步骤都相当简单．用这两种方法求所有的树所花的计算量也大致相同。

9-2 用初等树变换来生成树

设 t_1 和 t_2 是线图 G 的树，我们已经知道，如果 t_1-t_2 中有 k 条边，则 t_1 与 t_2 的距离是 k．显然，如果 t_1-t_2 中有 k 条边，那么 t_2-t_1 中也有 k 条边．假定 t_1 与 t_2 的距离为 1，且

$$t_1-t_2=(e) \tag{9-2-1}$$

$$t_2-t_1=(e') \tag{9-2-2}$$

则 t_2 可以写为

$$t_2=t_1\oplus(e,e') \tag{9-2-3}$$

这就是从 t_1 到 t_2 的初等树变换．

考虑关于树 t_1 的一个基本割集 S。假定 S 包含 t_1 中的边 e，于是我们知道，t_1 中其他边都不会在 S 中．我们用符号$S_e(t_1)$来表示这个割集，其中下标 e 表示边 e 在 $S\cap t_1$ 中，括号中的 t_1 表示割集 $S_e(t_1)$是关于树 t_1 的一个基本割集．因为在关于树 t_1 的基本割集中，包含边 e 的仅有一个，故 $S_e(t_1)$就是包含边 e 的关于树 t_1 的基本割集．设$(e_1,e_2,\cdots,e_m)$是 t_1，则关于树 t_1 的基本割集的集合由 $S_{e_1}(t_1)$，$S_{e_2}(t_1)$，$\cdots$，$S_{e_m}(t_1)$组成．为了简单，我们

用 m 代替 n_v-1。

假定 $S_e(t_1)$ 由边 $e,a_1,a_2,\cdots,a_k$ 组成，又假定树 t_2 与 t_1 距离为 1 且不包含边 e。设

$$t_2-t_1=(b) \tag{9-2-4}$$

则将 b 添加到树 t_1 中，就会得到一个包含边 e 的回路。于是，据基本割集的定义，边 b 必在 $S_e(t_1)$ 中。

定理9-2-1 设 t_1 和 t_2 是树，且二者距离为 1。又设

$$t_1-t_2=(e) \tag{9-2-5}$$

$$t_2-t_1=(b) \tag{9-2-6}$$

则边 b 必在 $S_e(t_1)$ 中。反之，若边 b 在 $S_e(t_1)$ 中，则 $t_1\oplus(e,b)$ 是树。

现在，我们把定理9-2-1推广。

定理9-2-2 对于树 t_0，设 $t_1,t_2\cdots,t_p$ 是所有使

$$t_0-t_r=(e) \qquad r=1,2,\cdots,p \tag{9-2-7}$$

的树，又设

$$t_r-t_0=(b_r) \qquad r=1,2,\cdots,p \tag{9-2-8}$$

则

$$S_e(t_0)=(e,b_1,b_2,\cdots,b_p) \tag{9-2-9}$$

反之，假设 $S_e(t_0)$ 由式9-2-9给出，则对 $r=1,2,\cdots,p,t_0\oplus(e,b_r)$ 是满足式(9-2-7)的全部树。

例9-2-1 考虑图9-1-1中的线图，设 t_0 是 (y_1,y_2,y_3)，则树 $t_1=(y_2,y_3,y_4)$ 及 $t_2=(y_2,y_3,y_6)$ 是满足定理9-2-2中关于 y_1 条件的全部树。即

$$t_0-t_1=(y_1)$$

$$t_0-t_2=(y_1)$$

因此，基本割集 $S_{y_1}(t_0)=(y_1,y_4,y_6)$。

运用定理9-2-2，我们可以根据已知的关于树 t_0 的基本割集，得到所有与树 t_0 距离为 1 的树。这可以用下一个例子来说明。

例9-2-2 考虑图9-1-1中的线图，关于树 $t_0=(y_1,y_2,y_3)$ 的

基本割集的集合包括：

$$S_{y_1}(t_0)=(y_1,y_2,y_6)$$
$$S_{y_2}(t_0)=(y_2,y_5,y_6)$$
$$S_{y_3}(t_0)=(y_3,y_4,y_5)$$

于是，所有与 t_0 距离为 1 的树如下：

由$S_{y_1}(t_0)$，

$$t_1=t_0\oplus(y_1,y_4)=(y_2,y_3,y_4)$$
$$t_2=t_0\oplus(y_1,y_6)=(y_2,y_3,y_6)$$

由$S_{y_2}(t_0)$，

$$t_3=t_0\oplus(y_2,y_5)=(y_1,y_3,y_5)$$
$$t_4=t_0\oplus(y_2,y_6)=(y_1,y_3,y_6)$$

由$S_{y_3}(t_0)$，

$$t_5=t_0\oplus(y_3,y_4)=(y_1,y_2,y_4)$$
$$t_6=t_0\oplus(y_3,y_5)=(y_1,y_2,y_5)$$

现在，我们来定义树的集合 T^e。

定义9-2-1 $T^e=\{t_0\oplus(e,b);\ b\in S_e(t_0),b\neq e\}$ (9-2-10)

由此记号，我们有引理9-2-1。

引理9-2-1 与树 t_0 距离为 1 的每个树恰在以下集合的一个之中，这里 $t_0=(e_1,e_2,\cdots,e_m)$：

$$T^{e_1},\ T^{e_2},\ \cdots,T^{e_m}$$

运用定理9-2-2，证明是容易的。注意由于 T^{e_r}中的每一个树 t 是由替换 t_0 中的边 e_r 得到的，故树 t 不可能包含边 e_r。另一方面，因为 T^{e_r} 中的树 t 与 t_0 距离为 1，故 t_0 中除 e_r 外所有的边都在 t 中。因此，若 $s\neq r$，则树 t 不可能在 T^{e_s} 中。这样，对 $k=1,2,\cdots,m$，T^{e_k} 中所有的树都与 t_0 不同。

一般地说，$T^{e_1},T^{e_2},\cdots,T^{e_m}$ 中的树再加上 t_0 还不是一个线图中所有的树。如果我们取出在这些集合中之一的（比如说 T^{e_1}）每

一个树 t，求出所有和 t 距离为 1 的树，我们就可能求出更多的树。

为了考查这一点，设 $\underset{\sim}{T}^{e_r e_s}$ 为如下定义的树的集合：

$$\underset{\sim}{T}^{e_r e_s}=\{t'\oplus(e_s,b);b\in S_{e_s}(t'),t'\in T^{e_r},b\neq e_s\} \qquad (9\text{-}2\text{-}11)$$

例如，从例9-2-2中的 $T^{y_1}=\{(y_2,y_3,y_4),(y_2,y_3,y_6)\}$，这里 $t_0=(y_1,y_2,y_3)$，我们可以得到 $\underset{\sim}{T}^{y_1y_2}$ 如下。在图9-1-1 的线图中，$t_1=(y_2,y_3,y_4)$，割集 $S_{y_2}(t_1)$ 是

$$S_{y_2}(t_1)=(y_2,y_5,y_5)$$

而割集 $S_{y_2}(t_2)$（这里 $t_2=(y_2,y_3,y_6)$）是

$$S_{y_2}(t_2)=(y_1,y_2,y_4,y_5)$$

注意，$S_{y_2}(t_1)$和 $S_{y_2}(t_2)$分别是关于树 t_1 和树 t_2 的基本割集，并且，边 y_2 必然在这两个基本割集中。因此，集合 $\underset{\sim}{T}^{y_1y_2}$ 由以下的树组成：

$$\left.\begin{array}{l} t_1'=t_1\oplus(y_2,y_5)=(y_3,y_4,y_5) \\ t_2'=t_1\oplus(y_2,y_6)=(y_3,y_4,y_6) \end{array}\right\}\text{由 } S_{y_2}(t_1)\text{得到}$$

$$\left.\begin{array}{l} t_3'=t_2\oplus(y_2,y_1)=(y_1,y_3,y_6) \\ t_4'=t_2\oplus(y_2,y_4)=(y_3,y_4,y_6) \\ t_5'=t_2\oplus(y_2,y_5)=(y_3,y_5,y_6) \end{array}\right\}\text{由 } S_{y_2}(t_2)\text{得到}$$

对于这个集合 $\underset{\sim}{T}^{y_1y_2}$，有两个问题，一个是 t_3' 与 t_0 的距离为 1，这样 t_3' 就在集合 T^{y_1},T^{y_2} 和 T^{y_3} 的一个之中。第二个问题是由 t_1 得到的树 t_2' 和由 t_2 得到的树 t_4' 相同。因此，为了确实只得到与 t_0 的距离为 2 的树，我们还必须找出更多的限制条件。

定义9-2-2

$$T^{e_1e_2}=\{t'\oplus(e_2,b);b\in S_{e_2}(t')\cap S_{e_2}(t_0),t'\in T^{e_1},b\neq e_2\} \quad (9\text{-}2\text{-}12)$$

例如，由例9-2-1和9-2-2中的 $S_{y_2}(t_1)$和 $S_{y_2}(t_0)$得

$$S_{y_2}(t_1)\cap S_{y_2}(t_0)=(y_2,y_5,y_6)\cap(y_2,y_5,y_6)=(y_2,y_5)y_6)$$

故 t_1' 和 t_2' 在 $T^{y_1y_2}(t_0)$中。另一方面，

$S_{y_2}(t_2)\cap S_{y_2}(t_0)=(y_1,y_2,y_4,y_5)\cap(y_2,y_5,y_6)=(y_2,y_5)$
因此，在 t'_3,t'_4 和 t'_5 中，只有 t'_5 在 $T^{y_1y_2}$ 中，即

$T^{y_1y_2}=\{(y_3,y_4,y_5),(y_3,y_4,y_6),(y_3,y_5,y_6)\}$

因为 $S_{e_2}(t_0)$是关于树 t_0 的包含边 e_2 的基本割集，而边 e_1 和 e_2 都在 t_0 中，故割集 $S_{e_2}(t_0)$不包含边 e_1。于是，$S_{e_2}(t')\cap S_{e_2}(t_0)$ 也不包含边 e_1.因此不可能用边 e_1 去置换边 e_2 来得到 $T^{e_1e_2}$ 中的树. 这就说明，$T^{e_1e_2}$ 中每一个树都包含 t_0 中除 e_1 和 e_2 之外的所有边. 故 $T^{e_1e_2}$ 中的每一个树与 t_0 距离为 2。

一般地说，我们定义集合 $T^{e_1e_2\cdots e_k}$ 如下。

定义9-2-3

$$T^{e_1e_2\cdots e_{k-1}e_k}=\{t'\oplus(e_k,b);b\in S_{e_k}(t')\cap S_{e_k}(t_0),t'\in T^{e_1e_2\cdots e_{k-1}},b\neq e_k\} \tag{9-2-13}$$

其中 $t_0=(e_1,e_2\cdots e_m),k\leq m$。

t_0 称为参考树. 我们将要说明，从 t_0 出发，根据式(9-2-13)，可以生成所有的树.换句话说，按照式(9-2-13)生成所有的树的步骤如下。首先，我们生成第一个树 $t_0=(e_1,e_2,\cdots e_m)$，以它作为参考树. 然后用基本割集 $S_{e_i}(t_0)$中的弦去替换枝 e_i，生成类 T^{e_i}，这里 $i=1,2,\cdots,m$. 取这些类 T^{e_i} 中的每一个，对于 $i<j\leq m$，用弦 $e_k\in S_{e_j}(t)\cap S_{e_j}(t_0)$替换枝 e_j. 然后，我们又从 $T^{e_ie_j}$ 出发，生成 $T^{e_ie_je_k}$，这里 $i<j<k\leq m$，且每一次都要求弦是在关于当前的（即由它出发的）树与参考树的基本割集之中. 现在，我们可以说明两个事实. 第一，我们可以按照这个过程生成所有的树. 第二，不会发生重复. 为了证明这两个事实，我们采用如下的定义。

定义9-2-4 设 t 和 t' 是两个树，t_0 是参考树. 如果

1. $e_j\notin t',e_i\in t'\cap t_0$（显然 $e_j\neq e_i$）.
2. $e_j\in S_{e_i}(t')\cap S_{e_i}(t_0)$

则称边的有序对(e_i,e_j)关于 t' 和 t_0 具有前向性质。

如果

1. $e_j \in t$, $e_i \in t_0$, $e_i \neq e_j$.

2. $e_i \in S_{e_j}(t)$, $e_j \in S_{e_i}(t_0)$.

则称边的有序对(e_i, e_j)关于 t 和 t_0 具有后向性质。

运用式(9-2-13),我们可以看出,如果(e_i, e_j)关于t'和t_0具有前向性质,那么,通过上述步骤,用 e_j 替换 e_i,我们可以向前得到一个新的树 t''。如果(e_i, e_j)关于 t 和 t_0 具有后向性质,则用 e_i 去替换 t 中的边 e_j,就产生一个新的树 t'''.从这个新的树t'''出发,通过以上步骤,又可以生成 t。这就是说,我们可以通过上述步骤向后生成树 t''',它与参考树 t_0 有一条以上的公共边。为了证明这一结论的正确性,我们只需要注意,如果我们从 t 用 e_i 替换 e_j 来生成 t''',相应的基本割集不变,即

$$S_{e_j}(t) = S_{e_i}(t''') \tag{9-2-14}$$

现在我们要说明,如果 t_0 是参考树,而 t 是任意一个树,我们总可以找到一个树 t',使 t' 与 t_0 的公共边比 t 与 t_0 的公共边多一条,且 t 可以由 t' 通过上述步骤生成。于是根据归纳法,我们可以从参考树出发,通过上述步骤生成任何一个树。

定理9-2-3 设 t_0 是参考树,t 是任意一个树($t \neq t_0$)。对于每一条边 $e_i \in t_0 - t$,存在一条边 $e_j \in t - t_0$,使得(e_i, e_j)关于 t 和 t_0 具有后向性质。因此存在一个树 t',使得(e_i, e_j)关于 t' 和 t_0具有前向性质。

证明:设 $C_{e_i}(t)$是由弦 e_i 产生出树 t 的基本回路,即 $C_{e_i}(t)$是一个由树 t 加上边 e_i 所构成的一个回路。因为 $S_{e_i}(t_0)$是一个割集,$S_{e_i}(t_0) \cap C_{e_i}(t)$ 包含偶数条边且非空,所以在交集中还有另一条边 e_j。因为 $e_j \in C_{e_i}(t)$,所以 $e_j \in t$ 并且 $e_i \in S_{e_j}(t)$。因为 $e_j \in S_{e_i}(t_0)$,$e_j \notin t_0$,因此(e_i, e_j)关于 t 和 t_0 具有后向性质。其余仿此证明。(证毕)

这样,一个线图的每一个树都能通过这一过程生成。然而,

如果 $S_{e_i}(t_0)\cap C_{e_i}(t)$ 包含两条以上的边，则有可能多次生成 t 。如果我们不作某些限制，那么重复是不可避免的，这可从下例中看到。

例9-2-13 考虑图9-1-1中的线图。设 t_0 是(y_1,y_3,y_6)，则

$$T^{y_1}=\{(y_3,y_4,y_5),(y_2,y_5,y_6)\}$$

$$T^{y_1y_5}=\{(y_2,y_3,y_4),(y_3,y_4,y_6),(y_2,y_3,y_6)\}$$

因为

$$S_{y_3}(t_0)=(y_2,y_3,y_4,y_6)\text{和}S_{y_3}(y_2,y_3,y_4)=(y_1,y_3,y_5,y_6)$$

据式(9-2-13)，对 $S_{y_3}(y_2,y_3,y_4)\cap S_{y_3}(t_0)$ 中除 y_3 外所有的 b，$(y_2,y_3,y_4)\oplus(y_3,b)$ 就是(y_2,y_4,y_6)。又因为 $S_{y_3}(y_3y_4,y_6)=(y_1,y_2,y_3)$，故对 $S_{y_3}(y_3,y_4,y_6)\cap S_{y_3}(t_0)$ 中除 y_3 外所有的 b，$(y_3,y_4,y_6)\oplus(y_3,b)$ 也是(y_2,y_4,y_6)。这样，我们看到了在由式(9-2-13)得到的 $T^{y_1y_5y_3}$ 中就有重复的树。

假定我们采用序列$(y_1y_3y_5)$，即先形成 T^{y_1}，后形成 $T^{y_1y_3}$，最后再形成 $T^{y_1y_5y_3}$ 来得到树(y_2,y_4,y_6)，则

$$T^{y_1y_3}=\{(y_2,y_5,y_6),(y_2,y_4,y_5)\}$$

现在，对 $S_{y_5}(y_2,y_5,y_6)\cap S_{y_5}(t_0)$ 中除 y_5 外所有的 b，$(y_2,y_5,y_6)\oplus(y_5,b)$ 不是树，因为在这种情况下边 b 不存在。而对 $S_{y_5}(y_2,y_4,y_5)\cap S_{y_5}(t_0)$ 中除 y_5 外所有的 b，$(y_2,y_4,y_5)\oplus(y_5,b)=(y_2,y_4,y_6)$。这样，在由 $T^{y_1y_3}$ 通过式(9-2-13)得到的 $T^{y_1y_3y_5}$ 中，就没有重复的树。

不重复地生成树的技巧基于以下基本事实。

引理9-2-2 设 e_i 是 t_0 中的一条边，它与 t_0 中一个度数为1的顶点相连。又设 t 是任意的一个树，$e_i\notin t$。那末必定正好存在一条边 $e_j\in t$，使得(e_i,e_j)关于 t 和 t_0 具有后向性质。

证明： 由于定理9-2-3的证明是那样地清楚，我们仅需要说明 $S_{e_i}(t_0)\cap C_{e_i}(t)$ 中，只包含两条边 e_i 和 e_j。

因为 e_i 是 t_0 的一条边，并且与 t_0 中一个度数为1的顶点相

连，所以 e_i 关于 t_0 的基本割集由与这个顶点（在 t_0 中度数为 1，且与 e_i 连接）关联的边组成.显然,在这些边中只有一条在 $C_{e_i}(t)$ 中，这是因为 $C_{e_i}(t)$ 的每一个顶点的度数为 2，e_i 是与该顶点相连的两条边中的一条，这样，只有 (e_i,e_j) 具有对于 t 和 t_0 的后向性质。（证毕）

这个引理保证了在 $T^{e_1e_2\cdots e_{k-1}e_k}$ 中对于任一个树 t，如果边 e_k 与参考树 t_0 中度数为 1 的顶点相连，那么在 $T^{e_1e_2\cdots e_{k-1}}$ 中只有一个树，从它出发，按照式(9-2-13)能得到树 t。

我们也注意到，任何重复总是发生在同一类 $T^{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_r}}$ 中。换句话说，如果

$$(i_1,i_2,\cdots,i_r)\neq(j_1,j_2,\cdots,j_p) \qquad (9\text{-}2\text{-}15)$$

则

$$T^{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_r}}\cap T^{e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_p}}=\phi \qquad (9\text{-}2\text{-}16)$$

这个结果可以直接导出，因为若 t 和 t' 是两个不同类的树，则

$$t_0-t=(e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_r}) \qquad (9\text{-}2\text{-}17)$$

$$t_0-t'=(e_{j_1},e_{j_2},\cdots,e_{j_p}) \qquad (9\text{-}2\text{-}18)$$

由假设即知，它们是不同的。这就足以使我们找到避免在同一类中重复的一种步骤。

定义9-2-5 如果边的有序集$(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k})$的每一个子集$(e_{i_1},e_{i_2}\cdots e_{i_r})(r=1,2,\cdots,k)$都由连通子图的边所组成，则称边的有序集构成一个$M$序列。

大家知道，一个树的边总可以排成一个M序列。事实上，如果开始的树 t_0 是由计算机生成的，要将 t_0 的边排成M序列是很容易的。由M序列的定义，我们得到定理9-2-4。

定理9-2-4 设 $t_0=(e_1,e_2,\cdots,e_m)$是参考树，如果$(e_1,e_2\cdots e_m)$是一个M序列，则由 $T^{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{p-1}}}$按照式(9-2-13)生成的 $T^{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_p}}$中的树全部是不同的。其中 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant m$。

证明： 因为对于第一步由 t_0 到 $T^{e_{i_1}}$ 来说，结果是显然的，于是我们可以作归纳法假设，令 $T^{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{p-1}}}$ 中的树均不相同。

这样，如果这个类中的两个树由于替换了 e_{i_p} 而生成 $T^{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_p}}$ 中相同的树 t，在这两种情况下，必然是用边 e_i 和 e_j 去替换 e_{i_p} 的。为了证明所需结果，只要证明对于类 $T^{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_p}}$ 中一个任意的树 t，只有一条边 e_j 使得有序对 (e_{i_p},e_j) 关于 t 和 t_0 具有后向性质，因为这样的 t 在 $T^{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{p-1}}}$ 中就只有一个先前树 t_1。为了证明这个结论，我们将线图变换成另一个图，其中 t 和 t_0 变成树 t' 和 t'_0，边 e_{i_p} 变成一条端边。然后由引理9-2-2来证明定理9-2-4。

我们注意在 M 序列 $(e_1e_2\cdots e_m)$ 中，e_{i_p} 后面的边是 t 和 t_0 的公共边（它们尚未被替换）。我们在所给的线图 G 中将这些边短路，得到一个新的线图 G'。设 t' 和 t'_0 分别是 t 和 t_0 在短路 $t\cap t_0$ 的所有边后剩下的子图，因为 t' 和 t'_0 是 G' 的树，这样，对于留下的树，e_{i_p} 的基本割集不受影响，即

$$S_{e_{i_p}}(t')=S_{e_{i_p}}(t) \qquad (9\text{-}2\text{-}19)^*$$

$$S_{e_{i_p}}(t'_0)=S_{e_{i_p}}(t_0) \qquad (9\text{-}2\text{-}20)$$

类似地，$T^{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{p-1}}}$ 中的树去掉 $t\cap t_0$ 中的边变成 G' 中的树，且对这一类中任意的 t'_1*，$S_{e_{i_p}}(t'_1)$ 不受影响。因此，用替换 e_{i_p} 的方法，在 G' 中产生的新树与 G 中的一样多。又由于 $(e_1e_2\cdots e_m)$ 是一个 M 序列，$(e_1,e_2,\cdots e_{i_{p-1}})$ 和 $(e_1,e_2,\cdots e_{i_p})$ 都是连通的，且都不包含回路。故 e_{i_p} 是 t'_0 中的端边。因此，据引理 9-2-2，只有一条边 $e_j\in t'$ 使得 (e_{i_p},e_j) 关于 t' 和 t'_0 具有后向性质。并且在 $T^{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{p-1}}}$ 中只有一个树 t'_1 不含 $t\cap t_0$ 中的边且能生成 t'。这就说明，在 $T^{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{p-1}}}$ 中只存在一个树 t_1，由它出发能生成 t。（证毕）

我们用下面的例子来说明上述整个过程。

例9-2-4 在9-2-1的线图中，经过以下步骤就将生成所有设

---

* 式9-2-19疑误，应删去。——译注

* 为了清楚起见，我们把原著此处的 t' 改成 t'_1，并把以下的叙述稍加更动。

——译注

有重复的树。

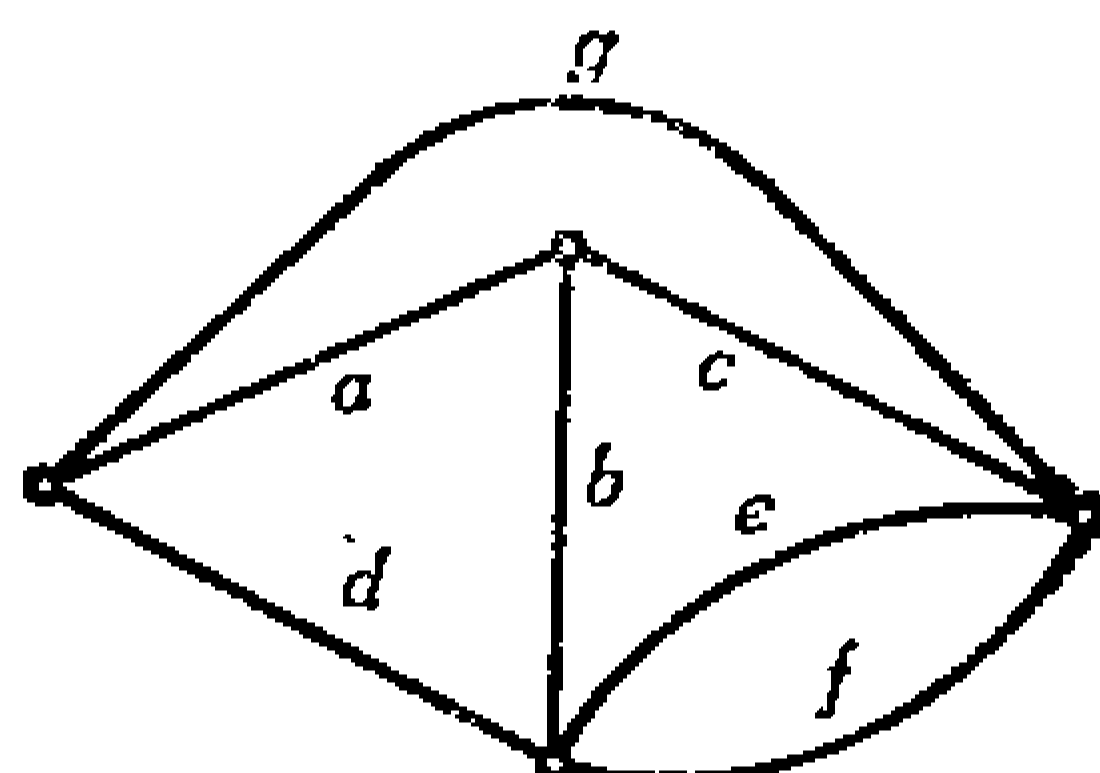


图9-2-1 线图G

第1步 取一个树t_0作为参考树。设

$$t_0=(a,b,g)$$

在t_0中选取边的一个M序列。设(abg)就是所选的M序列。

第2步 关于t_0的基本割集是

$$S_a(t_0)=(a,c,d,e,f),S_b(t_0)=(b,d,e,f),S_g(t_0)=(c,e,f,g)$$

第3步 按照式(9-2-10)构成T^a:

$$T_a=\{t_0\oplus(a,e_i);\ e_i\in S_a(t_0),e_i\neq a\}$$
$$=\{(b,c,g),(b,d,g),(b,e,g),(b,f,g)\}$$

第4步 构成T^{ab}:

$$T^{ab}=\{t'\oplus(b,e_i);e_i\in S_b(t')\cap S_b(t_0),t'\in T^a,e_i\neq b\}$$
$$=\{(c,d,g),(c,e,g),(c,f,g)\}$$

其中

$$S_b(b,c,g)\cap S_b(t_0)=(b,d,e,f)\cap(b,d,e,f)=(b,d,e,f)$$
$$S_b(b,d,g)\cap S_b(t_0)=(a,b,c)\cap(b,d,e,f)=(b)$$
$$S_b(b,e,g)\cap S_b(t_0)=(b)$$
$$S_b(b,f,g)\cap S_b(t_0)=(b)$$

第5步 构成T^{abg}:

$$T^{abg}=\{t'\oplus(g,e_i);\ e_i\in S_g(t')\cap S_g(t_0),t'\in T^{ab},e_i\neq g\}$$
$$=\{(c,d,e),(c,d,f)\}$$

其中

$$S_g(c,d,g)\cap S_g(t_0)=(a,b,e,f,g)\cap(c,e,f,g)=(e,f,g)$$
$$S_g(c,e,g)\cap S_g(t_0)=(a,d,g)\cap(c,e,f,g)=(g)$$
$$S_g(c,f,g)\cap S_g(t_0)==(g)$$

第6步　构成 T^{ag}：

$$T^{ag}=\{t'\oplus(g,e_i);e_i\in S_g(t')\cap S_g(t_0),t'\in T^a,e_i\neq g\}$$
$$=\{(b,c,d),(b,d,e),(b,d,f)\}$$

其中

$$S_g(b,c,g)\cap S_g(t_0)=(a,d,g)\cap(c,e,f,g)=(g)$$
$$S_g(b,d,g)\cap S_g(t_0)=(c,e,f,g\cap(c,e,f,g)=(c,e,f,g)$$
$$S_g(b,e,g)\cap S_g(t_0)=(a,d,g)\cap(c,e,f,g)=(g)$$
$$S_g(b,f,g)\cap S_g(t_0)=(g)$$

第7步　构成 T^b：

$$T^b=\{t_0\oplus(b,e_i);e_i\in S_b(t_0),e_i\neq b\}$$
$$=\{(a,d,g),(a,e,g),(a,f,g)\}$$

第8步　构成 T^{bg}：

$$T^{bg}=\{(a,c,d),(a,d,e),(a,d,f)(a,c,e),(c,c,f)\}$$

其中

$$S_g(a,d,g)\cap S_g(t_0)=(c,e,f,g)\cap(c,e,f,g)=(c,e,fg)$$
$$S_g(a,e,g)\cap S_g(t_0)=(b,c,d,g)\cap(c,e,f,g)=(c,g)$$
$$S_g(a,f,g)\cap S_g(t_0)=(b,c,d,g)\cap(c,e,f,g)=(c,g)$$

第9步　构成 T^g：

$$T^g=\{t_0\oplus(g,e_i);\ e_i\in S_g(t_0),e_i\neq g\}$$
$$=\{(a,b,c),(a,b,e),(a,b,f)\}$$

G中所有的树就是类 $T^a,T^{ab},T^{abg},T^{ag},T^b,T^{bg},T^g$ 中的树再加上参考树 t_0。

表面看来，在上面所给的过程中，最多要检验 2^m-1 个替换集合（这里 $m=n_v-1$）.但是，我们注意到，如果任何一个替换产生了空集，接下来的替换就不需要再检验. 因此，需要检验的数目可少于 2^m-1。

在生成完全树（对有源网络而言）时，不论对电流图还是对电压图，我们都可以利用电流图的 M 序列，并允许所得的结果有相同的次序。在这种情况下，电压图的树将会出现重复，但这并不会使问题复杂化. 对于有源网络来说，采用这种树的生成法有一个缺点，就是有可能生成超过需要的树. 这是因为完全树的数目一般都远少于电流图或电压图中树的数目。

9-3 完全树的生成

这里，我们要介绍一种用修改割集矩阵的办法生成所有的完全树的过程. 因为当电流图和电压图相同时，完全树就变成了树，所以这个过程对于生成一个线图中所有的树也适用.

设 Q_i 和 Q_v 分别是网络 G 的电流图 G_i 和电压图 G_v 的割集矩阵（或关联矩阵）.又设 Q_i 和 Q_v 的第 i 列都表示 G 的导纳 y_i. 对于 Q_i 和 Q_v 所作的如下运算称为初等运算：

1.把一行加到另一行，或从一行中减去另一行。

2.用(-1)乘一行.

3.将两行互相交换位置.

4.将两列互相交换位置.

结合运算 2 和 3，我们定义一个数 N 称为 M 数，用来表示我们为了使一个给定的矩阵成为所需的形式而用这两种运算的总次数。特别把 M 数 N_i 和 N_v 分别表示使割集矩阵（或关联矩阵）Q_i 和 Q_v 变成基本形式$[Q_{i_{11}}U]$和$[Q_{v_{11}}U]$所需要的运算次数，称为关于完全树 t_0 的基本 M 数，这里 t_0 对应于$[Q_{i_{11}}U]$ 和 $[Q_{v_{11}}U]$

中的单位矩阵。

考虑一个完全树 t．设 $A_i(t)$和 $A_v(t)$是 t 的电流图和电压图的关联矩阵，显然我们可以用初等运算把这两个矩阵变成单位矩阵，同时保持 $A_i(t)$和 $A_v(t)$的列之间的对应关系（也就是说，如果我们交换 $A_i(t)$的第 i 列和第 j 列，同时也交换 $A_v(t)$ 的第 i 列和第 j 列，反之亦然）．运算 1 不改变行列式的值，因此$A_i(t)\cdot A_v(t)$的行列式等于

$$|A_i(t)||A_v(t)| = (-1)^{N_i+N_v} \qquad (9\text{-}3\text{-}1)$$

考虑关联矩阵 A_i 和 A_v，其中

$$A_i = [A_{i_1} A_i(t)] \qquad (9\text{-}3\text{-}2)$$

$$A_v = [A_{v_1} A_v(t)] \qquad (9\text{-}3\text{-}3)$$

我们可用初等运算把这两个矩阵变成基本形式$[Q_{i_{11}} U]$和$[Q_{v_{11}} U]$．并且，为了使 $A_i(t)$和 $A_v(t)$变成基本形式中的单位矩阵，运算 2 和运算 3 对 A_i 用了 N_i 次，对 A_v 用了 N_v 次．因此，由式(8-1-23)给出的完全树 t 的符号等于$(-1)^{N_i+N_v}$。

例9-3-1 设一个给定网络的关联矩阵 A_i 和 A_v 是

$$A_i = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A_v = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

利用初等运算，我们能把这两个矩阵变成基本形式（基本割集矩阵）：

$$Q'_i = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$Q'_v = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

M数为 $N_i = 1$，$N_v = 4$。因此完全树 $t_0 = (y_3, y_4, y_5)$ 的符号是 $(-1)^{N_i+N_v} = -1$。

为了简便，我们用正号或负号作为上标来表示一个完全树 t 的符号。例如，上例中树 t_0 的符号是 -1，所以我们用$(y_3, y_4, y_5)^-$来表示。显然所有与完全树 t_0 距离为 1 的完全树在以下集合中：

$$\bigcup_{a\in t_0} T^a = \bigcup_{a\in t_0} \{t_0 \oplus (a,e); e \in S_a^i(t_0) \cap S_a^v(t_0), e \neq a\} \quad (9\text{-}3\text{-}4)$$

其中 $S_a^i(t_0)$是一个给定网络的电流图关于树 t_0 且包含边 a (t_0 的一条枝）的基本割集，$S_a^v(t_0)$是这个网络的电压图中对于 t_0 且包含枝 a 的基本割集。为了直接从矩阵 Q_i 和 Q_v 中求出式(9-3-4)给出的集合中的这些完全树，我们采用以下定义。

定义9-3-1 两个 $m\times n$ 矩阵 $P=[p_{ij}]$和 $R=[r_{ij}]$ 的运算$\odot$是P和R的对应元素的乘积．即

$$P\odot R = [p_{ij}r_{ij}] \quad (9\text{-}3\text{-}5)$$

例如，如果P和R是

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

则
$$P \odot R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

由这个定义，所有与 t_0 距离为1的完全树都可由矩阵 $[Q_{i_{11}}U]$ 和 $[Q_{v_{11}}U]$ 按如下步骤求得，其中 t_0 对应 U。

第一步　算出 $[Q_{i_{11}}U]\odot[Q_{v_{11}}U]$. 注意 $[Q_{i_{11}}U]\odot[Q_{v_{11}}U]$ 的每一行 j 表示 $S^i_{a_j}(t_0)\cap S^v_{a_j}(t_0)$。因为 $[Q_{i_{11}}U]$ 和 $[Q_{v_{11}}U]$ 的行 j 分别表示 $S^i_{a_j}(t_0)$ 和 $S^v_{a_j}(t_0)$。

第二步　在 $[Q_{i_{11}}U]\odot[Q_{v_{11}}U]$ 中，将行 j 处非零元素的列对应的边 e 去替换 a_j，求出所有的完全树 T^{a_j}（这里行 j 是在单位矩阵 U 中，且与边 a_j 相对应的列是 1 的那一行）. 可以看出，这种替换得到了对于另一个树的另一个基本割集。如果这个非零元素是 + 1，那么得到的完全树与 t_0 符号相同。否则新完全树的符号与 t_0 相反。可以用下面的例子说明这些步骤。

例9-3-2　与 $t_0=(y_3,y_4,y_5)^-$ 距离为 1 的所有完全树可由例 9-3-1中的 Q'_i 和 Q'_v 得到。

首先算出 $Q'_i\odot Q'_v$：

$$Q'_i\odot Q'_v = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc:ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

于是 T^{y_3} 可以从 t_0 出发，用边 y_1 替换 y_3 得到，因为只有列 y_1 在代表 $S^i_{y_3}(t_0)\cap S^v_{y_3}(t_0)$ 的第一行有非零元素. 即 $T^{y_3}=(y_1,y_4,y_5)^+$. 因为非零元素是 − 1，故 (y_1,y_4,y_5) 的符号与 t_0 的符号相反。

与此类似，$T^{y_4}=(y_1,y_3,y_5)^-$，$T^{y_5}=(y_2,y_3,y_4)^-$。为了求出与 t_0 距离大于 1 的所有的树，我们考虑能够分块为以下形式的割集矩阵 Q：

$$Q=[Q_{11}U]=\begin{array}{c}\begin{matrix} b_1\cdots b_r & b'_1\cdots b'_k & e_1\cdots e_k & e_{k+1}\cdots e_m\end{matrix}\\ \left[\begin{array}{cc|c|c} Q_a & Q_b & U_1 & 0 \\ \hline Q_c & Q_d & 0 & U_2 \end{array}\right]\end{array} \tag{9-3-6}$$

其中$(e_1,\cdots,e_k,e_{k+1},\cdots,e_m)$是树$t_0$。假定我们将所有的列$e_1,\cdots,e_k$和列$b'_i,\cdots,b'_k$交换

$$\begin{bmatrix} Q_a & U_1 & Q_b & 0 \\ Q_c & 0 & Q_d & U_2 \end{bmatrix}$$

可以看出，矩阵

$$\begin{bmatrix} Q_b & 0 \\ Q_d & U_2 \end{bmatrix}$$

是非奇异的，当且仅当Q_b是非奇异的。因此，当且仅当Q_b可以用初等运算变成单位矩阵时，边$b'_1,\cdots,b'_k,e_{k+1},\cdots,e_m$构成一个树。为了用改变$t_0$的边$e_1,e_2,\cdots,e_k$的方法求出所有的完全树，我们需要知道$[Q_aQ_b]$的所的有非奇异的大子矩阵。换句话说，如果$G$是一个对应割集矩阵$Q$的线图，那么我们可看出，$[Q_aQ_b]$是从$G$中短接了边$e_{k+1},\cdots,e_m$和删去了边$e_1,\cdots,e_k$得到的线图$G(\overline{\overline{e_{k+1}\cdots e_m}};\ \overline{e_1\cdots e_k})$的割集矩阵。$[Q_aQ_b]$的一个非奇异大子矩阵代表在$G(\overline{\overline{e_{k+1}\cdots e_m}};\ \overline{e_1\cdots e_k})$中的一个树，而这个树的边再加上边$e_{k+1},\cdots,e_m$构成原来线图中的一个树。知道了$[Q_aQ_b]$的所有非奇异大子矩阵，我们就可以求出$T^{e_1\cdots e_k}$中所有的树。

考虑Q_i和Q_v，把它们分块为

$$Q_i=\begin{array}{c}\begin{matrix} b_1\cdots b_r & b'_1\cdots b'_k & e_1\cdots e_k & e_{k+1}\cdots e_m\end{matrix}\\ \left[\begin{array}{cc|c|c} Q_{i_a} & Q_{i_b} & U_1 & 0 \\ \hline Q_{i_c} & Q_{i_d} & 0 & U_2 \end{array}\right]\end{array} \tag{9-3-7}$$

$$Q_v=\begin{array}{c}\begin{matrix} b_1\cdots b_r & b'_1\cdots b'_k & e_1\cdots e_k & e_{k+1}\cdots e_m\end{matrix}\\ \left[\begin{array}{cc|c|c} Q_{v_a} & Q_{v_b} & U_1 & 0 \\ \hline Q_{v_c} & Q_{v_d} & 0 & U_2 \end{array}\right]\end{array} \tag{9-3-8}$$

那么，当且仅当

$$\begin{bmatrix} Q_{ib} & 0 \\ Q_{id} & U_2 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} Q_{vb} & 0 \\ Q_{vd} & U_2 \end{bmatrix}$$

都是非奇异的时，边 $b'_1, \cdots, b'_k, e_{k+1}, \cdots e_m$ 构成一个完全树．因此，如果我们知道电流图 $G_i(\overline{\overline{e_{k+1}, \cdots e_m}};\ \overline{e_1, \cdots, e_k}$ 和电压图 $G_v(\overline{\overline{e_{k+1}, \cdots e_m}};\ \overline{e_1, \cdots, e_k})$ 所有的完全树，而这两个图的割集矩阵分别为 $[Q_{ia}Q_{ib}]$ 和 $[Q_{va}Q_{vb}]$，我们就可以用从 t_0 中替换边 $e_1, \cdots, e_k$ 的方法，求得所有的完全树（即 $T^{e_1 \cdots e_k}$ 中所有的完全树）．换句话说，为了得到 $T^{e_1 \cdots e_k}$ 中所有的完全树，我们把 $[Q_{ia}Q_{ib}]$ 和 $[Q_{va}Q_{vb}]$ 看成一个给定网络的电流图和电压图的割集矩阵，然后从它们求出所有的完全树。

假定 t'_0 是 $G_i(\overline{\overline{e_{k+1}, \cdots e_m}};\ \overline{e_1, \cdots e_k}$ 和 $G_v(\overline{\overline{e_{k+1}, \cdots e_m}};\ \overline{e_1, \cdots e_k})$ 里的一个完全树，其符号为 ε'_0。又假定所给网络中的完全树 t_0 符号为 ε_0。那么我们可看出，用 t'_0 的所有边替换 t_0 的边 $e_1, \cdots, e_k$ 得到的完全树 t 的符号 ε_1 是

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon'_0 \tag{9-3-9}$$

如果我们知道 $\varepsilon_0 = (-1)^{N_i + N_v}$ 和 $\varepsilon_0 = (-1)^{N'_i + N'_v}$，这个等式是很容易看出的。

从关联矩阵 A_i 和 A_v 求出所有完全树的过程有以下三个步骤：

第 1 步　把 A_i 和 A_v 变成基本形式 $[Q_{i_{11}}U]$ 和 $[Q_{v_{11}}U]$。那么我们知道，完全树 t_0 的符号由单位矩阵 U 所对应的基本 M 数来确定。设 t_0 为 $(e_1, e_2, \cdots, e_m)$。

第 2 步　计算 $[Q_{i_{11}}U] \odot [Q_{v_{11}}U]$。然后求出所有与 t_0 距离为 1 的完全树及其符号。

第 3 步　对于 t_0 中 k 条边（$k > 1$）的每一种组合求出关于 t_0 的一类完全树 $T^{e_{i_1} \cdots e_{i_k}}$，其中 $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant m$．为了求出每一类

$T^{e_{i_1}\cdots e_{i_k}}$中所有的完全树，我们分别构造$[Q_{i_{11}}U]$和$[Q_{o_{11}}U]$的子矩阵$Q_i(\underline{e_{i_1}\cdots e_{i_k}})$和$Q_o(\underline{e_{i_1}\cdots e_{i_k}})$，这里$Q_i(e_{i_1}\cdots e_{i_k})$由$[Q_{i_{11}}U]$中除单位阵$U$外各列和对应$S_o(t_0)$的各行（即在列$e_{i_p}$处为1的行，$p=1,2,\cdots,k$）组成。然后，我们把$Q_i(\underline{e_{i_1}\cdots e_{i_k}})$和$Q_o(\underline{e_{i_1}\cdots e_{i_k}})$看成一对给定的割集矩阵，并从$Q_i(\underline{e_{i_1}\cdots e_{i_k}})$和$Q_o(\underline{e_{i_1}\cdots e_{i_k}})$中求出所有的完全树。为达此目的，我们把这两个矩阵看作第1步中的A_i和A_o，并反复进行（如有必要的话）这三个步骤。对于从$Q_i(e_{i_1}\cdots e_{i_k})$和$Q_o(e_{i_1}\cdots e_{i_k})$中求得的这些完全树，我们添加上$t_0-(e_{i_1},\cdots,e_{i_k})$的所有的边，这样就构成了$T^{e_{i_1}\cdots e_{i_k}}$中的完全树。注意，为了得到所有的完全树，我们是从关联矩阵A_i和A_o出发的。否则，第一个完全树t_0的符号就必须用类似于符号变换的其他技巧求出。

下面的例子说明求所有完全树的全过程。

例9-3-3 设一个网络的关联矩阵是

$$A_i=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}y_0&y_1&y_2&y_3&y_4&y_5&y_6\end{array}\\\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0&0\\-1&1&0&1&-1&1&0\\0&-1&-1&0&0&0&-1\end{bmatrix}\end{array}$$

和

$$A_o=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}y_0&y_1&y_2&y_3&y_4&y_5&y_6\end{array}\\\begin{bmatrix}1&0&1&-1&-1&0&0\\0&1&0&0&1&0&-1\\0&-1&-1&0&0&-1&0\end{bmatrix}\end{array}$$

那么，用下面的步骤来生成完全树。

第1步 将A_i和A_o变成基本形式（基本割集矩阵）：

$$Q_i'=\begin{array}{c}\\1'\\2'\\3'\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}y_0&y_1&y_2&y_3&y_4&y_5&y_6\end{array}\\\left[\begin{array}{cccc:ccc}1&0&1&0&1&0&0\\0&1&1&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&0&1\end{array}\right]\end{array}$$

$$Q'_v = \begin{array}{c} \\ 1' \\ 3' \\ 2' \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

由于 $N_i=1, N_v=4$，因此 $t_0=(y_4, y_5, y_6)^-$。

第 2 步　算出 $Q'_i \odot Q'_v$：

$$Q'_i \odot Q'_v = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc:ccc} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

因此，所有与 t_0 距离为 1 的完全树为

$(y_0, y_5, y_6)^+, (y_2, y_3, y_6)^+, (y_1, y_4, y_6)^-, (y_2, y_4, y_6)^-,$

$(y_1, y_4, y_5)^+,$　　　　$(y_2, y_4, y_5)^+$

第 3 步　为了求出 $T^{y_4y_5}$，我们构成 Q'_i 和 Q'_v 的子矩阵：

$$Q_i(\underline{y_4y_5}) = \begin{array}{c} \\ 1' \\ 2' \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Q_v(\underline{y_4y_5}) = \begin{array}{c} \\ 1' \\ 3' \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

注意，$Q_i(\underline{y_4y_5})$是取 Q'_i 的 y_4, y_5 列为 1 的行 1′ 和行 2′，以及除单位矩阵外所有的列而得到的子矩阵。同样，$Q_v(\underline{y_4y_5})$是取 Q'_v 的行1′和行3′及除单位矩阵外所有的列得到的。

第 4 步　我们对 $Q_i(\underline{y_4y_5})$和 $Q_v(\underline{y_4y_5})$进行第 1 步：

$$Q'_i(\underline{y_4y_5}) = \begin{array}{c} \\ 1' \\ 2'' \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$Q'_v(\underline{y_4y_5}) = \begin{array}{c} \\ 3' \\ 1'' \end{array}\left[\begin{array}{cc:cc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

从这两个基本形式，我们有 $t_{01}=(y_2y_3)^-$。

第 5 步　从

$$Q'_i(\underline{y_4y_5}) \odot Q'_v(\underline{y_4y_5}) = \left[\begin{array}{cc:cc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

我们知道，与 t_{10} 距离为 1 的完全树有两个，$(y_0,y_2)^-$ 和 $(y_1,y_2)^-$。

第 6 步　对 $Q'_i(\underline{y_4y_5})$ 和 $Q'_v(\underline{y_4y_5})$ 用第 3 步，考虑 $Q'_i(\underline{y_4y_5})$ 和 $Q'_v(\underline{y_4y_5})$ 的子矩阵

$$Q_i(\underline{y_4y_5};\ \underline{y_2y_3}) = \left[\begin{array}{cc} y_0 & y_1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$Q_v(y_4y_5;\ y_2y_3) = \left[\begin{array}{cc} y_0 & y_1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right]$$

我们可以得到与 t_{01} 距离为 2 的完全树。

第 7 步　根据第 1 步，把这两个矩阵变成基本形式：

$$Q'_i(\underline{y_4y_5};\ \underline{y_2y_3}) = \left[\begin{array}{cc} y_0 & y_1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$Q'_v(\underline{y_4y_5};\ \underline{y_2y_3}) = \left[\begin{array}{cc} y_0 & y_1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

故 $t_{02}=(y_0,y_1)^-$ 且没有与 t_{02} 距离为 1 的完全树。所以，$(y_0,y_1)^-$

是唯一的与 t_{01} 距离为 2 的完全树。由所给的电流图 G_i 和电压图 G_v 短路 y_6 和删除 y_4，y_5 所得的 $G_i(\overline{\overline{y_6}};\ \overline{y_4y_5})$ 和 $G_v(\overline{\overline{y_6}};\ \overline{y_4y_5})$ 的所有完全树为 $t_{01}=(y_2,y_3)^-$，$(y_0,y_2)^-$，$(y_1,y_2)^-$，$(y_0,y_1)^-$。用这些完全树，替换 t_0 中的 y_4 和 y_5 并改变它们的符号，得到原电流图和电压图的 $T^{y_4y_5}$ 中的完全树：

$$T^{y_4y_5}=[(y_2,y_3,y_6)^+,(y_0,y_2,y_6)^+,(y_1,y_2,y_6)^+,(y_0,y_1,y_6)^+]$$

第 8 步　对于 $T^{y_4y_6}$，我们用 Q'_i 和 Q'_v 的子矩阵，

$$Q_i(\underline{y_4y_6})=\begin{array}{c} \\ 1' \\ 3' \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}\\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\end{array}$$

$$Q_v(\underline{y_4y_6})=\begin{array}{c} \\ 1' \\ 2' \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}\\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\end{array}$$

第 9 步　把这两个子矩阵化成基本形式：

$$Q'_i(\underline{y_4y_6})=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} y_3 & y_0 & y_1 & y_2 \end{array}\\ \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]\end{array}$$

$$Q'_v(\underline{y_4y_6})=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} y_3 & y_0 & y_1 & y_2 \end{array}\\ \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]\end{array}$$

这样，$t_{03}=(y_1,y_2)^+$。

第10步　从

$$Q'_i(\underline{y_4y_6})\odot Q'_v(\underline{y_4y_6})=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} y_3 & y_0 & y_1 & y_2 \end{array}\\ \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]\end{array}$$

我们可以看出，$(y_0,y_1)^+$是与 t_{03} 距离为 1 的唯一的完全树。

第11步　为了求出与 t_{03} 距离为 2 的完全树，我们利用

$$Q_i(\underline{y_4y_6}\,;\,\underline{y_1y_2})=\begin{array}{c}\begin{matrix} y_3 & y_0\end{matrix}\\ \begin{bmatrix} 0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

$$Q_v(\underline{y_4y_6}\,;\,\underline{y_1y_2})=\begin{array}{c}\begin{matrix} y_3 & y_0\end{matrix}\\ \begin{bmatrix} 0 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

因为这两个矩阵都是奇异的，所以在$G_i(\overline{\overline{y_5}};\overline{y_4y_6})$和$G_v(\overline{\overline{y_5}};\ \overline{y_4y_6})$中没有与 t_{03} 距离为 2 的完全树。这样，$T^{y_4y_6}=[(y_1,y_2,y_5)^-,(y_0,y_1,y_5)^-]$。

第12步　对于 $T^{y_5y_6}$，我们考虑

$$Q_i(\underline{y_5y_6})=\begin{array}{c c}& \begin{matrix} y_0 & y_1 & y_2 & y_3\end{matrix}\\ \begin{matrix}2'\\3'\end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

$$Q_v(\underline{y_5y_6})=\begin{array}{c c}& \begin{matrix} y_0 & y_1 & y_2 & y_3\end{matrix}\\ \begin{matrix}3'\\2'\end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

第13步　将这两个矩阵变成基本形式：

$$Q'_i(\underline{y_5y_6})=\begin{array}{c}\begin{matrix} y_0 & y_1 & y_2 & y_3\end{matrix}\\ \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\end{array}$$

$$Q'_v(\underline{y_6y_6})=\begin{array}{c}\begin{matrix} y_0 & y_1 & y_2 & y_3\end{matrix}\\ \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\end{array}$$

于是 $t_{04}=(y_2,y_3)^{-*}$。

* 原书把 t_{04} 符号误为“+”，以下均作相应改动。——译注

第14步　算出 $Q'_i(\underline{y_5y_6})\odot Q'_v(\underline{y_5y_6})$：

$$Q'_i(\underline{y_5y_6})\odot Q'_v(\underline{y_5y_6})=\begin{array}{c} \begin{matrix} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

故 $(y_1,y_3)^-$ 是与 y_{04} 距离为 1 的唯一的完全树。

第15步　为了找出 $G_i(\overline{\overline{y_4}};\ \overline{y_5y_6})$ 和 $G_v(\overline{\overline{y_4}};\ \overline{y_6y_6})$ 中与 t_{04} 距离为 2 的完全树，我们考虑

$$Q_i(\underline{y_5y_6};\ \underline{y_2y_3})=\begin{array}{c} \begin{matrix} y_0 & y_1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Q_v(\underline{y_5y_6};\ \underline{y_2y_3})=\begin{array}{c} \begin{matrix} y_0 & y_1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

因为 $Q_i(y_5y_6;\ y_2y_3)$ 是奇异的，所以没有与 t_{04} 距离为 2 的完全树。因此，$T^{y_5y_6}=[(y_2,y_3,y_4)^+,(y_1,y_3,y_4)^+]$。

第16步　为了得到 $T^{y_4y_5y_6}$，我们用

$$Q_i(\underline{y_4y_5y_6})=\begin{array}{c} \\ 1' \\ 2' \\ 3' \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Q_v(\underline{y_4y_5y_6})=\begin{array}{c} \\ 1' \\ 2' \\ 3' \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

第17步　把这两个矩阵变成基本形式：

$$Q'_i(\underline{y_4y_5y_6})=\begin{array}{c} \begin{matrix} y_0 & y_2 & y_1 & y_3 \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{c:ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$Q'_v(\underline{y_4y_5y_6})=\begin{array}{c} \begin{matrix} y_0 & y_2 & y_1 & y_3 \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{c:ccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

因此 $t_{05}=(y_1,y_2,y_3)^+$。

第18步　算出 $Q'_i(\underline{y_4y_5y_6})\odot Q'_v(\underline{y_4y_5y_6})$：

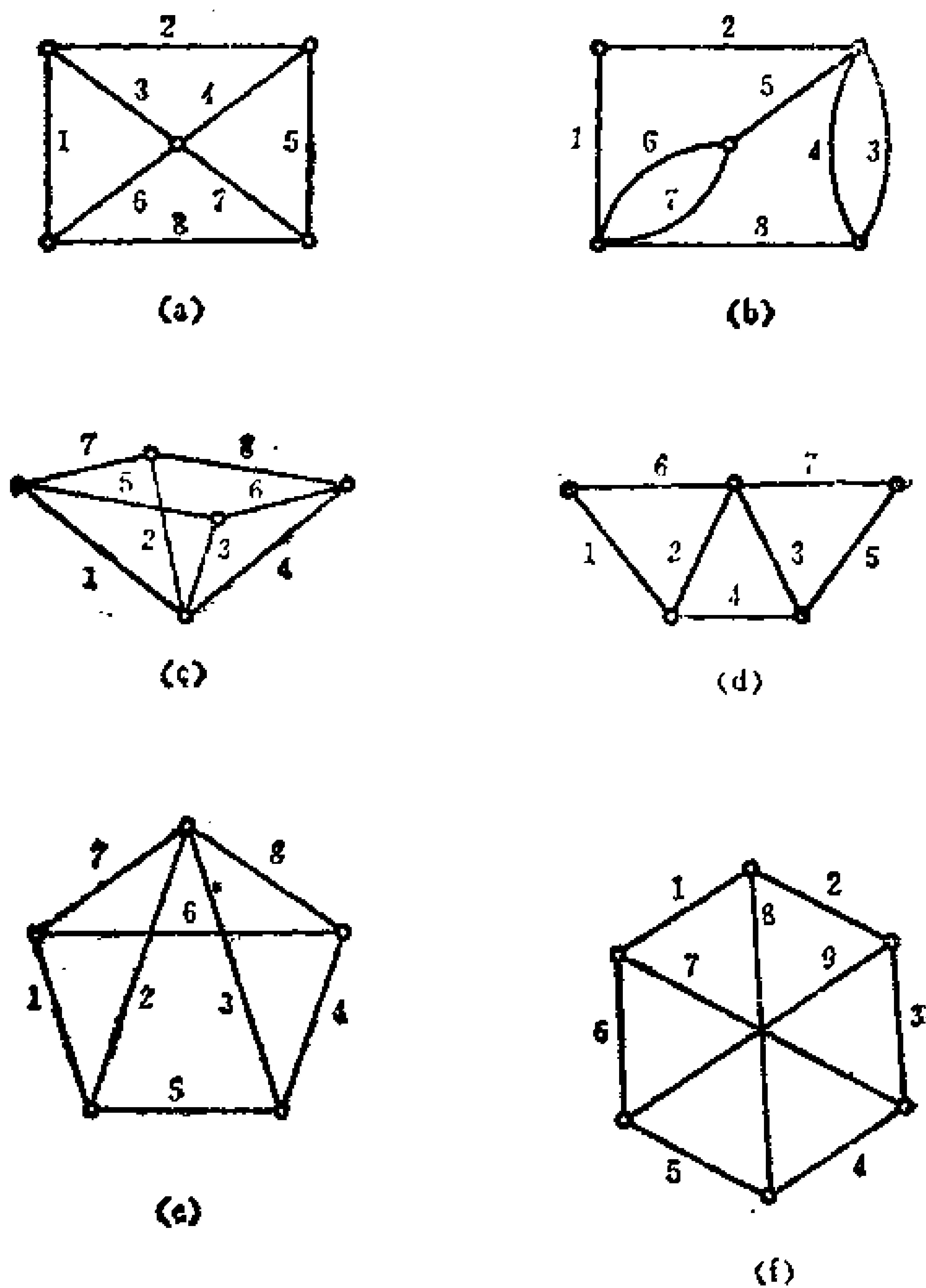
$$Q'_i(\underline{y_4y_5y_6})\odot Q'_v(\underline{y_4y_5y_6})=\begin{array}{c} \begin{matrix} y_0 & y_2 & y_1 & y_3 \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{c:ccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

因此没有与 t_{05} 距离为 1 或 1 以上的完全树，且 $T^{y_4y_5y_6}=(y_1,y_2,y_3)^-$。这样，我们就找出了所有的完全树。

显然，把一个线图 G 作为电压图和电流图，G 的树就变成了完全树。因此，我们可用以上方法求出所有的树。但是，因为在这种情况下 $A_i=A_v$，故 $Q'_i=Q'_v$，就不需要再计算 $Q'_i\odot Q'_v$，而且每一个完全树的符号都是正号。

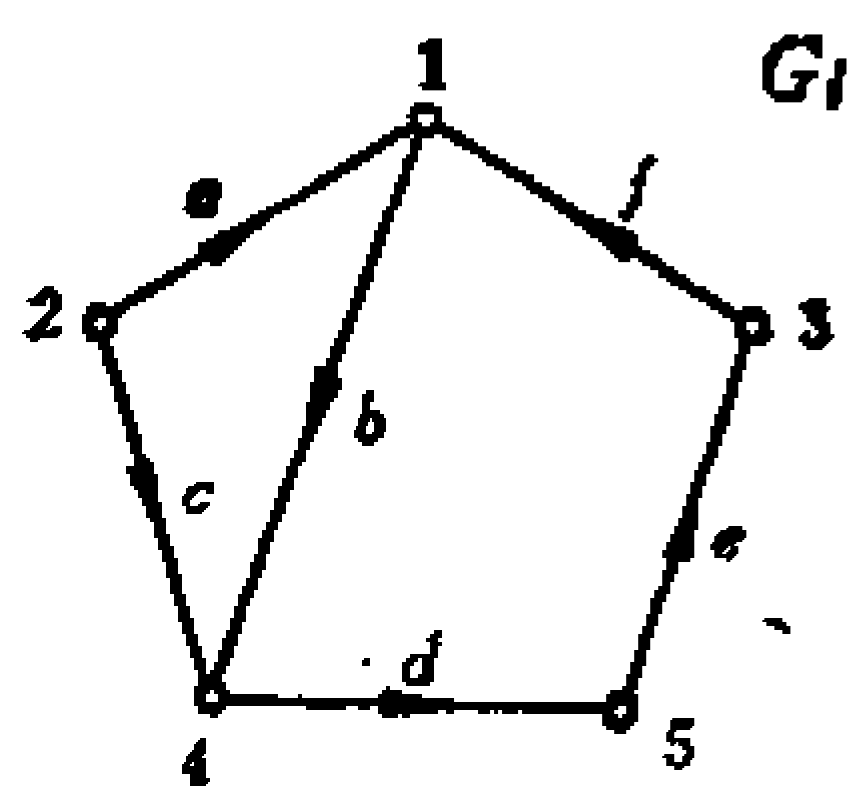
习　题

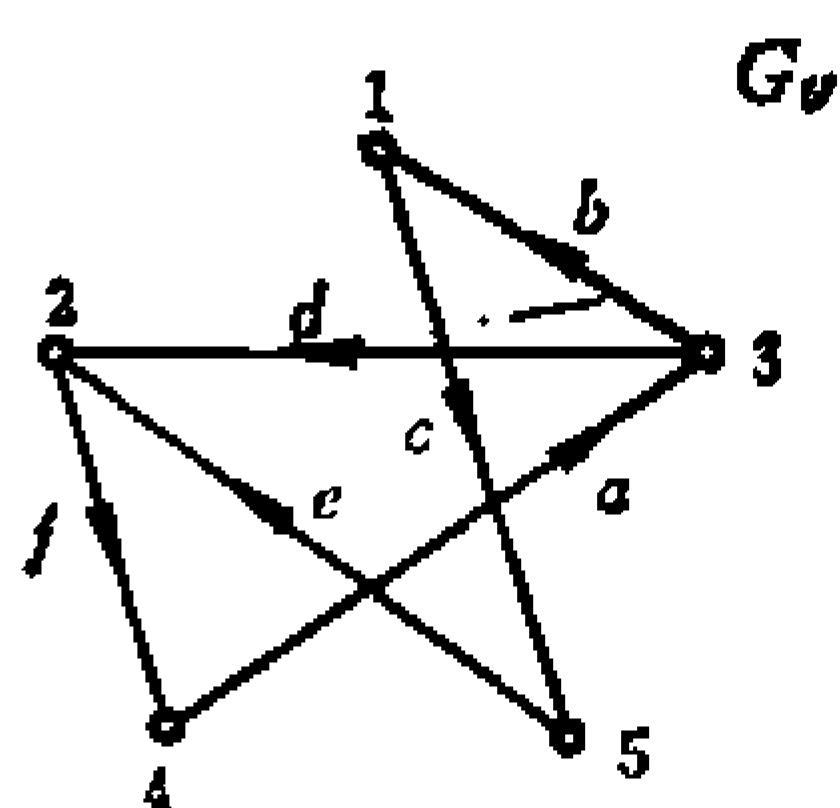
1.用两种方法生成图 P-9-1中线图的所有树.(一种方法是9-2节给出的，另一种是在9-3节中给出的)。



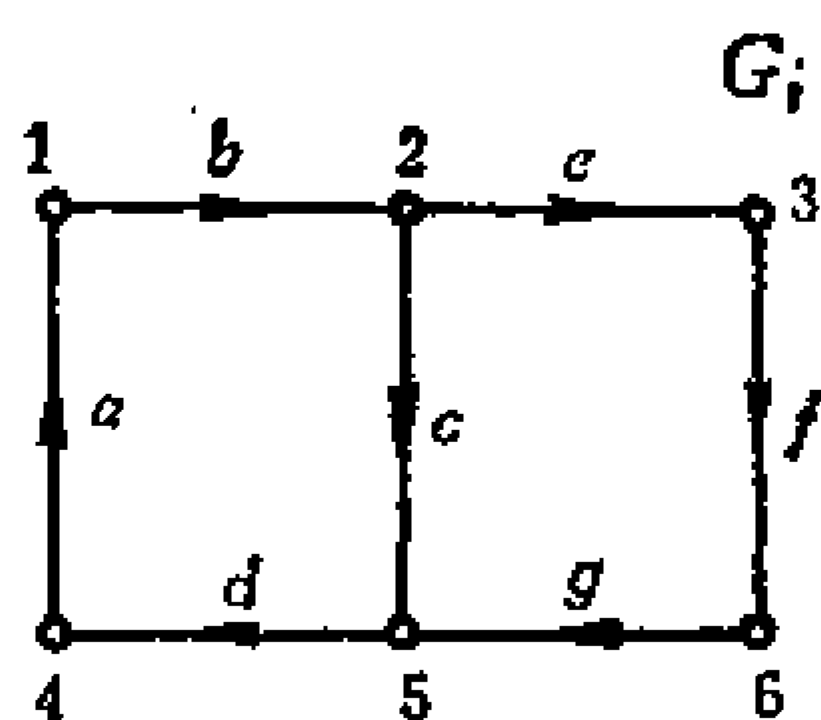
图P-9-1

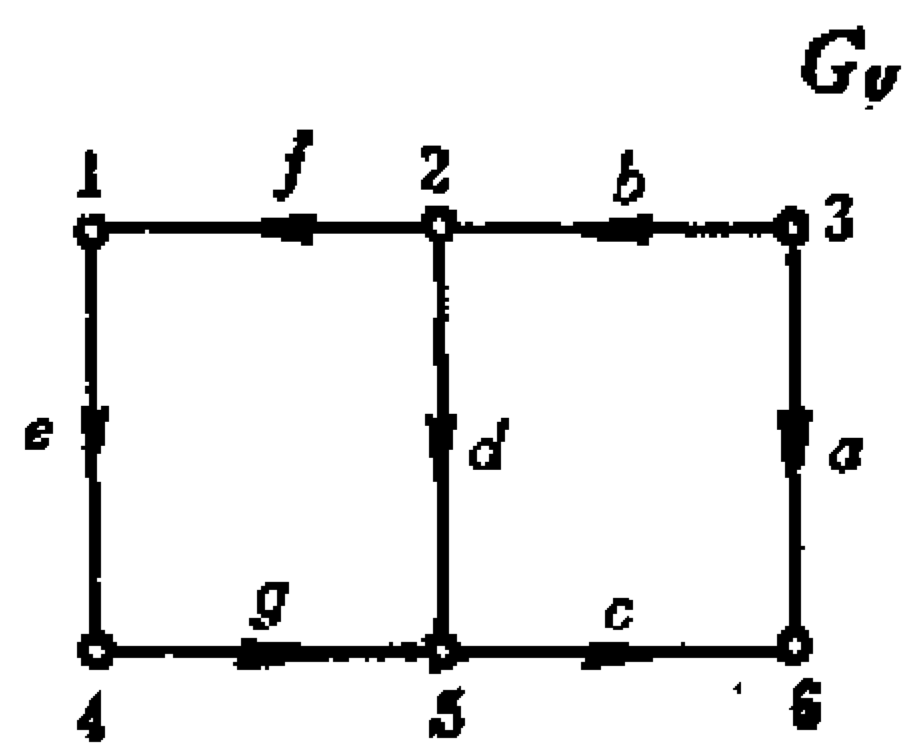
2.生成图P-9-2中各对线图的所有完全树。



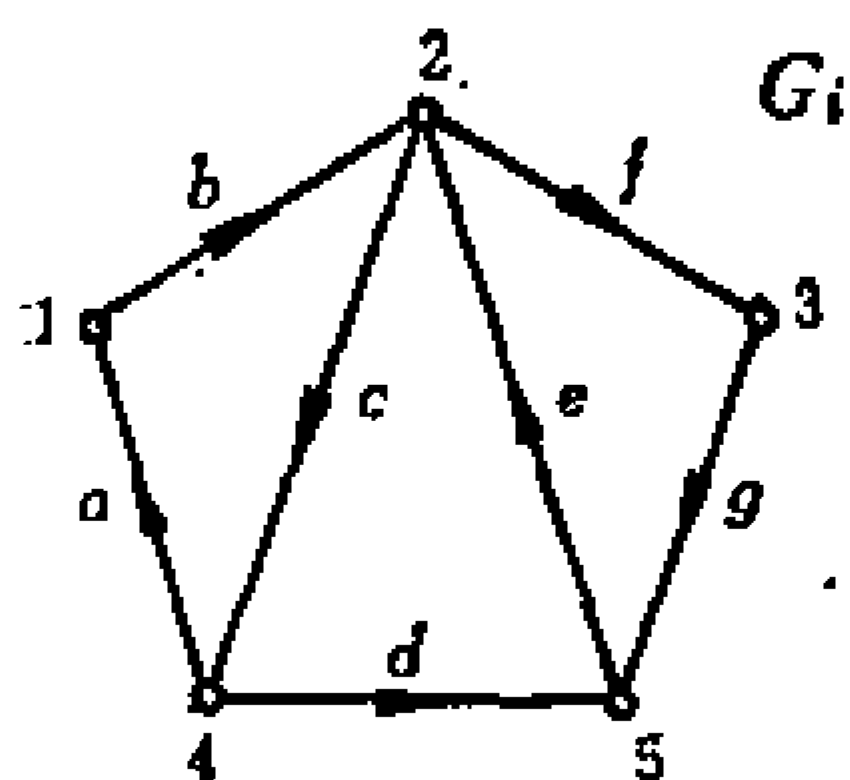


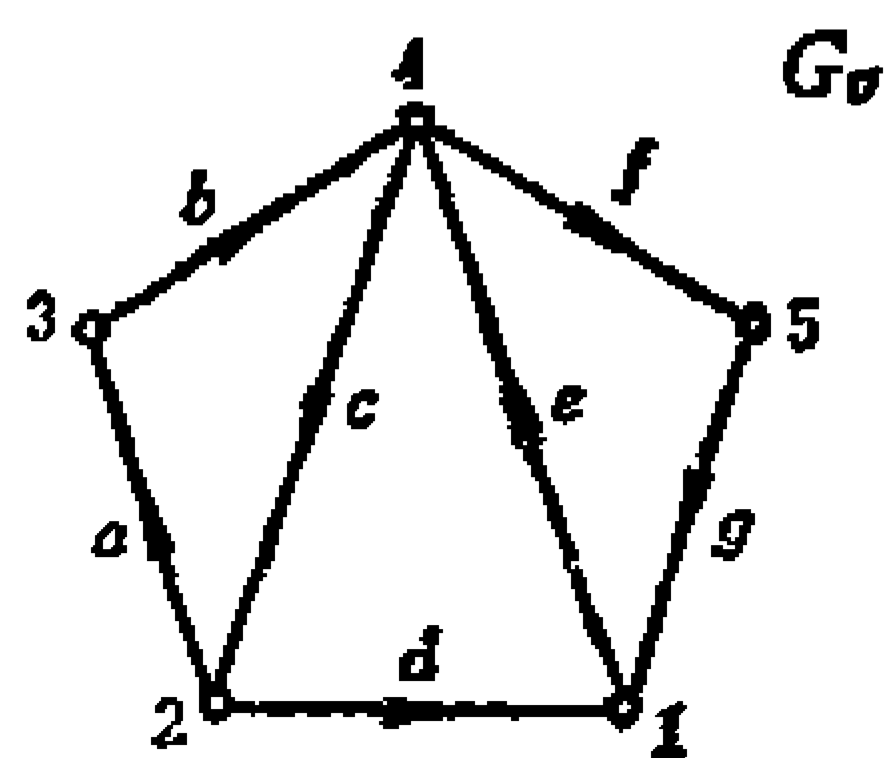
(a)





(b)





(c)

图P-9-2 线图对

(a) G_i和G_v; (b) G_i和G_v; (c) G_i和G_v

3.假定 G_i 和 G_v 是互为2-同构，那么 G_i 中的哪一种树也是 G_v 中的树？

4.假定重新命名顶点，G_i 就变得与 G_v 相同，如图 P-9-2(c) 所示，那么 G_i 中哪一种树也是 G_v 中的树？完全树的符号将是什么？

5.假定 G_i 和 G_v 是不同的，要使所有的完全树就是 G_i 的所有的树，要求对 G_i 和 G_v 有什么条件？

第十章　流图和信号流图

10-1　流　　图

在第七章里，我们用加权图来表示由似无源元件组成的电网络，并得知导纳矩阵行列式的非零项与树对应．在第八章里，我们用加权图表示似有源网络，并得知导纳矩阵行列式的非零项与（完全）树有关.接着,我们研究了用来表示单向网络的加权图，并且再次看到导纳矩阵行列式的非零项对应于（有向）树．本章将要考查流图和信号流图，它们是另一种形式的加权图．但是，与这两种加权图联系的行列式的非零项却不再与树对应，而是与回路或无重边的回路并集相对应．

定义10-1-1　对于一个方阵 $W=[w_{ij}]$，其中 i，$j=1$，2，…，n，流图G是满足以下两个条件的加权有向图：，（1）G由顶点1，2,…,n组成；（2）对所有的$1\leqslant i$，$j\leqslant n$，从顶点 i 到顶点 j 的每一条边（其定向是由 i 到 j）的权是 w_{ji}．

为了简便起见，记号 w_{ji} 既表示一条边的权，又表示这条边．根据定义，必须注意，边 w_{ji} 是由 i 连接到 j 而不是由 j 到 i 的．（此处定义的边 w_{ji} 的方向与通常的相反，这样就更容易将流图与下节要研究的信号流图作一比较．）

作为一个例子，假定一个矩阵是

$$W=\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix}$$

则与此矩阵对应的流图由九条边和三个顶点组成，如图10-1-1所示。注意，在流图中允许有自环。

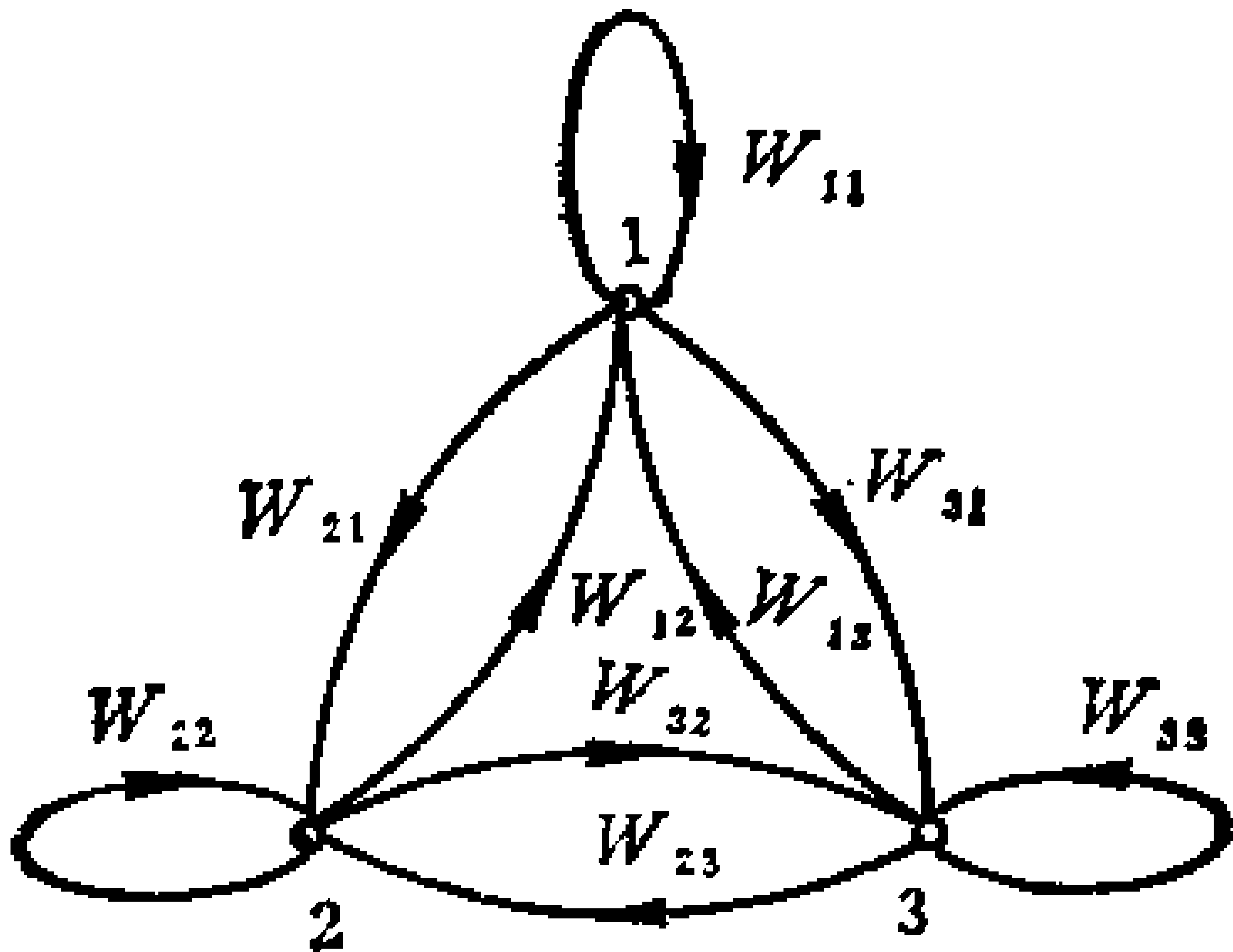


图10-1-1　流图

应用流图的一个课题是要根据与矩阵W对应的流图直接求出W的行列式。考虑矩阵W的行列式，它可以表示为

$$|W| = \sum \delta_{j_1 j_2 \cdots j_n} W_{1j_1} W_{2j_2} \cdots W_{nj_n} \tag{10-1-1}$$

回忆一下：（1）如果

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots n \\ j_1 & j_2 \cdots j_n \end{pmatrix}$$

不是一个置换，那么$\delta_{j_1 j_2 \cdots j_n}$为零；（2）如果

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots n \\ j_1 & j_2 \cdots j_n \end{pmatrix}$$

是一个偶置换（即为使第二行变得与第一行一致所需的将第二行各个j互换的次数为偶数），那么，$\delta_{j_1 j_2 \cdots j_n} = 1$；（3）如果

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots n \\ j_1 & j_2 \cdots j_n \end{pmatrix}$$

是一个奇置换，那么$\delta_{j_1 j_2 \cdots j_n} = -1$。

设G是与矩阵W对应的流图，并设g是由边w_{1j_1}，w_{2j_2}，…，

w_{nj_n}组成的子图。注意边w_{kj_k}的下标k和j_k表示边w_{kj_k}是从顶点j_k连到顶点k的。如果与边w_{1j_1}，w_{2j_2}，…，w_{nj_n}对应的

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots n \\ j_1 & j_2 \cdots j_n \end{pmatrix}$$

是一个置换，那么g的每个顶点在

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots n \\ j_1 & j_2 \cdots j_n \end{pmatrix}$$

的第一行和第二行中各只出现一次.因此，在g中与每个顶点相连接的边正好是两条。并且对于每个顶点p，$d^+(p)=d^-(p)=1$；换言之，在与一个顶点相连的两条边中，一条的方向离开该顶点，另一条的方向指向该顶点。如果子图g是连通的，则g是一个有向回路。

定义10-1-2 有向回路是其定向与回路中每条边的方向一致的回路。

假定子图g由k个最大连通子图组成，那么每个最大连通子图必为一个有向回路，而g必为顶点不相接的有向回路并集。

定义10-1-3 顶点不相接的有向回路并集是一个有向回路的集合，其中任两个回路都没有公共顶点。

为了简便起见，我们定义P-集圈如下。

定义10-1-4 P-集圈是一个子图，它或是一个有向回路，或是顶点不相接的有向回路并集，且包含给定有向图的全部顶点。

因为子图g包含流图G的全部顶点，我们就可以断言，如果

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots n \\ j_1 & j_2 \cdots j_n \end{pmatrix}$$

是一个置换，则由边w_{1j_1}，w_{2j_2}，…，w_{nj_n}所组成的子图是一个P-集圈。

为了证明这个结论的逆也是正确的，我们假设子图 g 是一个 P-集圈。注意 g 必定包含 n 条边。设 g 的边是 $w_{i_1j_1}$，$w_{i_2j_2}$，…，$w_{i_nj_n}$，则下标序列$(i_1i_2\cdots i_n)$必然是$(12\cdots n)$的一种排列；同样，下标序列$(j_1j_2\cdots j_n)$也必然是$(12\cdots n)$的一种排列。因此

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_n \\ j_1 & j_2\cdots j_n \end{pmatrix}$$

是一个置换，乘积 $w_{i_1j_1}w_{i_2j_2}\cdots w_{i_nj_n}$ 是式(10-1-1)中的一项。换句话说，

$$|W| = \sum e_j \times (P\text{-集圈 } D_j \text{ 乘积}) \qquad (10\text{-}1\text{-}2)$$

其中 e_j 为 $+1$ 或 -1，取决于 $\delta_{j_1j_2\cdots j_n}$。

为了确定 e_j 的符号，我们假设由边 $w_{i_1j_1}$，$w_{i_2j_2}$，…，$w_{i_nj_n}$ 组成的 P-集圈 D_j 是 k 个顶点不相接的有向回路并集，当 $k=1$ 时。D_j 是有向回路。不失一般性，设

$$(w_{ip_1jp_1}w_{ip_1+1jp_1+1}\cdots w_{ip_1+r_1jp_1+r_1})_2$$

$$(w_{ip_2jp_2}\cdots w_{ip_2+r_2jp_2+r_2})_2\cdots,(w_{ipkjpk}\cdots w_{ipk+rkjpk+rk})$$

是这 k 个有向回路，则对于 $s=1,2,\cdots,k$，

$$\begin{pmatrix} i_{p_s} & \cdots & i_{p_s+r_s} \\ j_{p_s} & \cdots & j_{p_s+r_s} \end{pmatrix}$$

必是一个置换，这是因为 i_{p_s}，i_{p_s+1}，…，$i_{p_s+r_s}$ 代表一个有向回路中的所有顶点，而 j_{p_s}，j_{p_s+1}，…，$j_{p_s+r_s}$ 同样如此。

由于总可以调整有向回路的各边，使序列

$$(w_{ip_s\,jp_s}\cdots w_{ip_s+r_s\,jp_s+r_s})$$

成为一个方向与有向回路的定向相同的闭边列，我们有

$$i_{p_s+u-1} = j_{p_s+u} \quad u=1,2,\cdots,r_s \qquad (10\text{-}1\text{-}3)$$

和

$$i_{p_s+r_s} = j_{p_s} \qquad (10\text{-}1\text{-}4)$$

因此

$$\begin{pmatrix} i_{p_s} & \cdots & i_{p_s+r_s} \\ j_{p_s} & \cdots & j_{p_s+r_s}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{p_s} & i_{p_s+1} & \cdots & i_{p_s+r_s-1} & i_{p_s+r_s} \\ i_{p_s+r_s} & i_{p_s} & \cdots & i_{p_s+r_s-2} & i_{p_s+r_s-1}\end{pmatrix}$$

(10-1-5)

对这个置换的第二行元素作 r_s-1次对换，就足以使第二行与第一次相同。

根据假设，

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \cdots i_n \\ j_1 & j_2 \cdots j_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{p_1} & \cdots & i_{p_1+r_1} \\ j_{p_1} & \cdots & j_{p_1+r_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_{p_2} & \cdots & i_{p_2+r_2} \\ j_{p_2} & \cdots & j_{p_2+r_2}\end{pmatrix}\cdots$$
$$\begin{pmatrix} i_{p_k} & \cdots & i_{p_k+r_k} \\ j_{p_k} & \cdots & j_{p_k+r_k}\end{pmatrix} \qquad (10\text{-}1\text{-}6)$$

并且我们已经知道，由于对

$$\begin{pmatrix} i_{p_s} & \cdots & i_{p_s+r_s} \\ j_{p_s} & \cdots & j_{p_s+r_s}\end{pmatrix}$$

的第二行的元素作 r_s-1次对换就足以使第二 行 与 第 一 行 相 同故对

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \cdots i_n \\ j_1 & j_2 \cdots j_n \end{pmatrix}$$

的第二行元素作 $(r_1-1)+(r_2-1)+\cdots+(r_k-1)$ 次对换就足以使第二行与第一行相同。注意 r_s 是与

$$\begin{pmatrix} i_{p_s} & \cdots & i_{p_s+r_s} \\ j_{p_s} & \cdots & j_{p_s+r_s}\end{pmatrix}$$

对应的有向回路的边数．因此

$$(r_1-1)+(r_2-1)+\cdots+(r_k-1)=r_1+r_2+\cdots+r_k-k$$
$$=n-k \qquad (10\text{-}1\text{-}7)$$

或者说作 $n-k$ 次对换就足以使

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \cdots i_n \\ j_1 & j_2 \cdots j_n \end{pmatrix}$$

的第二行与第一行相同。于是式(10-1-2)中 e_j 的符号为

$$e_j = (-1)^{n+k} \qquad (10\text{-}1\text{-}8)$$

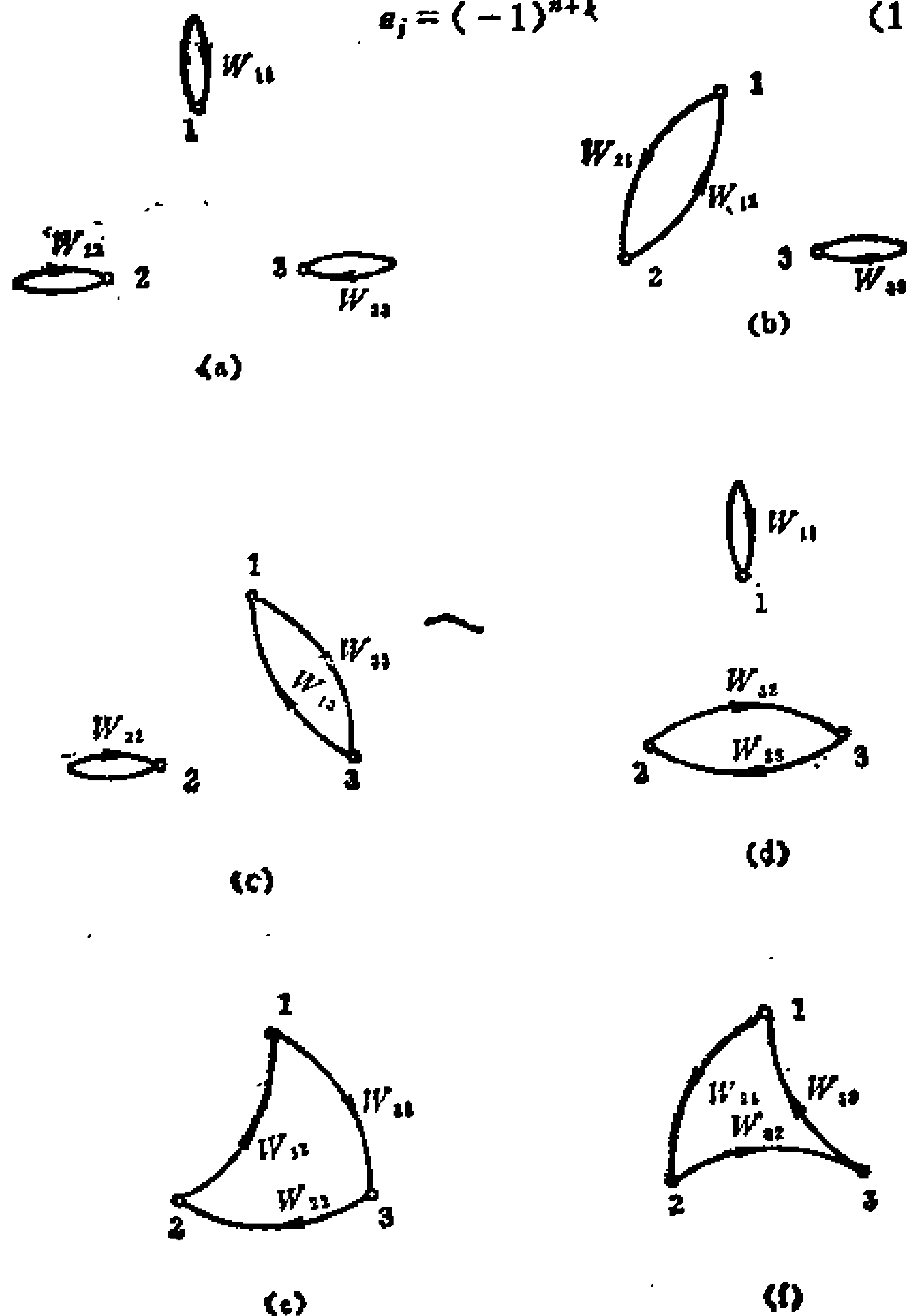


图10-1-2　P-集圈

(a)$D_1=(w_{11},\ w_{22},\ w_{33})$; (b)$D_2=(w_{12},w_{21},w_{33})$; (c)$D_3=(w_{13},\ w_{31},w_{22})$; (d)$D_4=(w_{23},\ w_{32},\ w_{11})$; (e)$D_5=(w_{12},\ w_{23},\ w_{31})$; (f)$D_6=(w_{13},\ w_{32},\ w_{21})$

或者

$$|W| = (-1)^n \sum_{(j)} (-1)^{k_j} (P\text{-集圈 } D_j \text{ 乘积}) \qquad (10\text{-}1\text{-}9)$$

其中 k_j 是 P-集圈 D_j 中有向回路的数目。

例10-1-1 考虑图10-1-1中的流图，与它对应的矩阵是

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix}$$

据式(10-1-9)，W的行列式是

$$\begin{aligned} |W| = (-1)^3[&(-1)^3 w_{11}w_{22}w_{33} + (-1)^2 w_{12}w_{21}w_{33} \\ &+ (-1)^2 w_{13}w_{31}w_{22} + (-1)^2 w_{23}w_{32}w_{11} \\ &+ (-1)w_{12}w_{23}w_{31} + (-1)w_{13}w_{32}w_{21}] \end{aligned}$$

对应的子图如图10-1-2所示。

10-2 信 号 流 图

信号流图是一种边和顶点都带有权的加权有向图。为了简便起见，用符号(i, j)表示从顶点 i 连接到顶点 j 的一条有向边。

定义10-2-1 方程

$$x_r = \sum_{p=0}^{n} m_{rp} x_p \quad (0 \leqslant r \leqslant n) \qquad (10\text{-}2\text{-}1)$$

可用一个有向图G来表示，其中

1.顶点 x_p 的权是 x_p；

2.对于 $m_{ru} \neq 0 (0 \leqslant u \leqslant n)$，存在一条权为 m_{ru} 的边 (x_u, x_r)；

3.与顶点 r 相连且指向顶点 r 的边就是带权 m_{ru} 的边。

这样一个有向图G(见图10-2-1)称为代表方程(10-2-1)的信号流图。式(10-2-1)称为信号流图G在顶点 x_r 的方程。注意当 $m_{ru} = 0$ 时，或者有一条权为 0 的边(x_u, x_r)，或者没有权为 m_{ru} 的边。

现在考虑以下联立方程：

$$
\left.\begin{aligned}
x_1 &= m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + \cdots + m_{1n}x_n \\
x_2 &= m_{21}x_1 + m_{22}x_2 + \cdots + m_{2n}x_n \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= m_{n-11}x_1 + m_{n-12}x_2 + \cdots + m_{n-1n}x_n \\
x_0 &= m_{01}x_1 + m_{02}x_2 + \cdots + m_{0n}x_n
\end{aligned}\right\} \qquad (10\text{-}2\text{-}2)
$$

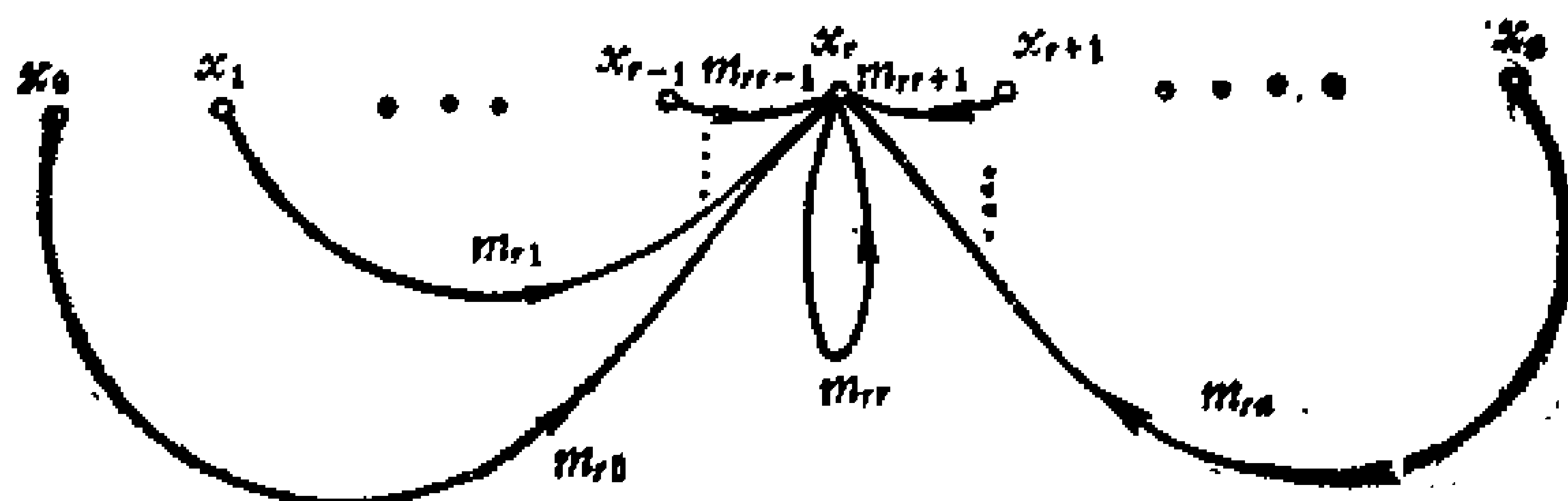


图10-2-1　信号流图

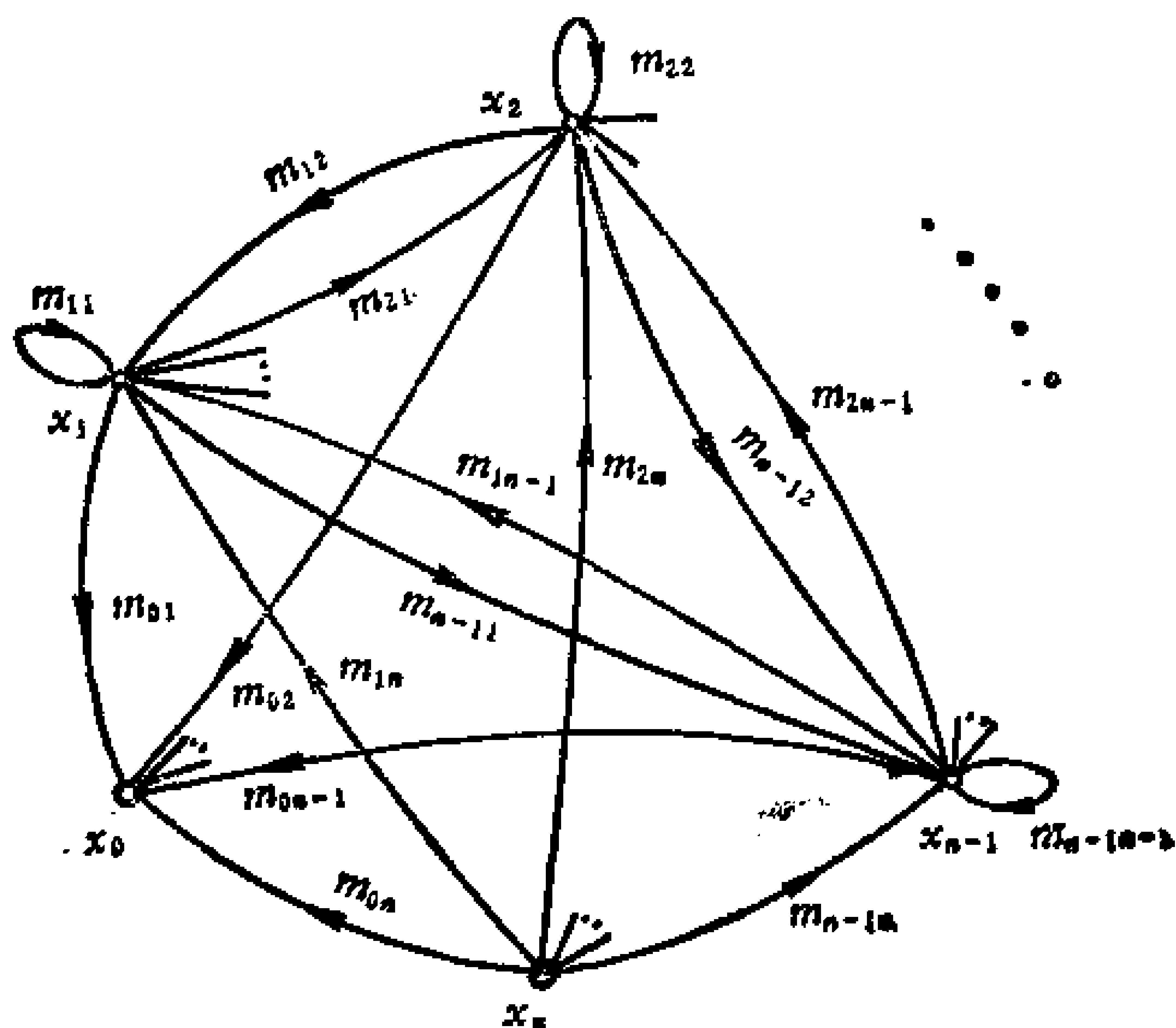


图10-2-2　信号流图

对应的信号流图由 $n+1$ 个顶点组成，如图10-2-2所示。注意在式(10-2-2)中，x_n 不出现在任何一个方程的左边，x_0 不出现在任何一个方程的右边。顶点 x_n 称为源点，顶点 x_0 称为汇点。

下面是三条常用的简化信号流图的规则：

1.假定信号流图 G 具有如图10-2-3(a)所示的并联边，则在顶点 x_q 的方程是

$$x_q = \sum_{\substack{r=0\\ r\neq p}}^{n} m_{qr}x_r + m_{qp}x_p + m'_{qp}x_p = \sum_{\substack{r=0\\ r\neq p}}^{n} m_{qr}x_r + (m_{qp}+m'_{qp})x_p \tag{10-2-3}$$

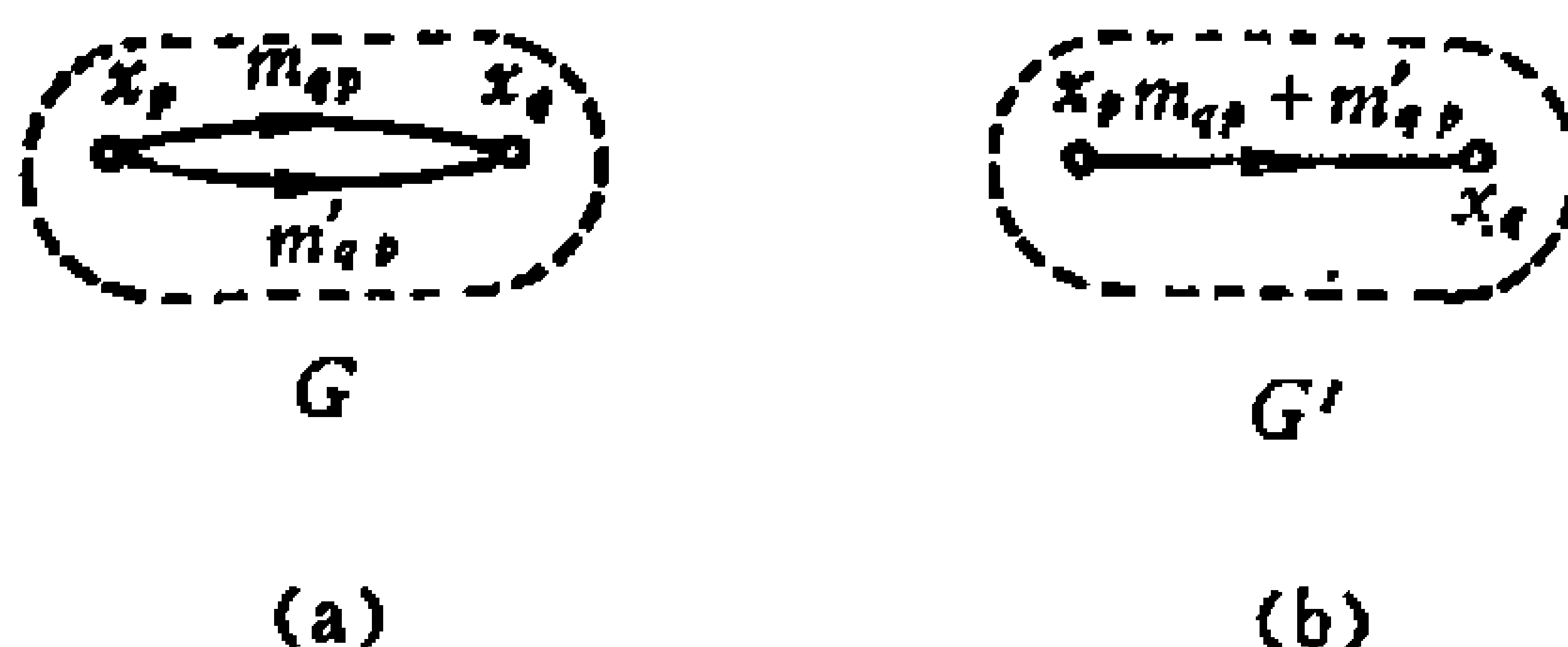


图10-2-3

(a)信号流图 G；(b)信号流图 G'

图10-2-3(b)中的信号流图 G' 是用一条权为 $m_{qp}+m'_{qp}$ 的边替换 G 中两条并联边得到的。显然，G 和 G' 在每个顶点的方程都是相同的。因此，方向相同的并联边可以用一条边代替，其权为这些并联边的权的和。

2.考虑图10-2-4(a)中的信号流图 G，其中顶点 x_p 有一个自环。顶点 x_p 的方程为

$$x_p = m_{pp}x_p + \sum_{\substack{r=1\\ i_r\neq p}}^{k} m_{pi_r}x_{i_r} \tag{10-2-4}$$

此式可变成

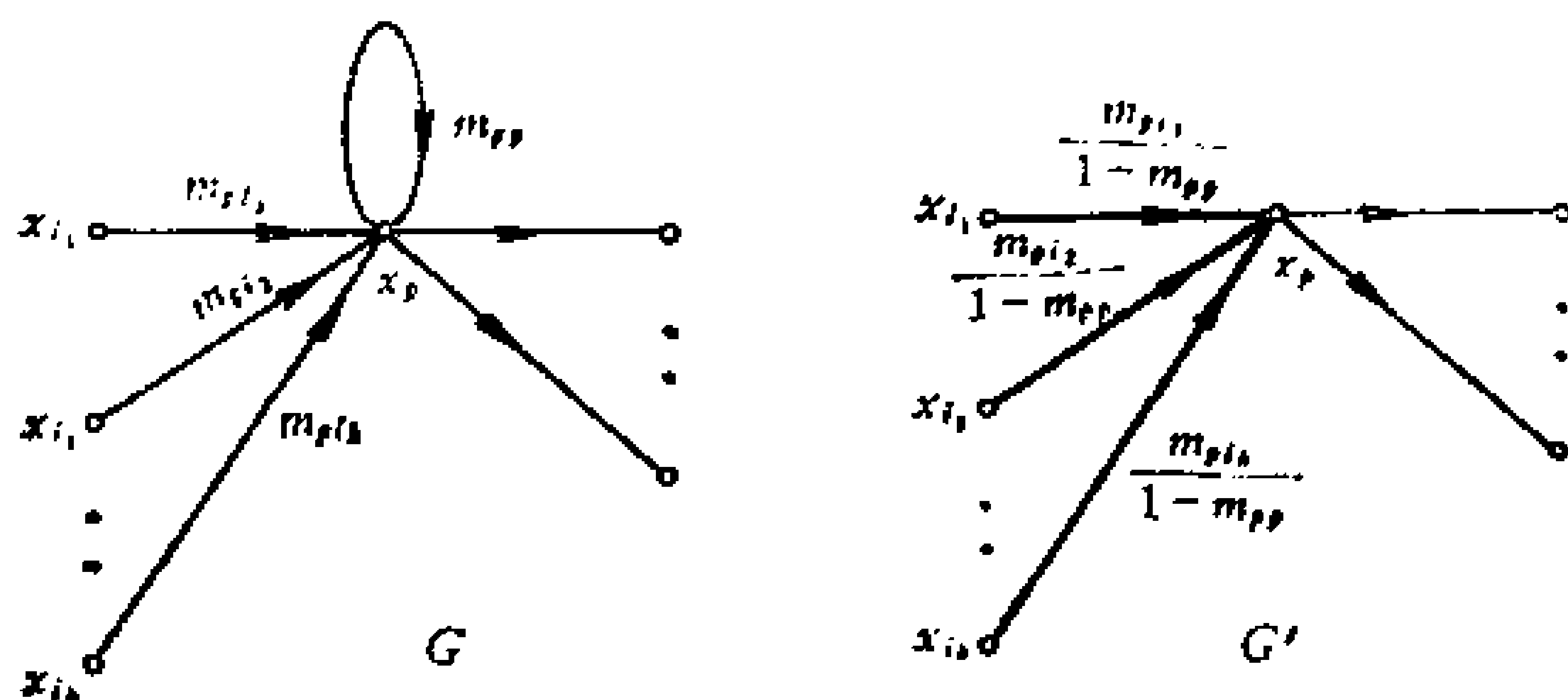


图10-2-4

（a）信号流图 G；（b）信号流图G'

$$(1-m_{pp})\,x_p=\sum_{\substack{r=1\\ i_r\neq p}}^{k} m_{pi_r}\,x_{i_r} \tag{10-2-5}$$

或在 $m_{pp}\neq 1$ 的条件下变成

$$x_p=\sum_{\substack{r=1\\ i_r\neq p}}^{k}\frac{m_{pi_r}}{1-m_{pp}}\,x_{i_r} \tag{10-2-6}$$

设图10-2-4(b)中的 G' 是由 G 删除自环(x_p,x_p)并将边 (x_{i_r},x_p)的权从 m_{pi_r} 变成 $m_{pi_r}/(1-m_{pp})$，$(r=1,2,\cdots,k)$得到的。则式(10-2-6)就是 G' 在顶点 x_p 的方程。而且 G'和 G 在其他任一顶点的方程都相同。因此，我们可以说，在顶点 x_p 的自环可以移去，只须在 $m_{pp}\neq1$的条件下用$(1-m_{pp})$去除每条指向顶点 x_p 的边的权。

3.考虑图10-2-5(a)中的信号流图G，其中在顶点 x_p 没有自环。在顶点 x_p 的方程是

$$x_p=\sum_{\substack{r=1\\ i_r\neq p}}^{k} m_{pi_r}\,x_{i_r} \tag{10-2-7}$$

顶点 x_{j_u} 的方程可写为

$$x_{j_u}=m_{j_u p}\,x_p+\sum_{\substack{s=1\\ i_s\neq p}}^{n} m_{j_u i_s}\,x_{i_s} \tag{10-2-8}$$

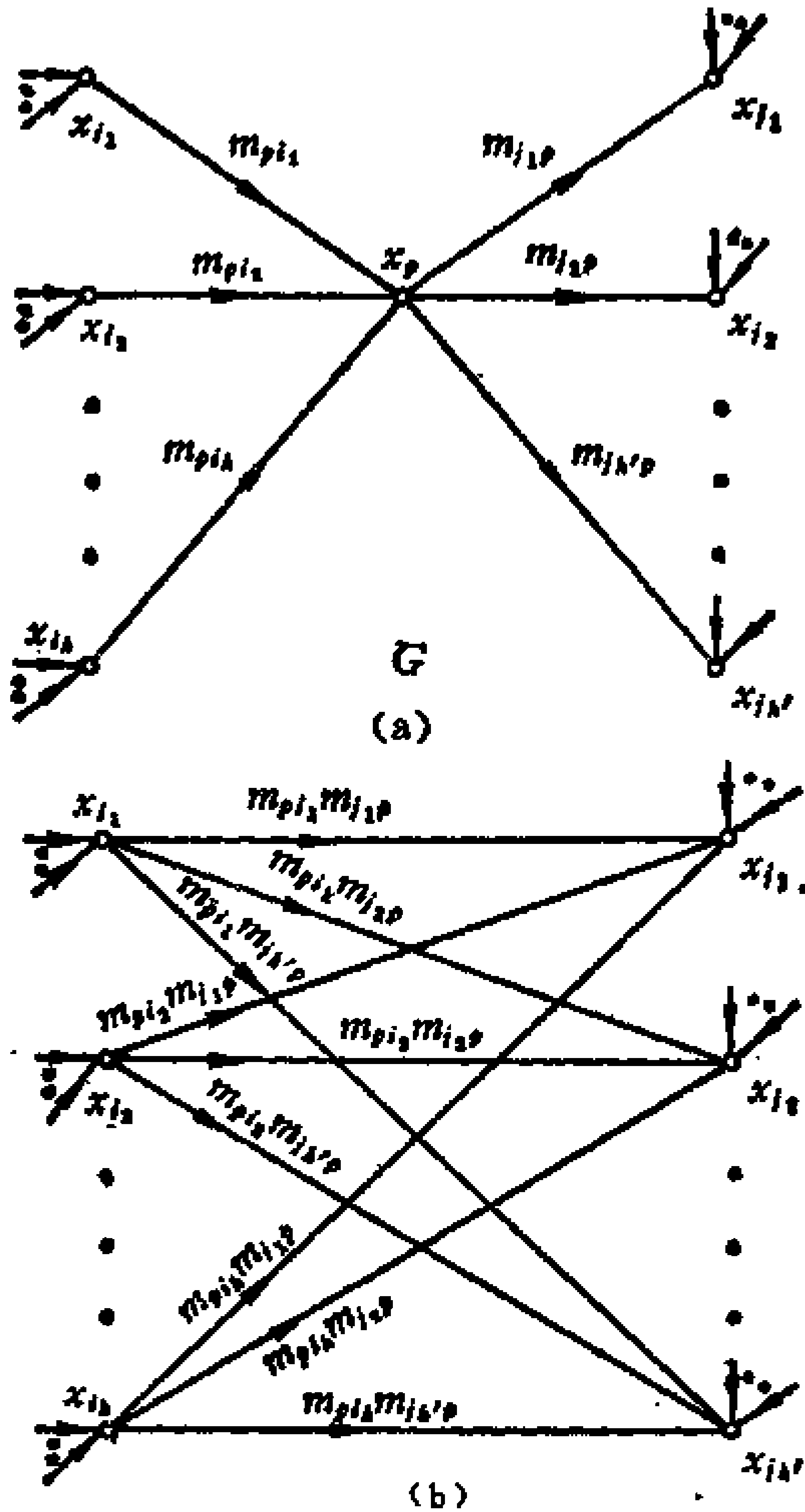


图10-2-5　消去了一个顶点的信号流图

(a)信号流图G；（b)消去顶点x_p得到的信号流图

其中 $u=1,2,\cdots,k'$。将式(10-2-7)代入式(10-2-8)，我们有

$$x_{j_u}=\sum_{\substack{r=1\\ i_r\neq p}}^{k}(m_{j_u p}\,m_{p i_r})x_{i_r}+\sum_{\substack{s=0\\ i_s\neq p}}^{n}m_{j_u i_s}x_{i_s} \tag{10-2-9}$$

这个等式表明，我们要消去顶点 x_p 而不改变其余顶点处的方程，只要用从 x_{i_r} 到 x_{j_s} 的一条权为 $(m_{pi_r}\,m_{j_sp})$ 边来取代由 m_{pi_r} 和 m_{j_sp} 这两条边组成的有向路径就行了，如图10-2-5(b)所示，$(1\leqslant r\leqslant k,\ 1\leqslant s\leqslant k')$。顶点 x_{i_r} 和 x_{j_s} 可以是相同的。然而，若它们相同，m_{pi_r} 和 m_{j_sp} 将是一个有向回路，而不是一个有向路径(这是有专门名词的好处)。

应用信号流图的一个目的是寻求源点 x_n 和汇点 x_0 之间的关系。如果逐次运用上述规则，而得到一个只含两个顶点 x_n 和 x_0 和由 x_n 到 x_0 的一条边的信号流图，那么这条边的权就给出了待求的关系。可以看出，逐次运用这些规则来得到所求关系的过程也正是代入并化简联立方程的过程。使用信号流图的一个重要优点就是可以用拓扑方法得到所求的关系。这一点我们紧接着就讨论。

方程(10-2-2)可以表示为：

$$\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n}\\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n}\\ & & \cdots & \\ m_{n-11} & & \cdots & m_{n-1n}\\ m_{01} & & \cdots & m_{0n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n \end{bmatrix} \tag{10-2-10}$$

在

$$x_n=Kx_0 \tag{10-2-11}$$

时，式(10-2-10)又可以写为

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \\ x_0 \end{bmatrix}
=
\left[\begin{array}{cccc|c}
m_{11} & m_{12} & & m_{1n} & 0 \\
m_{21} & m_{22} & & m_{2n} & 0 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
m_{n-11} & m_{n-12} & & m_{n-1n} & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & K \\
\hline
m_{01} & m_{02} & & m_{0n} & 0
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \\ x_0 \end{bmatrix}
\qquad (10\text{-}2\text{-}12)
$$

或者

$$
\begin{bmatrix}
(m_{11}-1) & m_{12} & \cdots & m_{1n} & 0 \\
m_{21} & (m_{22}-1) & \cdots & m_{2n} & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
m_{n-11} & m_{n-12} & \cdots & m_{n-1n} & 0 \\
0 & 0 \quad 0 & \cdots & 0 \quad -1 & K \\
m_{01} & m_{02} & \cdots & m_{0n} & -1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \\ x_0 \end{bmatrix}
= 0
\qquad (10\text{-}2\text{-}13)
$$

为简化起见，将式(10-2-13)表示为

$$(M-U)X=0 \qquad (10\text{-}2\text{-}14)$$

现在，比较一下图10-2-6所示的矩阵$(M-U)$的流图和图10-2-2所示的信号流图，可以看出，这两个线图几乎是一样的。事实上，图10-2-2中的信号流图是图10-2-6中流图的子图。换句话说，我们在图10-2-2的信号流图中，给每个顶点都加上权为(-1)的自环，并加上一条从顶点 x_0 到顶点 x_n 的K边，就可以得到图10-2-6的流图。为简便起见，称图10-2-2中的信号流图为图10-2-6中流图的对应信号流图。

由式(10-1-9)，$(M-U)$的行列式是

$$|M-U|=(-1)^{n+1}\sum(-1)^{k_j}(P\text{-集圈 } D_j \text{ 乘积}) \qquad (10\text{-}2\text{-}15)$$

设 $D_j(\bar{K})$是一个不含边K的 P-集圈，又设 $D_q(K)$是一个包

含边K的P-集圈，则式(10-2-15)变成

$$|M-U|=(-1)^{n+1}[C+KP] \tag{10-2-16}$$

其中

$$C=\sum(-1)^{k_j}(P\text{-集圈 }D_j(\bar{K})\text{乘积}) \tag{10-2-17}$$

$$KP=\sum(-1)^{k_q}(P\text{-集圈 }D_q(K)\text{乘积}) \tag{10-2-18}$$

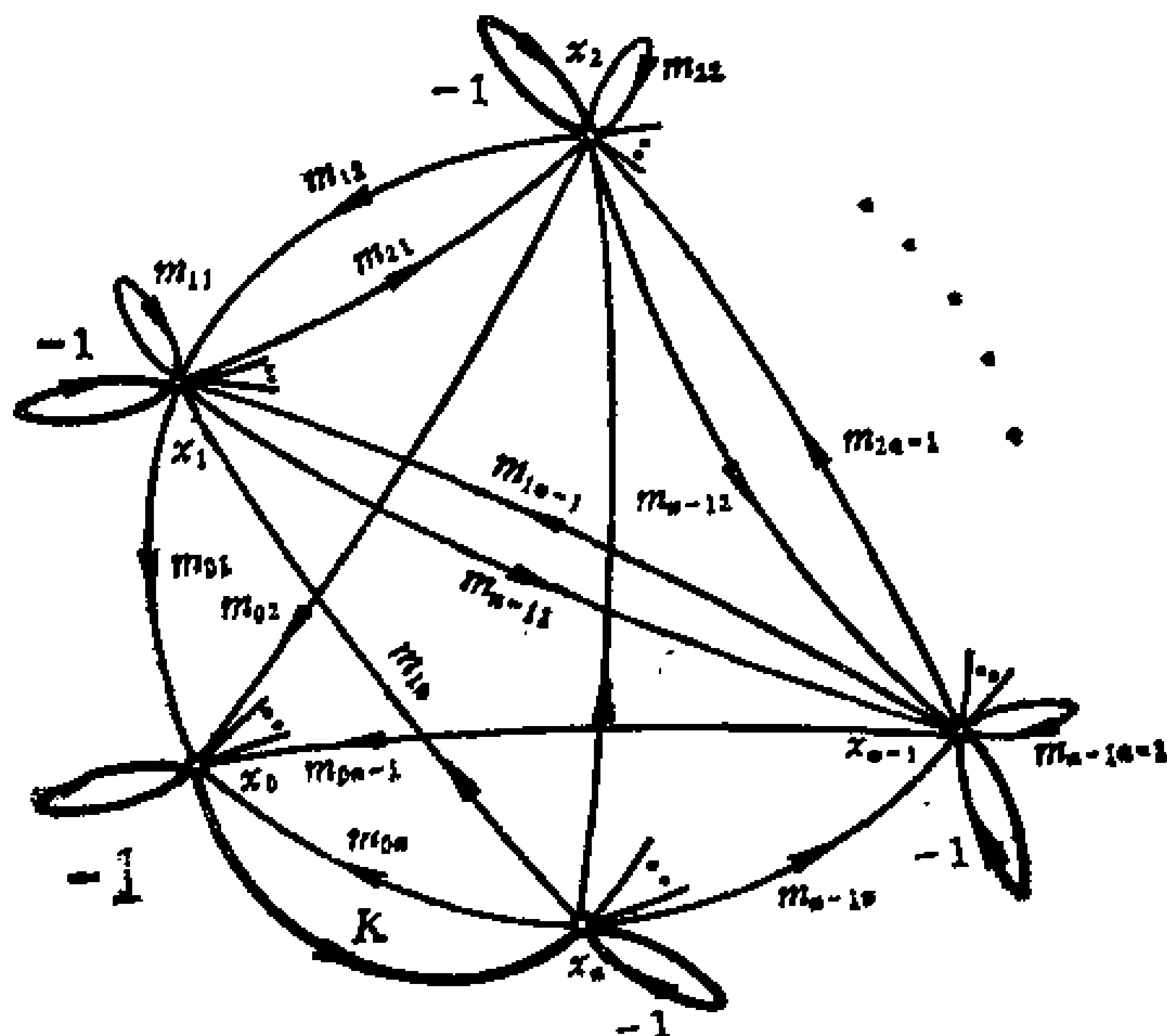


图10-2-6 $(M-U)$的流图

为了得到式(10-2-14)的非平凡解，$(M-U)$的行列式必须为零，或者说

$$(-1)^{n+1}[C+KP]=0 \tag{10-2-19}$$

因此，由式(10-2-11)和式(10-2-19)就有，

$$\frac{x_0}{x_n}=\frac{1}{K}=\frac{-P}{C} \tag{10-2-20}$$

既然C是$\sum(-1)^{k_i}$(P-集圈$D_i(\bar{K})$乘积)，那么每个P-集圈$D_i(\bar{K})$就可以看作是有向回路的两个集合$D_i(0)$和$D_i(-1)$的并集，其中$D_i(0)$是由对应信号流图的边组成的有向回路的集合，而$D_i(-1)$是不属于对应信号流图的(-1)自环的集合. 假定在$D_i(-1)$中有u个自环，则

$$D_i(-1)\text{乘积}=(-1)^u \tag{10-2-21}$$

而

$$\begin{aligned}(-1)^{k_i}(D_i(\bar{K})\text{乘积}) &= (-1)^{k_i}[D_i(0)\text{乘积}]\\ \cdot[D_i(-1)\text{乘积}] &= (-1)^{k_i-u}(-1)^u[D_i(0)\text{乘积}](-1)^u\\ &=(-1)^{k'_i}(D_i(0)\text{乘积})\end{aligned} \tag{10-2-22}$$

其中$k'_i=k_i-u$是$D_i(0)$中有向回路的数目. 如果$D_i(0)$是空集，则式(10-2-22)变为

$$(-1)^{k_i}D_i(\bar{K})\text{乘积}=1 \tag{10-2-23}$$

注意，$D_i(0)$是对应信号流图中顶点不相接的有向回路并集，它不一定包含信号流图的所有顶点.

定义10-2-2 设C_r定义为

$$C_r=\sum(\text{集合}D_i(0)\text{的}D_i(0)\text{乘积}) \tag{10-2-24}$$

它恰由r个有向回路组成.

于是，式(10-2-17)中的C等于

$$C=1-C_1+C_2-C_3+\cdots \tag{10-2-25}$$

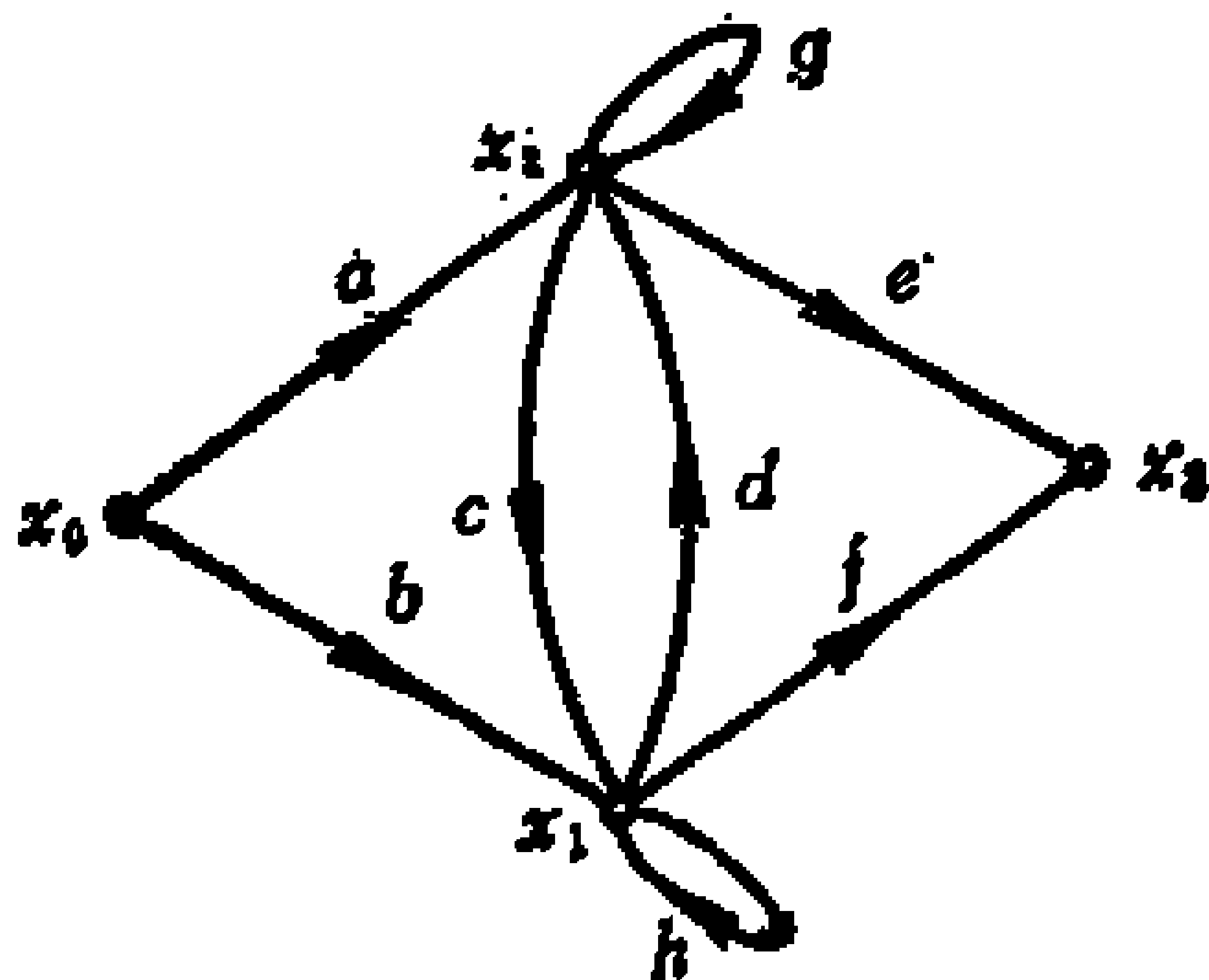


图10-2-7 信号流图

例如，图10-2-7中信号流图的C可以用拓扑方法得到，取C_1，C_2，…为：

$$C_1 = g + h + cd$$
$$C_2 = gh$$
$$C_u = 0 \quad (\text{对} u \geqslant 3)$$

因此

$$C = 1 - g - h - cd + gh$$

回忆一下，一条从顶点v_0到v_n的有向路径是从v_0到v_n的那样一条路径：若我们给定此路径的方向为从v_0到v_n，则路径中每条边的方向将与路径的方向一致（见定义6-6-7）。例如，图10-2-7中的(a,e)是从顶点x_0到顶点x_3的一条有向路径。

因为流图G_F的KP等于$\sum(-1)^{k_q}[P$-集圈$D_q(K)$乘积]，并且每个P-集圈$D_q(K)$必包含边K因此从$D_q(K)$中删去边K后就是由一条有向路径P（从顶点x_n到顶点x_0）以及一些有向回路组成的顶点不相接的并集。现在定义符号P_i和$G_F(\overline{\Omega(P_i)}\,\overline{K})$是有用的。

定义10-2-3 符号P_i表示在流图G_F（见图10-2-6）中从顶

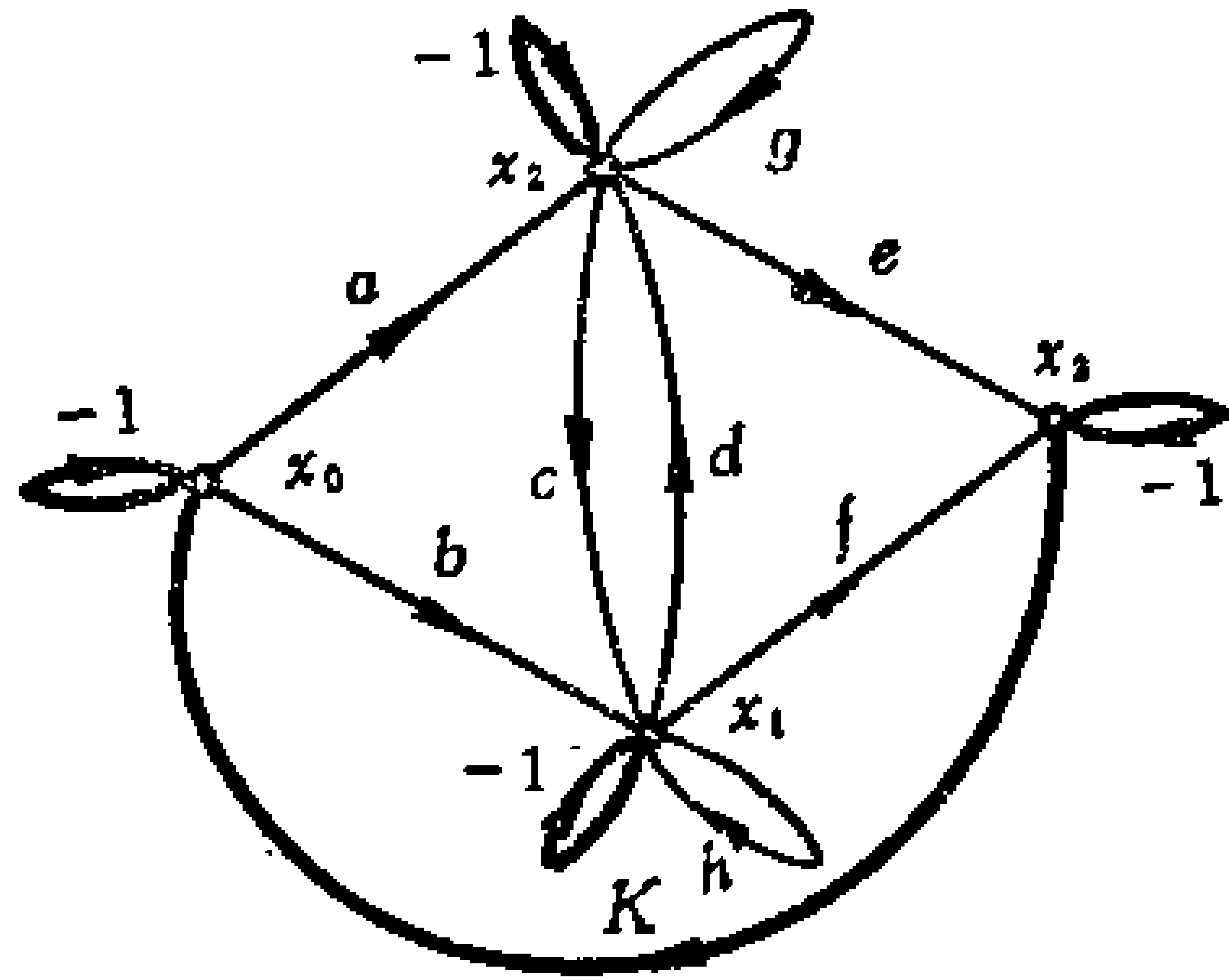


图10-2-8 流图G_F

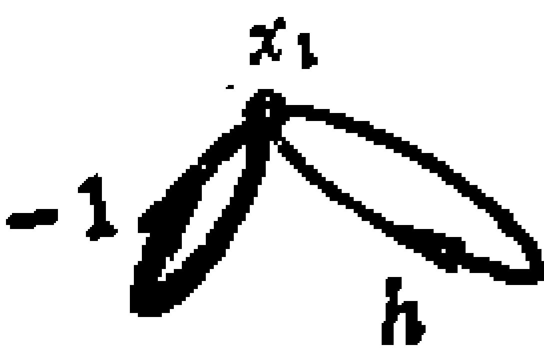


图10-2-9 G_F的子图$G_F(\overline{\Omega(P_i)}\overline{K})$，此处$P_i = (a,e)$

点 x_0 到顶点 x_n 的一条有向路径。符号 $G_F(\overline{\Omega(P_i)}\,\overline{K})$ 表示 G_F 的一个子图，它是由删除 P_i 的所有顶点，并删除与这些顶点相连的所有边以及边 K 而得到的。

$G_F(\overline{\Omega(P_i)}\,\overline{K})$ 的一个例子如图10-2-9所示，此时 G_F 如图10-2-8所示，而 $P_i=(a,e)$。

按照这个定义，包含路径 P_i 而不含边 K 的 $D_q(K)$ 可以看作由 $G_F(\overline{\Omega(P_i)}\,\overline{K})$ 中顶点不相接的各有向回路并集以及 P_i 所组成的集合。如果我们取流图 G_F 中的全部 $D_q(K)$，它们都包含有向路径 P_i，则

$$\sum_{\{D_q(K);\ P_i\in D_q(K)\}}(-1)^{k_q}D_q(K)\text{乘积}=-K\sum_{(i)}(P_i\text{乘积})\times$$

$$[\sum(-1)^{k_q-1}(G_F(\overline{\Omega(P_i)}\,\overline{K})P\text{-集圈乘积})] \tag{10-2-26}$$

其中 $\sum\limits_{\{D_q(K);\ P_i\in D_q(K)\}}$ 表示“对所有包含 P_i 的 $D_q(K)$ 求和”。

因为 k_q-1 是 P-集圈 $D_q(K)$ 中有向回路的数目而不计其边 K，所以 k_q-1 是 $G_F(\overline{\Omega(P_i)}\,\overline{K})$ 中 P-集圈 D_q' 的有向回路数。于是据式(10-2-25)，

$$\sum(-1)^{k_q-1}[G_F(\overline{\Omega(P_i)}\,\overline{K})\text{的}P\text{-集圈乘积}]$$
$$=G(\overline{\Omega(P_i)})\text{的}(1-C_1+C_2-C_3+\cdots) \tag{10-2-27}$$

其中 $G(\overline{\Omega(P_i)})$ 是对应信号流图 G 的一个子图，它是把有向路径 P_i 中所有的顶点、与这些顶点相连接的所有边删去而得到的。为了避免混淆，我们用记号 $C(\overline{P}_i)$ 来表示

$$C(\overline{P}_i)=G(\overline{\Omega(P_i)})\text{的}(1-C_1+C_2-C_3+\cdots) \tag{10-2-28}$$

则据式(10-2-26)，我们有

$$\sum_{\{D_q(K);\ P_i\in D_q(K)\}}(-1)^{k_q}D_q(K)\text{乘积}=-K(P_i\text{乘积})\cdot C(\overline{P}_i) \tag{10-2-29}$$

因此，式(10-2-20)右边的分子是

$$-P=\sum_{(i)}(P_i\text{乘积})\cdot C(\bar{P}_i) \qquad (10\text{-}2\text{-}30)$$

于是，由式(10-2-11)和(10-2-20)，源点与汇点之比为：

$$\frac{x_0}{x_n}=\frac{\sum\limits^{(i)}(P_i\text{乘积})\cdot C(\bar{P}_i)}{1-C_1+C_2-C_3+\cdots} \qquad (10\text{-}2\text{-}31)$$

这个方程通称为梅森(Mason)公式，作为一个例子，考虑图10-2-7的信号流图，我们可以得到从 x_0 到 x_3 的 $\sum\limits_{(i)}(P_i\text{乘积})\cdot C(\bar{P}_i)$ 为：

$$\sum_{(i)}(P_i\text{乘积})\cdot C(\bar{P}_i)=ae(1-h)+bf(1-g)+acf+bde$$

因此

$$\frac{x_0}{x_3}=\frac{ae(1-h)+bf(1-g)+acf+bde}{1-g-h-cd+gh}$$

10-3 信号流图的等效变换

在上节的开头，我们讨论了把一个信号流图变成较简单结构的规则。这里，我们不采用这些规则，而可以一步就将信号流图的一部分简化。为了研究这种方法，我们来考虑由两个子图 G_M 和 G_R 组成的信号流图 G，如图10-3-1所示，这两个子图是由顶点 x_1，x_2，…，x_n 结合在一起的。与这个信号流图对应的方程组为

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_M \\ X_I \\ X_R \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_M \\ X_I \\ X_R \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X_M \\ X_I \\ X_R \end{bmatrix}$$

(10-3-1)

其中，矩阵M来自子图G_M：

$$M=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \tag{10-3-2}$$

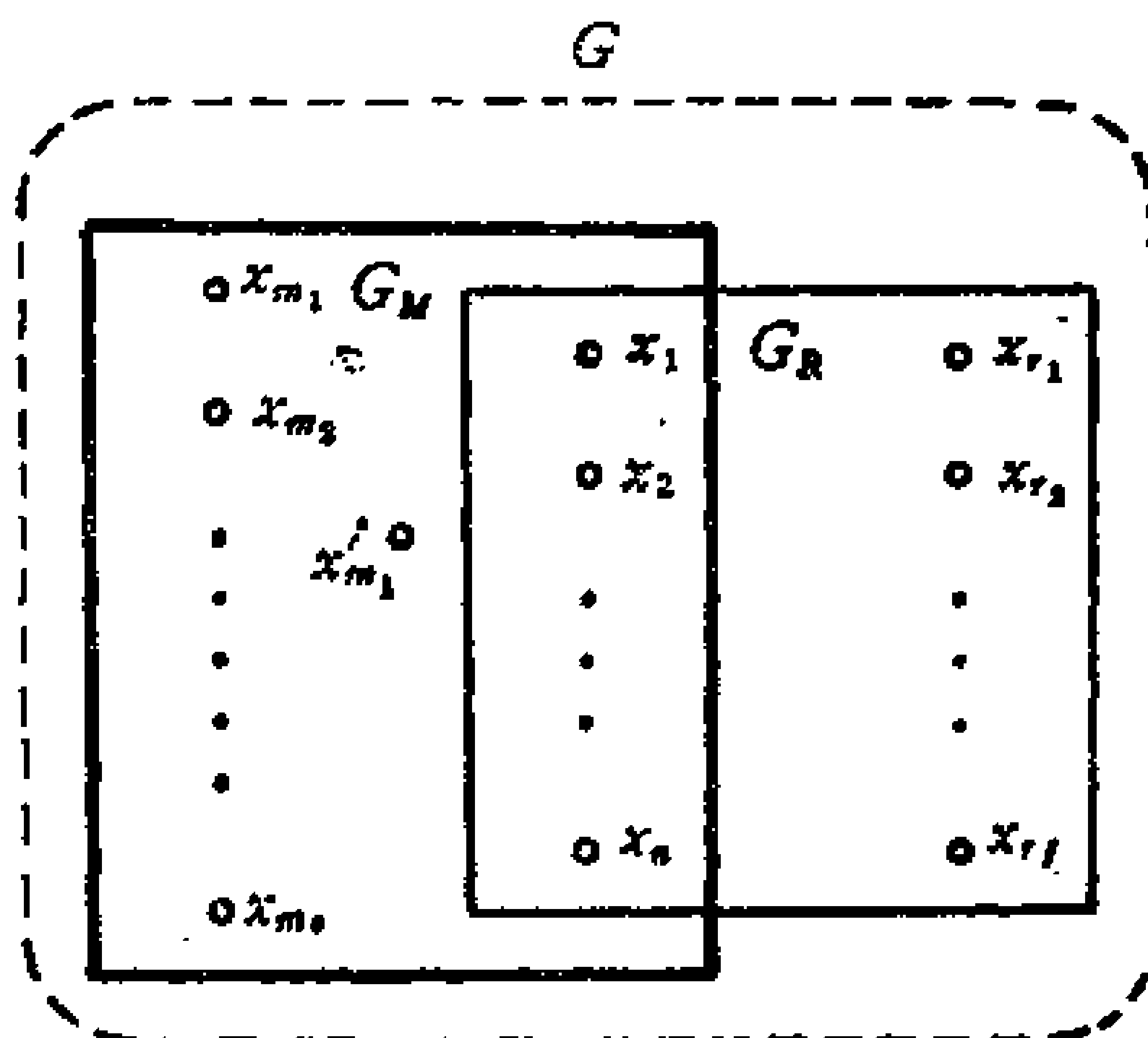


图10-3-1　由子图G_M和G_R组成的信号流图G

而矩阵R来自子图G_R：

$$R=\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \tag{10-3-3}$$

向量X_M，$\underset{\sim}{X}_M$，X_I和X_R是：

$$X_M=\begin{bmatrix} x_{m_1} \\ x_{m_2} \\ \vdots \\ x_{m_e} \end{bmatrix}\ \underset{\sim}{X}_M=\begin{bmatrix} x'_{m_1} \\ x_{m_2} \\ \vdots \\ x_{m_r} \end{bmatrix},\ X_I=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad X_R=\begin{bmatrix} x_{r_1} \\ x_{r_1} \\ \vdots \\ x_{r_f} \end{bmatrix} \tag{10-3-4}$$

此处x_m是源点，x'_m是汇点。

方程(10-3-1)可以分成两个方程组，即：

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_M \\ X_I \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{11} & R_{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_M \\ X_I \\ X_R \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tilde{X}_M \\ X_I \end{bmatrix} \tag{10-3-5}$$

和：

$$[R_{21} \quad R_{22}]\begin{bmatrix} X_I \\ X_R \end{bmatrix}=X_R \tag{10-3-6}$$

式(10-3-6)又可以写为

$$[R_{21} \quad (R_{22}-U)]\begin{bmatrix} X_I \\ X_R \end{bmatrix}=0 \tag{10-3-7}$$

假定$(R_{22}-U)$是非奇异的，此方程就能解出 X_R

$$X_R=-[R_{22}-U]^{-1}R_{21}X_I \tag{10-3-8}$$

将此式代入式(10-3-5)得

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_M \\ X_I \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_{21}-R_{12}[R_{22}-U]^{-1}R_{21} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_M \\ X_I \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} \tilde{X}_M \\ X_I \end{bmatrix} \tag{10-3-9}$$

由式(10-3-1)得到的汇点和源点之比(x'_{m_1}/x_{m_1})正好与由式 (10-3-9) 得到的相同。因此在图10-3-1中，消去子图 G_R 的所有顶点 x_{r_1}，$x_{r_2}, \cdots, x_{r_f}$ 之后，必然得到式(10-3-9)所表示的图。换句话说，可以用一个由顶点 x_1，x_2，…，x_n 构成的新图来代替子图 G_R，前者由下式给出：

$$[R_{11}-R_{12}(R_{23}-U)^{-1}R_{21}]X_I=X_I \tag{10-3-10}$$

因此，要从所给的子图 G_R 得到新子图 G_I，只需知道 $[R_{11}-R_{12}(R_{22}-U)^{-1}R_{21}]$的每个元素即可。

为了简便，首先定义以下符号。

定义10-3-1 对于给定的矩阵R，符号

$$R\left(\overline{\frac{t_1\ t_2\cdots t_v}{u_1u_2\cdots u_v}}\right) \text{ 或 } R\left(\begin{matrix}\bar{t}_q: \\ \bar{u}_q:\end{matrix}\ q=1,2,\cdots,v\right)$$

表示从R删去行t_1，t_2，…，t_v和列u_1，u_2，…，u_v后得到的子矩阵，符号$G_R(\overline{u_1u_2\cdots u_v})$或$G_R(\bar{u}_q:\ q=1,2,\cdots,v)$用以表示从线图$G_R$中删去顶点$u_1$，$u_2$，…，$u_v$及连接到这些顶点上的所有边而得到的线图。

设

$$[R_{22}-U]^{-1}=\begin{bmatrix}\Delta_{h_1h_1} & \Delta_{h_2h_1} & \cdots & \Delta_{h_fh_1}\\ \Delta_{h_1h_2} & \Delta_{h_2h_2} & \cdots & \Delta_{h_fh_2}\\ & & \cdots & \\ \Delta_{h_1h_f} & \Delta_{h_2h_f} & \cdots & \Delta_{h_fh_f}\end{bmatrix} \tag{10-3-11}$$

和

$$R_{11}-R_{12}[R_{22}-U]^{-1}R_{21}=[C_{tu}] \tag{10-3-12}$$

又设R的行和列顺次为1，2，…，n，h_1，h_2，…，h_f。于是从式（10-3-12），就有

$$C_{tu}=r_{tu}-\frac{1}{\Delta}[r_{th_1}\ r_{th_2}\ \cdots\ r_{th_f}]\begin{bmatrix}\Delta_{h_1h_1} & \cdots & \Delta_{h_fh_1}\\ \Delta_{h_1h_2} & \cdots & \Delta_{h_fh_2}\\ & \cdots & \\ \Delta_{h_1h_f} & \cdots & \Delta_{h_fh_f}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_{h_1u}\\ r_{h_2u}\\ \vdots\\ r_{h_fu}\end{bmatrix} \tag{10-3-13}$$

或

$$C_{tu}=\frac{1}{\Delta}\left(r_{tu}\Delta-\sum_{p,q=1}^{f}r_{th_p}\Delta_{h_ph_q}r_{h_qu}\right) \tag{10-3-14}$$

式(10-3-14)右端的分子恰为以下矩阵的行列展开式：

$$\left[\begin{array}{c|ccc}r_{tu} & r_{th_1} & \cdots & r_{th_f}\\ \hline r_{h_1u} & & & \\ r_{h_2u} & & R_{22}-U & \\ \vdots & & & \\ r_{h_fu} & & & \end{array}\right]=[R-U]\left(\begin{matrix}\bar{q}:q=1,2,\cdots,n,q\neq t\\ \bar{q}':q'=1,2,\cdots,n,q'\neq u\end{matrix}\right) \tag{10-3-15}$$

因为

$$[R_{22}-U]=[R-U]\binom{\bar{q}:}{\bar{q}:}q=1,2,\cdots,n\Big) \qquad (10\text{-}3\text{-}16)$$

所以，我们有：

$$C_{tu}=\frac{\left|[R-U]\binom{\bar{q};q=1,2,\cdots,n,\ q\neq t}{\bar{q}';q'=1,2,\cdots,n,\ q'\neq u}\right|}{\left|[R-U]\binom{\bar{w}:}{\bar{w}:}w=1,2,\cdots,n\Big)\right|}$$

(10-3-17)

对应于

$$R\binom{\bar{w}:}{\bar{w}:}w=1,2,\cdots,n\Big)$$

的信号流图是 $G_R(\bar{x}_w:w=1,2,\cdots,n)$，因为删去行$i_w$和列$i_w$等价于删去 G_R的顶点 x_{i_w}以及所有与该点相连的边。于是，据式(10-1-9)：

$$\left|[R-U]\binom{\bar{w}:}{\bar{w}:}w=1,2,\cdots,n\Big)\right|$$

$$=(-1)^a\sum(-1)^{k_j}(\bar{G}_R(\bar{x}_w:\ w=1,2,\cdots,n)\ \text{的}P\text{-集圈}\ D_j\text{乘积}) \qquad (10\text{-}3\text{-}18)$$

其中，$\bar{G}_R(\bar{x}_w:\ w=1,2,\cdots,n)$是在 $G_R(\bar{x}_w:\ w=1,2,\cdots,n)$的每个顶点上加入$(-1)$自环而得到的流图，$k_j$ 是 P-集圈 D_j 中 有向回路的数目。因此，据式(10-2-26)：

$$\left|[R-U]\binom{\bar{w}:}{\bar{w}:}w=1,2,\cdots,n\Big)\right|$$

$$=(-1)^a[\text{信号流图}\ G_R(\bar{x}_w:w=1,2,\cdots,n)\text{的}\ (1-C_1+C_2-C_3+\cdots)] \qquad (10\text{-}3\text{-}19)$$

注意，a是$G_R(\bar{x}_w:w=1,2,\cdots,n)$的顶点数。

由

$$\left|[R-U]\begin{pmatrix}\bar{q}: & q=1,2,\cdots,n, & q\neq t\\ \bar{q}': & q'=1,2,\cdots,n, & q'\neq u\end{pmatrix}\right|$$

来考虑流图 $\bar{G}_F(K,\ \bar{x}_w:\ w=1,2,\cdots,n,\ w\neq t,u)$，我们给信号流图 $G_R(\bar{x}_w:\ w=1,2,\cdots,n,w\neq t,u)$ 的每个顶点加一个 (-1) 自环，并加一条从 x_t 到 x_u 的边 K 就可以得到它。考虑矩阵 F，它的行 u 和列 t 除元素 (u,t) 是 K 之外，其余元素都是零，并且它还有如下性质，删除行 u 和列 t 之后，所得的矩阵是

$$[R-U]\begin{pmatrix}\bar{q}: & q=1,2,\cdots,n, & q\neq t\\ \bar{q}': & q'=1,2,\cdots,n, & q'\neq u\end{pmatrix}$$

即 F 是

$$F=\begin{matrix} \\ t\\ u\\ r_1\\ \vdots\\ r_f\end{matrix}\begin{matrix} t & u \quad\quad r_1 \quad\quad\quad r_f\\ \left[\begin{array}{c|c} 0 & \\ K & 0 \quad\cdots\quad 0\\ \hline 0 & \\ \vdots & [R-U]\begin{pmatrix}\bar{q}: & q=1,2,\cdots,n, & q\neq t\\ \bar{q}': & q'=1,2,\cdots,n, & q'\neq u\end{pmatrix}\\ 0 & \end{array}\right]\end{matrix} \tag{10-3-20}$$

于是 F 的行列式为

$$|F|=(-1)^{t+u}K\left|[R-U]\begin{pmatrix}\bar{q}: & q=1,2,\cdots,n, & q\neq t\\ \bar{q}': & q'=1,2,\cdots,n, & q'\neq u\end{pmatrix}\right| \tag{10-3-21}$$

因为 F 是一个方阵，于是对于它的所有行和列，列 r 和行 r 表示同一个顶点 x_r，所以，存在着一个与 F 对应的流图 G'_F，使得

$$|F|=(-1)^{a'}\Sigma(-1)^{k'}(G'_F \text{ 的 } P\text{-集圈 } D_r \text{ 乘积}) \tag{10-3-22}$$

我们还可以看出，流图 G'_F 除了没有从 x_t 到 x_u 的边之外，其余

部分与 $\bar{G}_R(K,\ \bar{x}_w:\ w=1,2,\cdots,n,\ w\neq t,\ u)$相同。
因此

$$(-1)^{\alpha'}\sum(-1)^{k_r}(G'_P \text{ 的 } P\text{-集圈 } D_r \text{ 乘积}$$
$$=(-1)^{\alpha'}\sum(-1)^{k_r}[\bar{G}_F(K,\ \bar{x}_w:w=1,2,\cdots,n,\ w\neq t,\ u)$$
$$\text{的 } P\text{-集圈 } D_r(K)\text{乘积}] \tag{10-3-23}$$

其中 $D_r(K)$代表一个包含边K的P-集圈。因此，据式(10-3-21)我们有

$$\left|[R-U]\begin{pmatrix}\bar{q}:q=1,2,\cdots,n,\ q\neq t\\ \bar{q}':q'=1,2,\cdots,n,\ q'\neq u\end{pmatrix}\right|$$
$$=\frac{-1}{K}(-1)^{\alpha'}\sum(-1)^{k_r}[\bar{G}_F(K,\ \bar{x}_w:w=1,2,\cdots,n,$$
$$w\neq t,u)\text{的}P\text{-集圈 } D_r(K)\text{乘积}] \tag{10-3-24}$$

设 $\bar{G}_F(K,\ \bar{x}_w:\ w=1,2,\cdots,n,\ w\neq t,u)$ 的一个有向回路是(K,P_i)，其中 P_i 是从 x_u 到 x_t 的一条有向路径。于是

$$\sum_{\{D_j(K):P_i\in D_j(K)\}}(-1)^{k_j}\ [\bar{G}_F(K,\bar{x}_w:w=1,2,\cdots,n,\ w\neq t,u)$$

的$D_j(K)$乘积]正好与式(10-2-26)的左边相同。因此我们有

$$\left|[R-U]\begin{pmatrix}\bar{q}:q=1,2,\cdots,n,\ q\neq t\\ \bar{q}':q'=1,2,\cdots,n,\ q'\neq u\end{pmatrix}\right|$$
$$=(-1)^{\alpha'}\sum_{(i)}G_R(\bar{x}_w:w=1,2,\cdots,n,\ w\neq t,u)\text{的}P_i\text{乘积})$$
$$\cdot C(\bar{P}_i)$$

注意，$G_R(\bar{x}_w:\ w=1,2,\cdots,n,\ w\neq t,u)$是由 G_R 删去除顶点 x_t 和 x_u 之外的其余顶点 $x_w(w=1,2,\cdots,n)$ 而得的信号流图。由于 $\alpha'=\alpha+2$，根据式(10-3-19)和式(10-3-25)，式(10-3-17)中的 C_{tu} 为

$$C_{tu} = \frac{\sum_{(i)} G_R(\bar{x}_w; w=1,2,\cdots,n, w \neq t, u) \text{的} (P_i \text{乘积}) \cdot C(\bar{P}_i)}{G_R(\bar{x}_w; w=1,2,\cdots,n) \text{的} (1 - C_1 + C_2 - C_3 + \cdots)}$$

(10-3-26)

如果我们把 x_t 和 x_u 分别看作 $G_R(\bar{x}_w;\ w=1,2,\cdots,n,\ w \neq t,\ u)$ 的源点和汇点，则此式与梅森公式(10-2-31)相同。

当 $t=u$时，式(10-3-14)变成

$$C_{tt} = \frac{1}{\Delta}\left(r_{tt}\Delta - \sum_{p,q=1} r_{thp}\Delta_{hphq}r_{hqt} \right) \qquad (10\text{-}3\text{-}27)$$

因此

$$C_{u} = \frac{\begin{vmatrix} r_{tt} & r_{th_1} & r_{th_2} & \cdots & r_{th_f} \\ r_{h_1t} & & & & \\ r_{h_2t} & & R_{22}-U & & \\ \vdots & & & & \\ r_{h_ft} & & & & \end{vmatrix}}{|R_{22}-U|} \qquad (10\text{-}3\text{-}28)$$

若要改进这个等式，令

$$C_{tt} = C_{tt} - 1 + 1 \qquad (10\text{-}3\text{-}29)$$

就得到

$$C_{tt} = \frac{\begin{vmatrix} r_{tt} & r_{th_1} & \cdots & r_{th_f} \\ r_{h_1t} & & & \\ r_{h_2t} & & R_{22}-U & \\ \vdots & & & \\ r_{h_ft} & & & \end{vmatrix} - |R_{22}-U|}{|R_{22}-U|} + 1$$

$$
= \frac{\begin{vmatrix} r_{tt}-1 & r_{th_1} \cdots r_{th_f} \\ r_{h_1t} & \\ r_{h_2t} & R_{22}-U \\ \vdots & \\ r_{h_ft} & \end{vmatrix}}{|R_{22}-U|} + 1
$$

$$
= \frac{\left|[R-U]\left(\frac{\bar{q}}{\bar{q}}; q=1,2,\cdots,n,\ q\neq t\right)\right|}{\left|[R-U]\left(\frac{\bar{w}}{\bar{w}}; w=1,2,\cdots,n\right)\right|} + 1 \quad (10\text{-}3\text{-}30)
$$

因为此式的分母与式(10-3-17) 的分母相同，所以我们只需要研究分子就可以了．注意：

$$
\left|[R-U]\left(\frac{\bar{w}}{\bar{w}};\ w=1,2,\cdots,n,\ w\neq t\right)\right|
$$

的表达式与式(10-3-18)相同，只是这里所考虑的流图是$\bar{G}_R$ ($\bar{x}_w$; $w=1,2,\cdots,n$, $w\neq t$)，或者说

$$
\left|[R-U]\left(\frac{\bar{w}}{\bar{w}};\ w=1,2,\cdots,n,\ w\neq t\right)\right|
$$

$$
= (-1)^{a+1}\sum_{(j)}(-1)^{kj}[\bar{G}_R(\bar{x}_w; w=1,2,\cdots,n, w\neq t)\text{的}
$$

$$
P\text{-集圈}\ D_j\ \text{乘积}] \quad (10\text{-}3\text{-}31)
$$

假定我们把式(10-3-31)右端分成两部分：

$$
\left|[R-U]\left(\frac{\bar{w}}{\bar{w}};\ w=1,2,\cdots,n,\ w\neq t\right)\right| = (-1)^{a+1}(F_1+F_2)
$$

$$(10\text{-}3\text{-}32)$$

其中F_1是这样一些项的集体，它们是与在顶点x_t上有(－1) 自环的所有可能的P-集圈相对应的各项；而F_2是其余项的集体，

F_1 还可以表达为

$$F_1 = (-1)\sum_{(l)}(-1)^{k_l}(\bar{G}_R(\bar{x}_w;\ w=1,2,\cdots,n)P\text{-的集圈}D_l\text{乘积}) \qquad (10\text{-}3\text{-}33)$$

这是因为每个 $D_l(x_t)$ 都包含了在顶点 x_t 上的(-1)自环。余下的集合没有这种自环，就是 $\bar{G}_R(\bar{x}_w;w=1,2,\cdots,n)$的$P$-集圈$D_l$。因此式(10-3-32)变为

$$\left|[R-U]\begin{pmatrix}\tilde{w}: & \\ & w=1,2,\cdots,n,\ w\neq t \\ \bar{w}: & \end{pmatrix}\right|$$

$$=(-1)^{a+2}G_R(\bar{x}_w:\ w=1,2,\cdots,n,\ w\neq t)\text{的}\{(-1)[G_R(\bar{x}_w;\ w=1,2,\cdots,n)\text{的}(1-C_1+C_2-C_3+\cdots)]$$

$$+\sum_{(j)}[d_j(x_t)\text{乘积}]\cdot C(\bar{d}_j)\} \qquad (10\text{-}3\text{-}34)$$

其中 $d_j(x_t)$是信号流图 $G_R(\bar{x}_w;w=1,2,\cdots,n,\ w\neq t)$ 的一个有向回路，它包含顶点 x_t。此外，$C(\bar{d}_j)$是子图 $G''(\bar{d}_j)$ 的 $(1-C_1+C_2-C_3+\cdots)$，该子图是从 $G_R(\bar{x}_w;\ w=1,2,\cdots,n,\ w\neq t)$ 删去有向回路 d_j 的所有顶点和与这些顶点相连的边而得到的。

由式(10-3-19)和式(10-3-34)，式(10-3-30)变为

$$C_{tt}=\frac{\sum_{(j)}G_R(\bar{x}_w;w=1,2,\cdots,n,\ w\neq t)\text{的}[d_j(x_t)\text{乘积}]\cdot C(\bar{d}_j)}{G_R(\bar{x}_w;w=1,2,\cdots,n)\text{的}(1-C_1+C_2-C_3+\cdots)}$$

(10-3-35)

注意，用于等效变换的两个等式，式(10-3-26)和式(10-3-35) 是非常相似的，这两式之间唯一的差别是一个有 $[d_j(x_t)\text{乘积}]$。由于P_l是从顶点 x_u 到顶点 x_t 的有向路径，因此，若合并顶点x_u和x_t，则该有向路径就变成包含顶点 x_t 的有向回路 $d_j(x_t)$。注意，式(10-3-26)和式(10-3-35)是在假设矩阵 $[R_{22}-U]$ 非奇异的情况下得到的。但是，也可以不要这个假设而得到这两个等式，我

们将这一点留给读者证明。

例10-3-1 假定我们有一个信号流图如图10-3-2所示，其中源点和汇点都在 G_M内，于是可以用下面的步骤消去子图 G_R。因为式(10-3-26)和式(10-3-35)的分母D是相同的，所以，

$$D = G_R(\bar{x}_w; w=1,2,3)\text{的}(1 - C_1 + C_2 - C_3 + \cdots) \tag{10-3-36}$$

其中 $G_R(\bar{x}_w; w=1,2,3)$由图10-3-3给出，D可简单地写为

$$D = 1 - g - h - def + gh$$

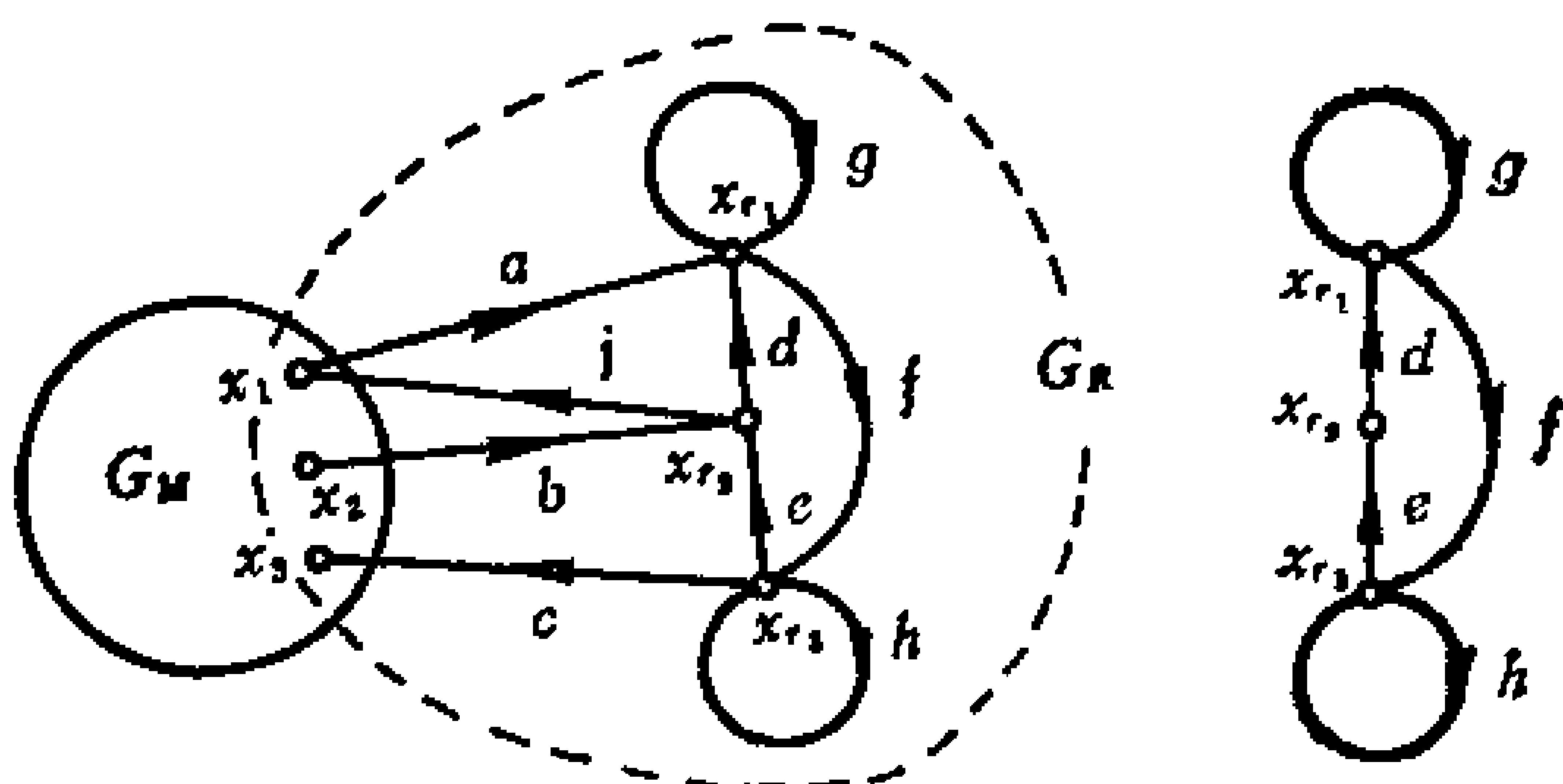


图10-3-2 由两个子图G_M和G_R所组成的信号流图G　　图10-3-3 子图$G_R(\bar{x}_w; w=1,2,3)$

对于k_{11}，式(10-3-35)的分子N_{11}是

$$N_{11} = \sum_{(j)} G_R(\bar{x}_w: w=2,3)\text{的}[d_j(x_1)\text{乘积}]\cdot C(\bar{d}_j)$$

其中 $G_R(\bar{x}_w, w=2,3)$如图10-3-4所示。因此，

$$N_{11} = aefj$$

于是

$$K_{11} = \frac{aefj}{1 - g - h - def + gh}$$

对于k_{31}，式(10-3-26)的分子N_{31}是

$$N_{31}=\sum_{(i)}G_R(\bar{x}_2)\text{的}(P_i\text{乘积})\cdot C(\overline{P}_i)$$

其中$G_R(\bar{x}_2)$如图10-3-5所示，因此，

$$N_{31}=acf$$

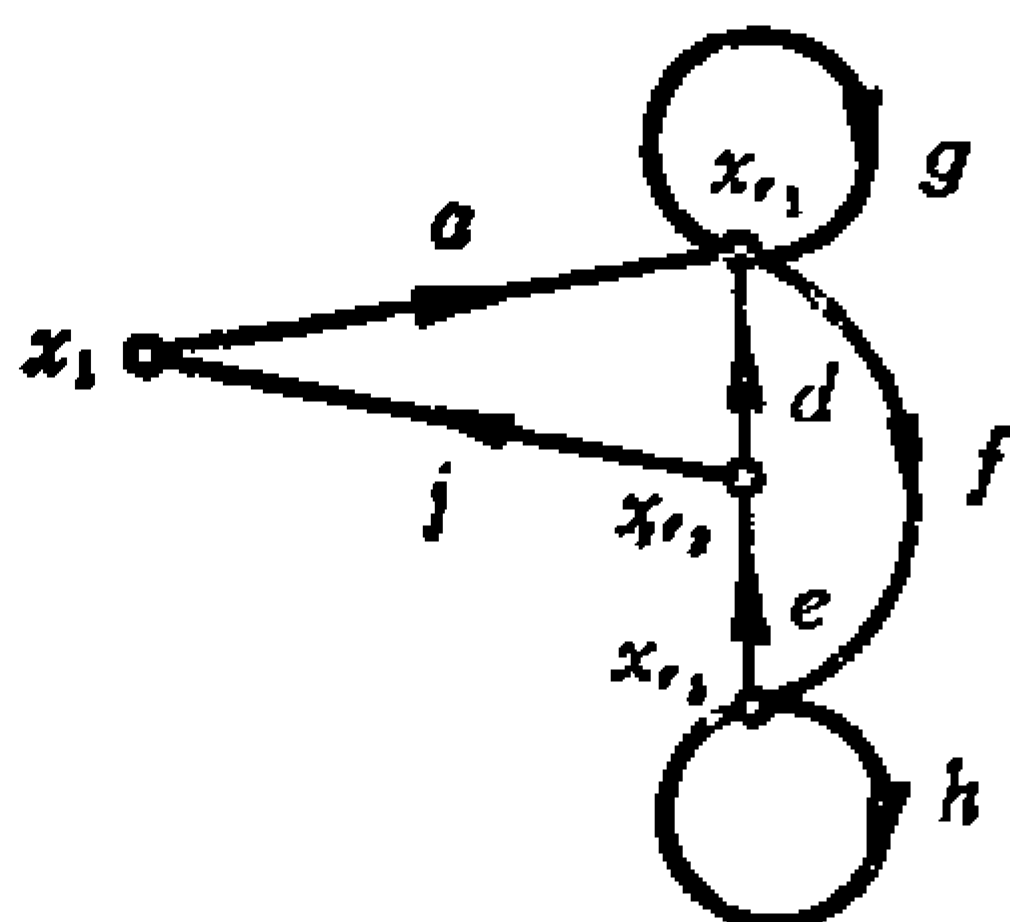


图10-3-4　子图$C_R(\bar{x}_w;w=2,3)$

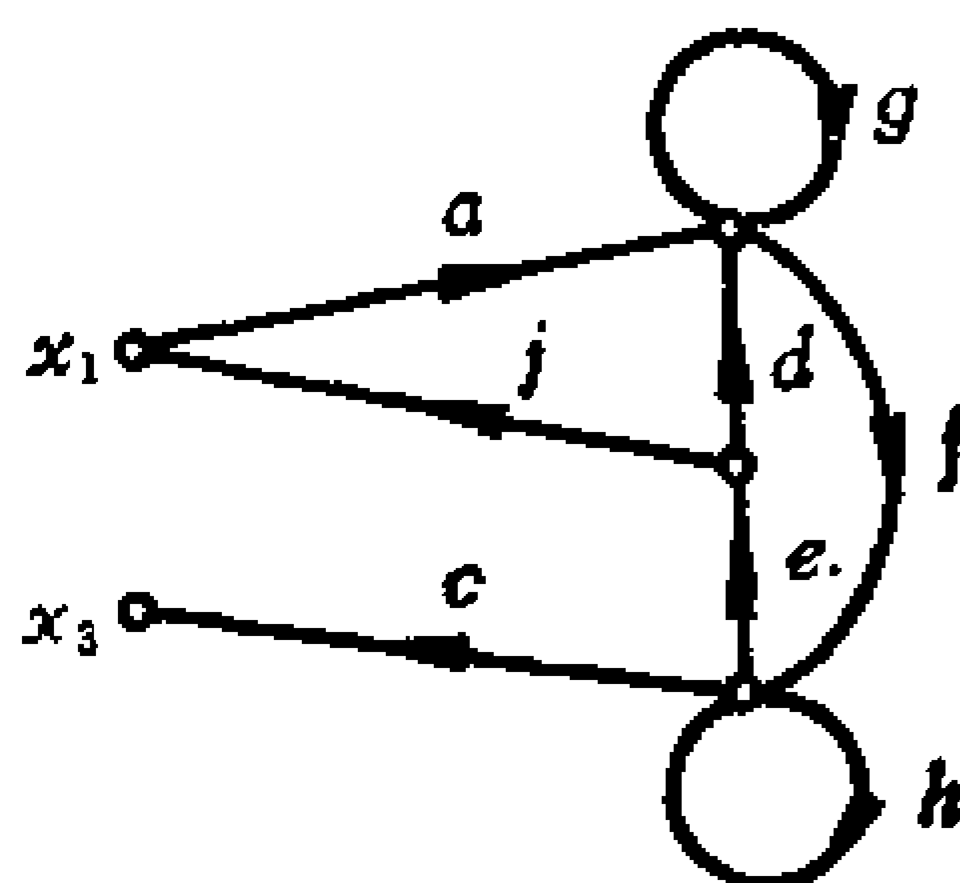


图10-3-5　$G_R(\bar{x}_2)$

现在就有

$$k_{31}=\frac{acf}{1-g-h-def+gh}$$

类似地

$$k_{32}=\frac{bcdf}{1-g-h-def+gh}$$

以及

$$k_{12}=\frac{bj(1-g-h+gh)}{1-g-h-def+gh}$$

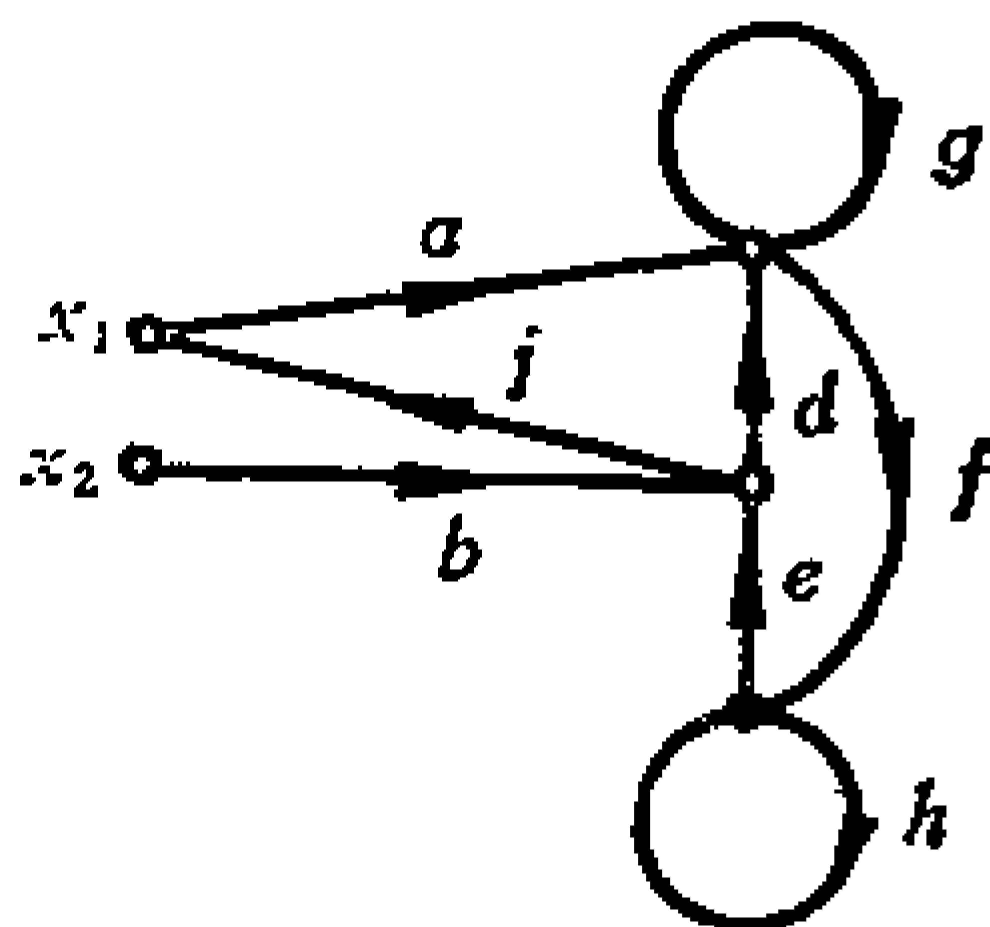


图10-3-6　$G_R(\bar{x}_3)$

其中$G_R(\bar{x}_3)$如图10-3-6所示，k_{12}的分子是从它得到的。容易看出，其他如k_{21}，k_{22}，…都为零。删除顶点x_{r_1}，x_{r_2}和x_{r_3}之后所得的信号流图如图10-3-7所示。

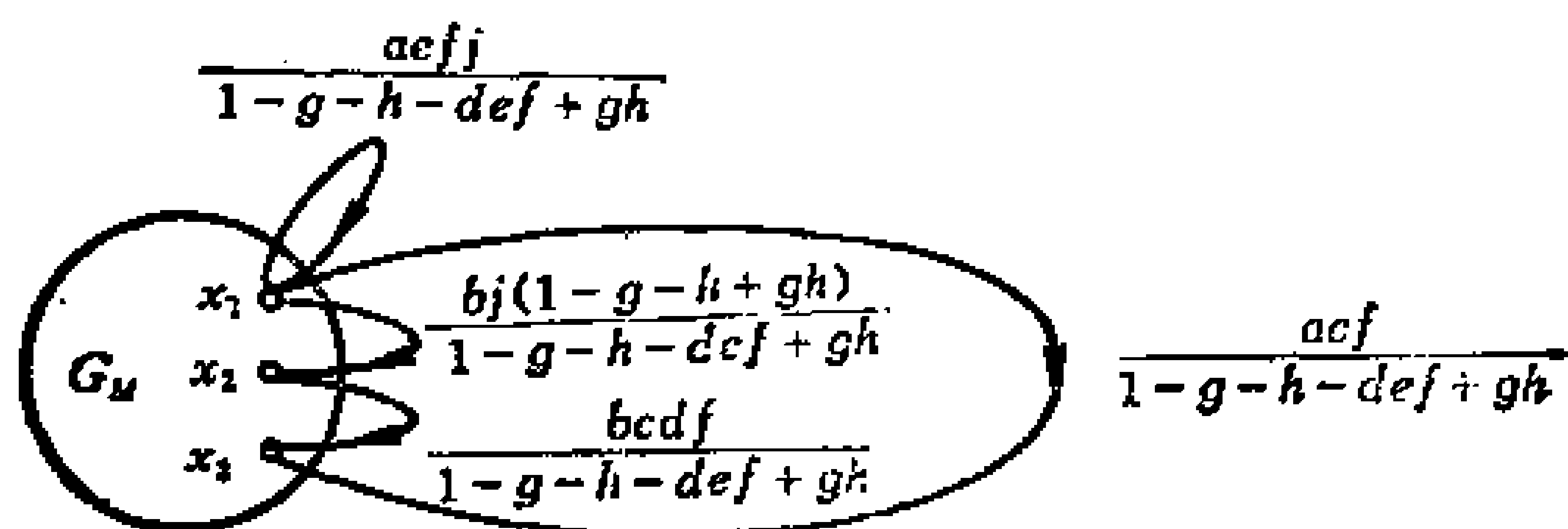
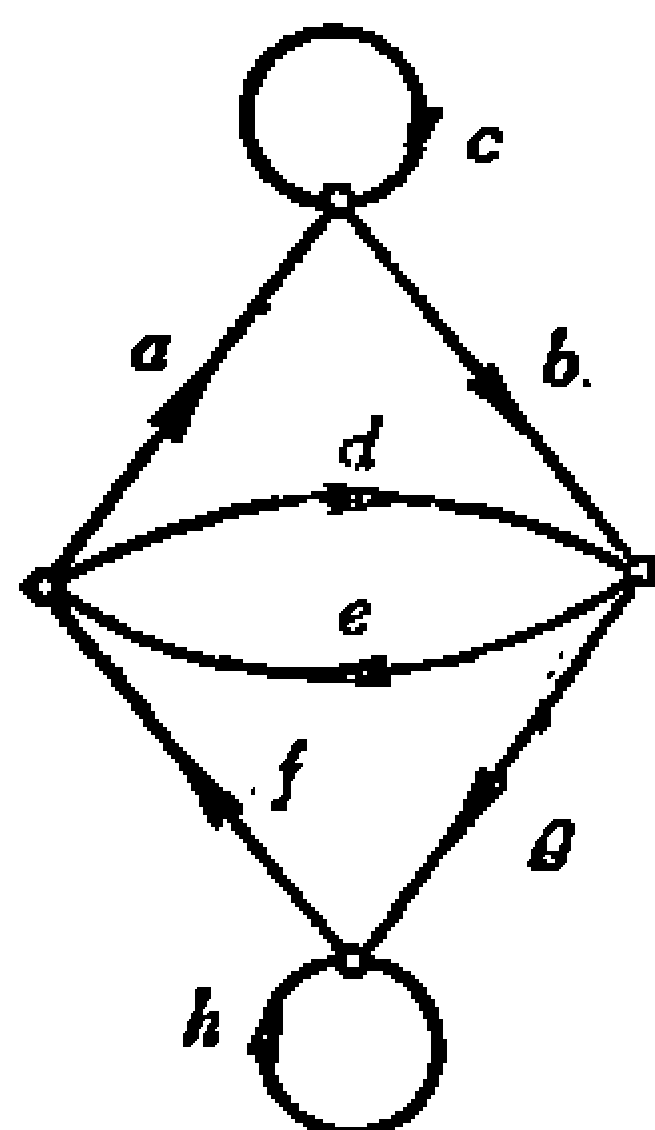


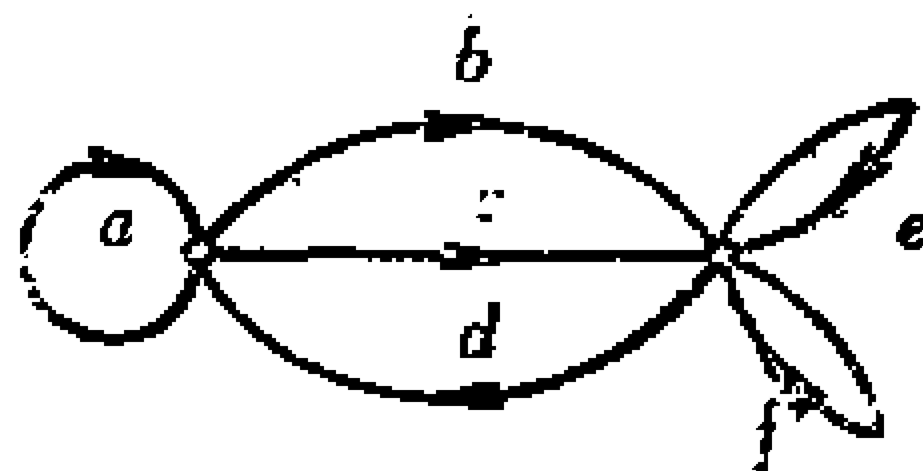
图10-3-7　消去G_R之后所得信号流图

习　　题

1.求出图P-10-1中流图的矩阵M的行列式。



(a)



(b)

图P-10-1

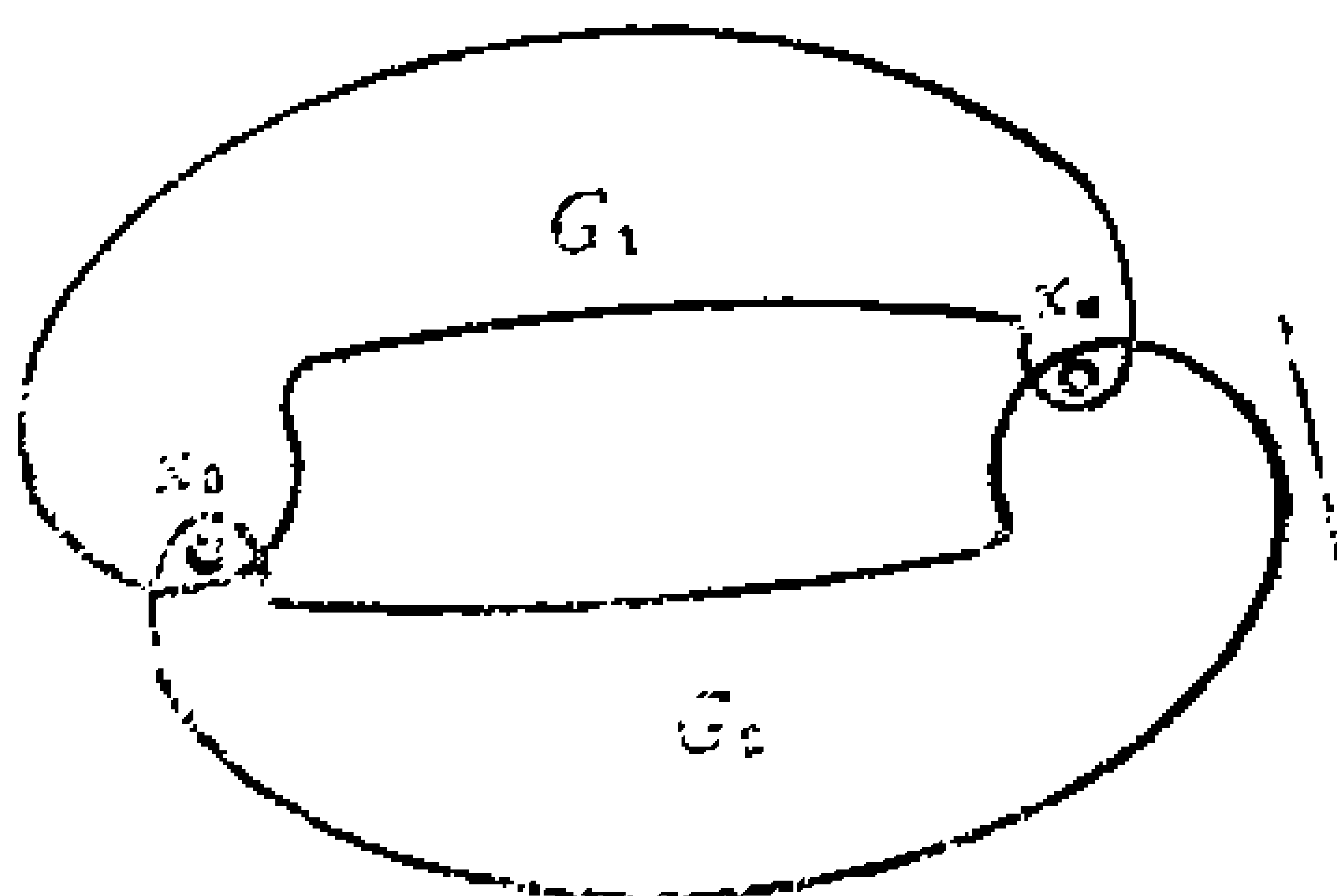
2.先画出对应流图，然后利用式（10-1-9）求矩阵M的行列式。

$$(a)M=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 4\\4 & 1 & 1\end{bmatrix}\quad (b)M=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\3 & 1 & 0\\1 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

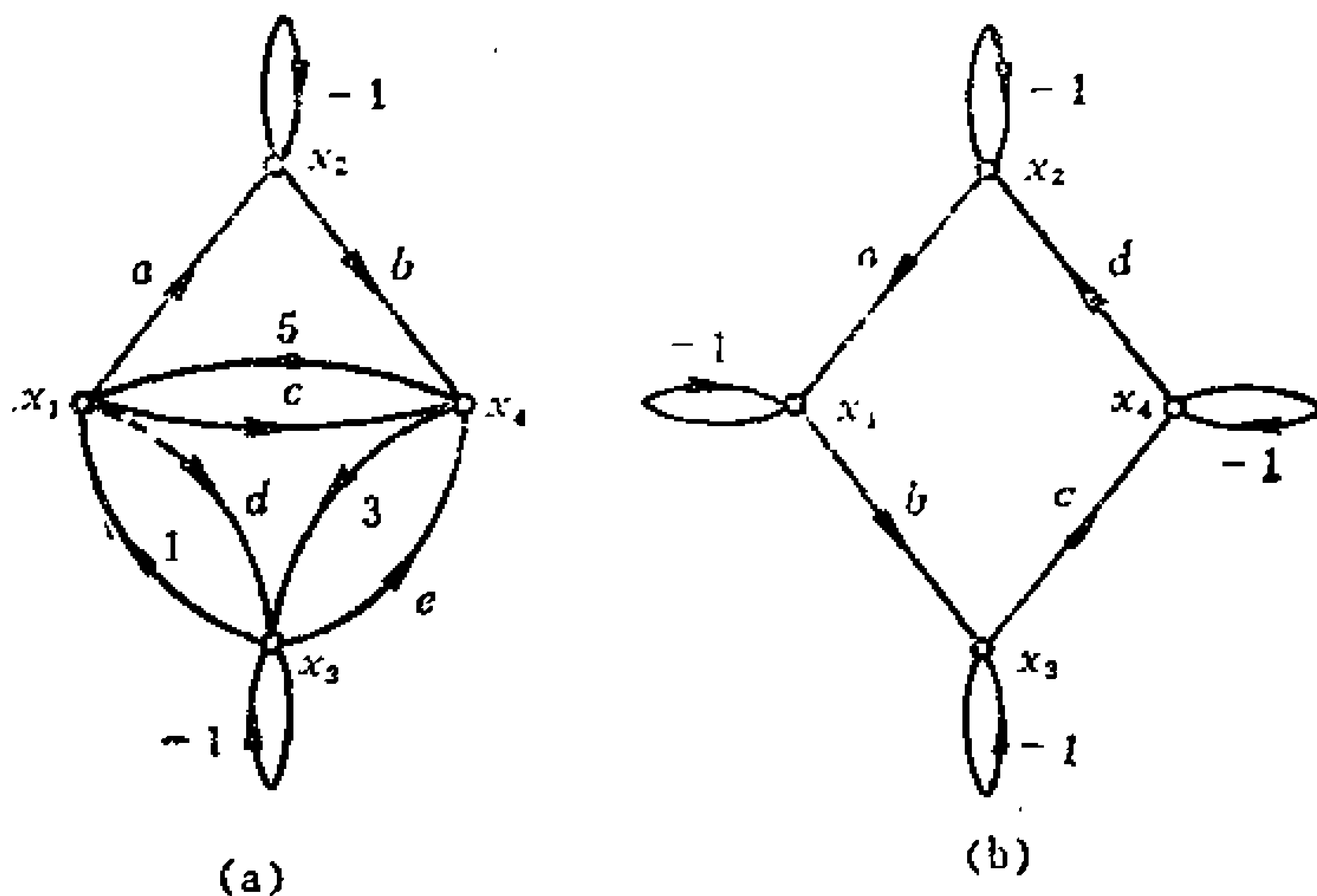
3.运用流图证明，矩阵M的行列式和M'（M的转置）的行列式是相同的。

4.设G是矩阵M的流图。直接从G求出矩阵$[M-U]$的行列式的拓扑公式，其中U是单位矩阵。

5.设G是矩阵M的流图。直接从G求出矩阵M的特征多项式（即矩阵$[M-\lambda U]$的行列式）的拓扑公式。



图P-10-6



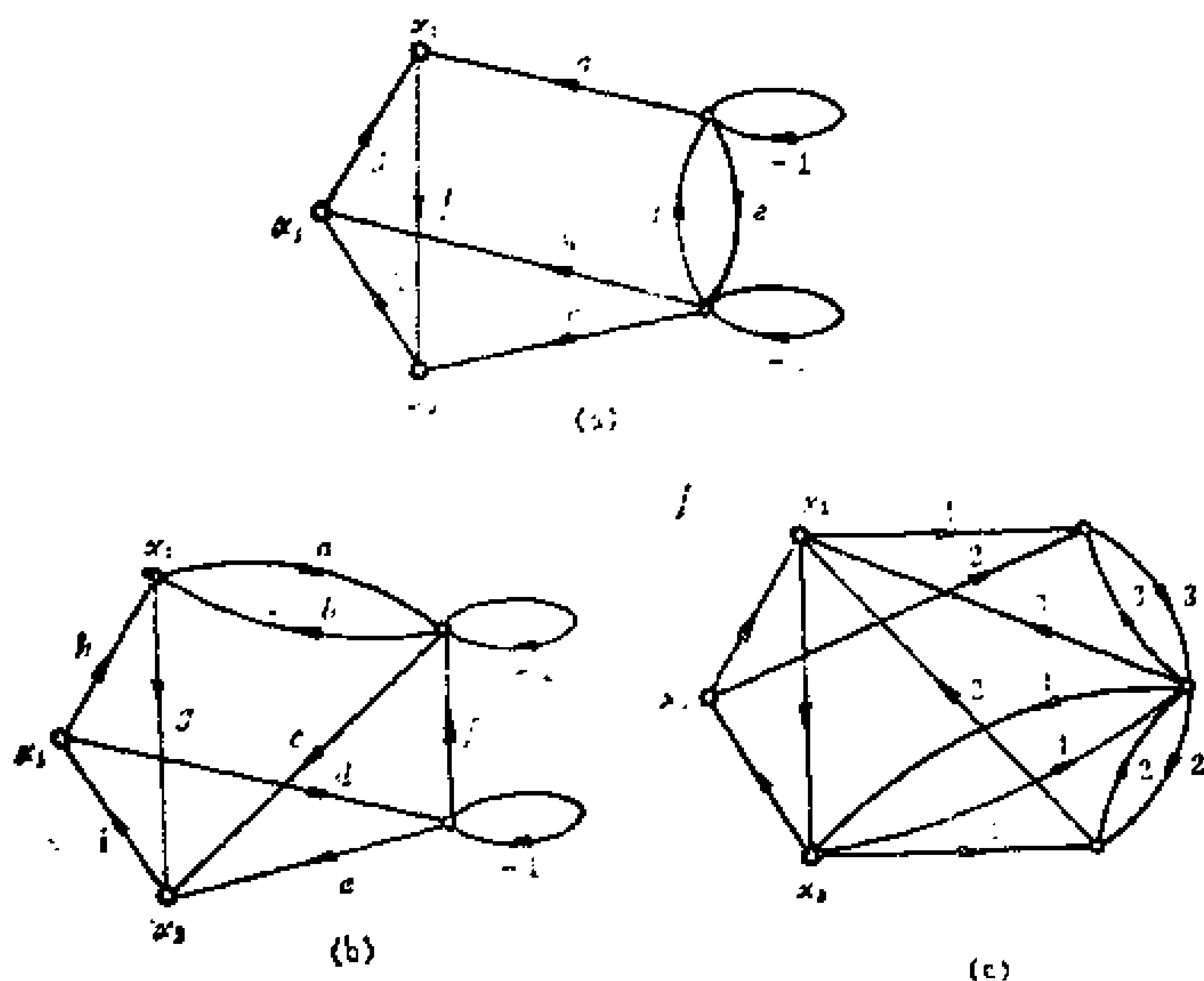
图P-10-7

(a)信号流图G；(b)信号流图G'

6.假定信号流图G是由两个子图G_1和G_2组成的，它们仅有两个公共点x_0和x_n，如图P-10-6所示。假如只考查G_1，则$x_0/x_n=R_1$，假如只考查G_2，则$x_0/x_n=R_2$。G的x_0/x_n等于什么？

7.用梅森公式[式（10-2-31）]求出图P-10-7中信号流图的x_4/x_1。

8.从图P-10-8的图求出只包含顶点x_1，x_2，x_3的等效信号流图。



图P-10-8

(a)信号流图G_1；(b)信号流图G_2；(c)信号流图G_3

第十一章 开关理论

11-1 连接矩阵

若把一个开关网络看成一个加权线图，我们就可以得到开关网络的若干有趣的拓扑性质。利用这些性质，可以导出开关网络的拓扑分析方法和综合方法。首先，我们来研究两种分析开关网络的方法，即所谓连接矩阵和应用第一章中研究过的路径集的方法。

开关网络的结构可以用一种称为连接矩阵的方阵来表示。该方阵的定义如下。

定义11-1-1 设G是由n个顶点组成且不含同方向并联边的有向线图。一个$n\times n$阶连接矩阵$C=[c_{ij}]$定义为

$$c_{ij}=\begin{cases} e & \text{如边 } e \text{ 是从顶点 } i \text{ 到顶点 } j \text{ 的边} \\ 0 & \text{如边 } e \text{ 不是从顶点 } i \text{ 到顶点 } j \text{ 的边} \end{cases}$$

注意，我们允许这个图具有自环。图11-1-1中线图的连接矩阵C是

$$C=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

从这个例子可以看出，连接矩阵表示出一个有向图中每一条边的位置。

为了写出包含并联边的有向图的连接矩阵，我们对定义加以改进。

定义11-1-2 设 $e_1, e_2, \cdots, e_k$ 是所有在顶点 i 和 j 之间的边，且它们的方向都是从 i 到 j，则连接矩阵的元素

$$c_{ij} \text{是} \sum_{r=1}^{k} e_r。$$

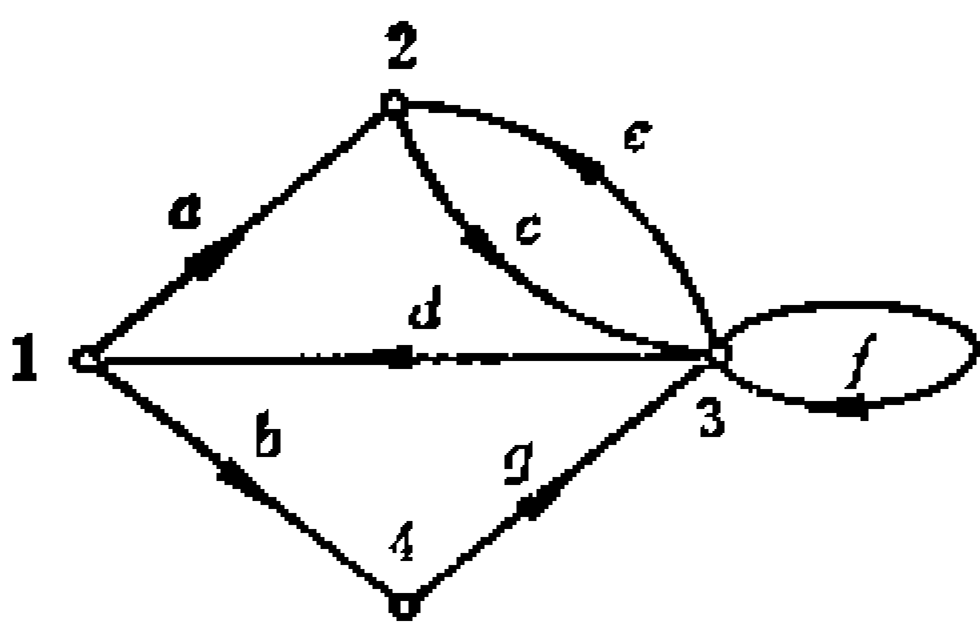


图11-1-1 有向图

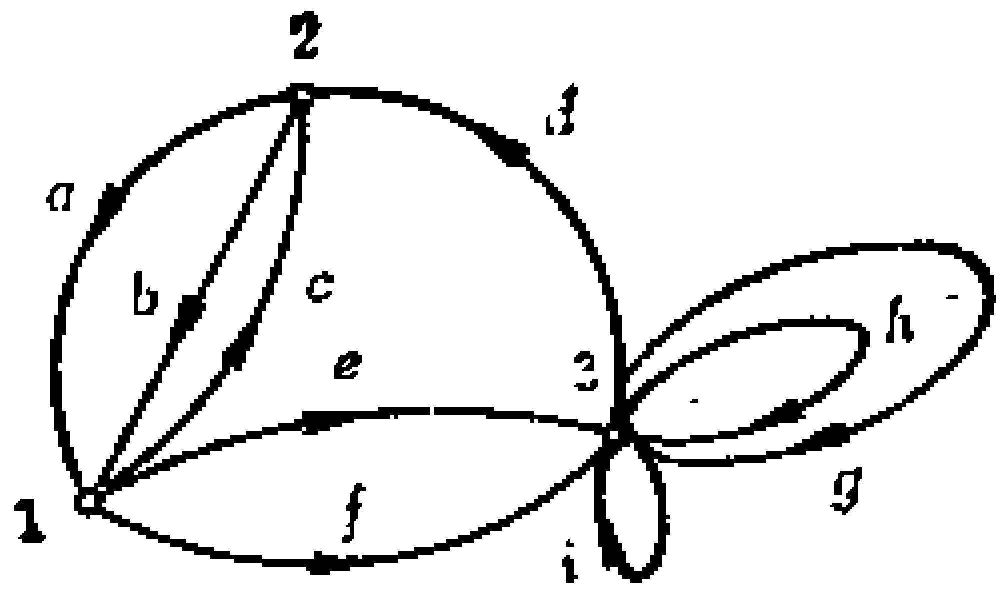


图11-1-2 有向图

例如，图11-1-2中有向图的连接矩阵 C 是

$$C = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & c & e+f \\ 2 & a+b & 0 & 0 \\ 3 & 0 & d & g+h+i \end{matrix}$$

我们将要说明，一个连接矩阵和对应于流图的矩阵 W 是非常相似的。回忆在一个给定矩阵 $W=[w_{ij}]$ 的流图中，w_{ij} 是加在从 j 到 i 的边上的权（见第十章）．设 G 是矩阵 $W=[w_{ij}]$ 的流图。设 W' 是从 W 用 $\sum_{r=1}^{k} w_{r_{pq}}$ 替换 w_{pq} 得到的矩阵。设 G' 是从 G（见图11-1-3）用并联边 $w_{r_{pq}}(r=1,2,\cdots,k)$ 替换边 w_{pq} 得到的。这些并联边的方向都与 w_{pq} 的方向相同，如图11-1-4所示。

矩阵 W' 的行列式可以写成：

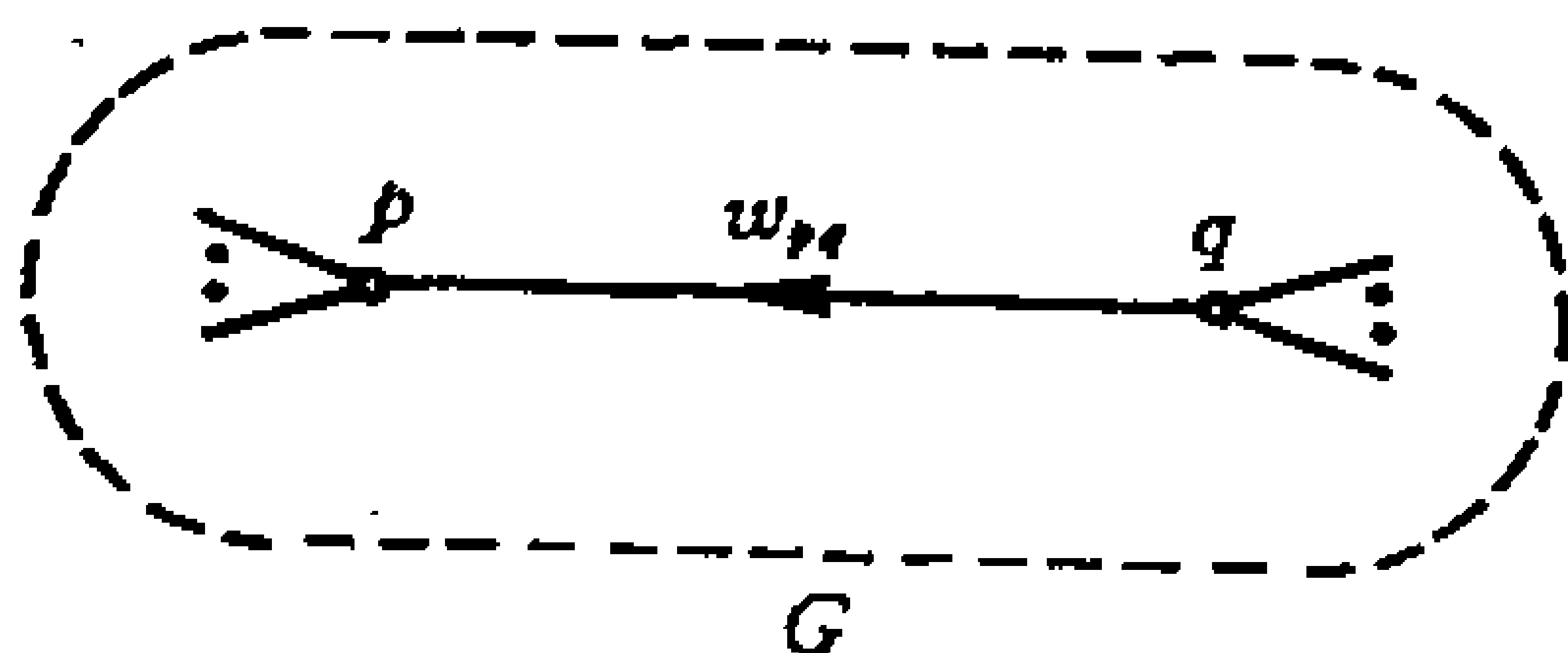


图11-1-3　流图G

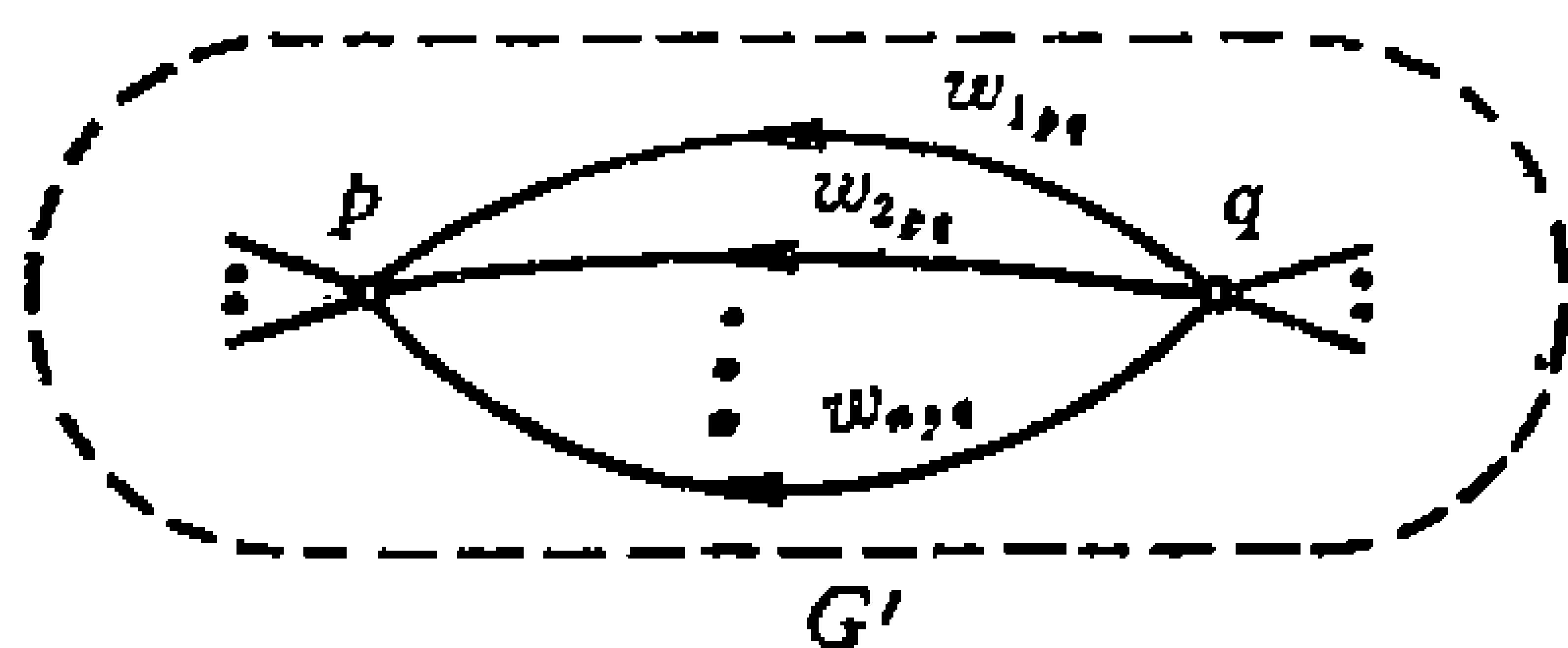


图11-1-4　流图G'

$$|W'| = \sum_{j_p \neq q} \delta_{j_1 j_2 \cdots j_n} w_{1j_1} w_{2j_2} \cdots w_{nj_n} + \sum_{j_p = q} \delta_{j_1 j_2 \cdots q \cdots j_n} w_{1j_1} w_{2j_2} \cdots w_{pq} \cdots w_{nj_n}$$

$$= \sum_{j_p \neq q} \delta_{j_1 j_2 \cdots j_n} w_{1j_1} w_{1j_n} \cdots w_{nj_n}$$

$$+ \sum_{j_p = q} \delta_{j_1 j_2 \cdots q \cdots j_n} w_{1j_1} w_{2j_2} \cdots \left(\sum_{r=1}^{k} w_{rpq} \right) \cdots w_{nj_n} \tag{11-1-2}$$

因为若$\delta_{j_1 j_2 \cdots q \cdots j_n}$非零，则每一个$w_{ij_1} w_{1j_2} w_{rp_1} \cdots w_{nj_n}$就是一个$P$-集圈，所以

$$|W'| = (-1)^n \sum (-1)^{k'j} (G' \text{的} P\text{-集圈} D'_j \text{乘积}) \tag{11-1-3}$$

显然，这个等式在有几条边并联时也成立。这就说明，我们可以改进流图的定义，使得可以有并联边存在。换句话说，我们可以

根据以下定义得到与流图G对应的矩阵W：

w_{ij} = 从顶点 j 连接到顶点 i 的边权的和（当有这样的边存在时），

以及

$w_{ij}=0$（当从 j 连接到 i 的边不存在时）。

另一方面，一个流图G（把流图看成加权有向图）的连接矩阵$C=[c_{ij}]$的元素 c_{ji} 是

c_{ji} = 从顶点 j 连接到顶点 i 的边权的和（当有这样的边存在时）

以及

$c_{ji}=0$，（当从顶点 j 连接到顶点 i 的边不存在时）

因此，我们可以很容易地看出

$$C=W' \tag{11-1-4}$$

换句话说，如果C是有向图G的连接矩阵，那么G可以看作矩阵C' 的流图。因此据式(10-1-9)我们有

$$|C|=(-1)^n\sum(-1)^{k_j}(G\text{的}P\text{-集圈 }D_j\text{ 乘积}) \tag{11-1-5}$$

遗憾的是，许多有向图没有P-集圈。例如，图11-1-1中的有向图就没有P-集圈，于是$|C|=0$，这不是一个令人满意的结果。

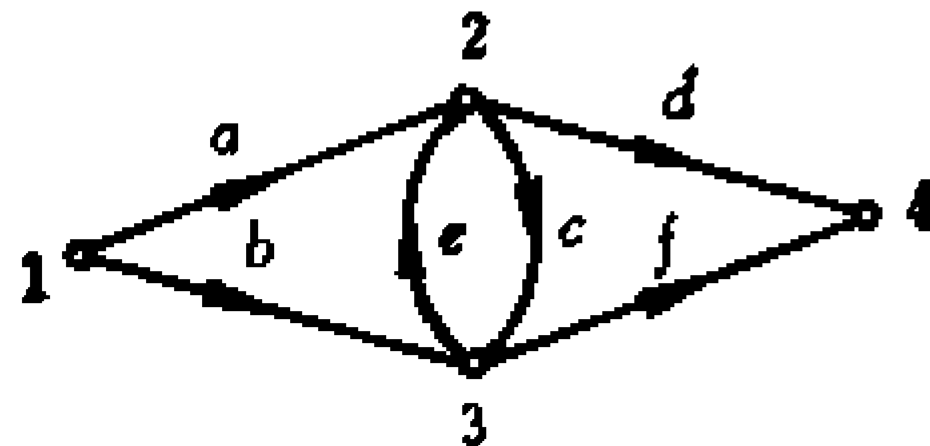


图11-1-5　有向图G

若对连接矩阵作一些限制，则可获得下述重要结果。

定理11-1-1　设一个有向图G中所有边的权是布尔变量，设C是G的连接矩阵，则 Δ_{sr} 是从顶点 r 到顶点 s 的开关函数，其中 Δ_{sr} 是矩阵$[C+U]$在(s,r) 位置上的余子式，所用的运算是布尔和与布尔积。

例11-1-1　考虑图11-1-5中的有向图G。连接矩阵C是

$$C = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & e & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

那么$[C+U]$是

$$[C+U] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & c & d \\ 0 & e & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$[C+U]$的余子式 Δ_{41} 是

$$\Delta_{41} = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 1 & c & d \\ e & 1 & f \end{vmatrix} = acf + ad + bf + bed$$

这就是从顶点 1 到顶点 4 的开关函数。

定理11-1-1的证明 回忆10-1节，我们有

$$|W| = (-1)^n \sum\sum(-1)^{kj}(P\text{-集圈 } D_j \text{ 乘积}) \qquad (11\text{-}1\text{-}6)$$

由行列式的定义

$$|W| = \sum\sum \delta_{j_1 j_2 \cdots j_n} w_{1j_1} w_{2j_2} \cdots w_{nj_n} \qquad (11\text{-}1\text{-}7)$$

这是因为当 $\delta_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 非零时，每一项 $\delta_{j_1 j_2 \cdots j_n} w_{1j_1} w_{2j_2} \cdots w_{nj_n}$ 是一个P-集圈乘积. 由于在式(11-1-6)的一个P-集圈乘积和式(11-1-7)的一个非零项之间存在1∶1对应，因此式(11-1-6) 去掉符号就适用于布尔变量矩阵，即

$$|C'| = \sum(P\text{-集圈 } D_j \text{ 乘积}) \qquad (11\text{-}1\text{-}8)$$

假设把变元Y加到C的(s,r)元上，并设所得的矩阵是$C(Y)$.

由式(11-1-8)，矩阵$[C(Y)+U]$的行列式可写作

$$|C(Y)+U|=\sum(G'_Y\text{的}P\text{-集圈 }D_j\text{乘积}) \qquad (11\text{-}1\text{-}9)$$

其中G'_Y是将给定的图G，嵌入从顶点s到顶点r的边Y，并在G的每个顶点上加入权为1的自环而得到的线图。

存在一个不包含边Y的P-集圈D_j，假定用$D_j(0)$来表示它。又设包含Y的P-集圈表示为$YP_j(0)$，那么式(11-1-9)可表为

$$|C(Y)+U|=G'_Y\text{的}\sum(D_j(0)\text{乘积})+\sum(YP_j(0)\text{乘积})$$

$$(11\text{-}1\text{-}10)$$

显然

$$|C+U|=\sum D_j(0)\text{乘积} \qquad (11\text{-}1\text{-}11)$$

并且

$$\Delta_{sr}=\sum P_j(0)\text{乘积} \qquad (11\text{-}1\text{-}12)$$

因为$YP_j(0)$是G'_Y中的一个P-集圈，所以$P_i(0)$必然包含一条从顶点r到顶点s的有向路径，使得它同边Y一起构成一个有向回路。设这条有向路径是P_i。又设$G'_Y\overline{(\Omega(P_i))}$是从$G'_Y$中删去$P_i$的所有顶点和与这些顶点连接的所有边得到的有向图。那么$G'_Y\overline{(\Omega(P_i))}$中任何一个$P$-集圈（连同有向回路$(Y)\cup P_i$一起）就是$G'_Y$中的一个$P$-集圈。并且，$G'_Y$中（包含有向回路$(Y)\cup P_i$）任何一个$P$-集圈，当我们从中移去$(Y)\cup P_i$时，就变成了$G'_Y\overline{(\Omega(P_i))}$中的$P$-集圈。于是

$$\sum P_j(0)\text{乘积}=\sum_{(i)}P_i\text{乘积}\left[\sum G'_Y\overline{(\Omega(P_i))}\text{的}P\text{-集圈 }D'_j\text{乘积}\right] \qquad (11\text{-}1\text{-}13)$$

其中$\sum_{(i)}$的意思是对 G'_Y 中所有从顶点r到顶点s的有向路径求和。

对于非空的$G'_Y\overline{(\Omega(P_i))}$，存在一类仅由权为1的自环组成的$P$-集圈。因此。

$$G'_Y(\Omega(P_i))\text{的}P\text{-集圈}D'_i\text{乘积}=1+\cdots \quad (11\text{-}1\text{-}14)$$

该式右端的1是由于布尔代数运算的结果。当 $G'_Y\overline{(\Omega(P_i))}$是空集时，$P_i(0)$乘积就是 P_i 乘积，因此，式(11-1-13)就变为

$$\sum(G'_Y\text{的}P_i(0)\text{乘积})=\sum_{(i)}(G'_Y\text{的 }P_i\text{乘积}) \quad (11\text{-}1\text{-}15)$$

因为除了Y本身以外，G'_Y 中从顶点 r 到顶点 s 的有向路径同时也在G中，反之亦然。所以我们有

$$\Delta_{sr}=\sum_{(i)}G\text{ 的 }P_i\text{ 乘积} \quad (11\text{-}1\text{-}16)$$

这就是从顶点 r 到顶点 s 的开关函数。（证毕）

为了分析无向开关网络，首先我们应注意到，在定理11-1-1的有向图中，可以将许多边赋以相同的权。如果我们用两条并联有向边来替换一条无向边，二边的方向相反但赋以与无向边相同的权，如图11-1-6所示。这样就可得到一个与无向图G对应的有向图 G'，它具有以下性质：

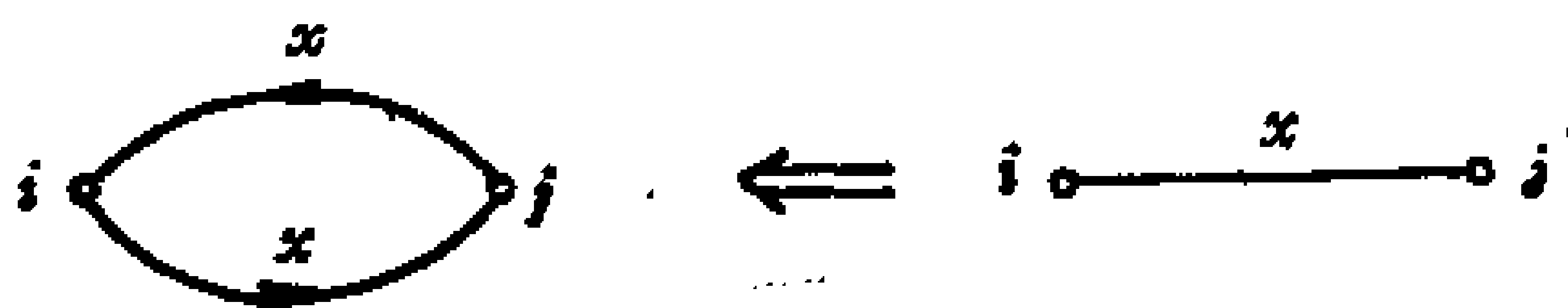


图11-1-6　有向边与无向边之间的对应

1.对于G中两个顶点 r 和 s 之间的任一条路径P，在G' 中就有两条有向路径 P' 和P''，P' 从 r 到 s，P''从 s 到 r，并且

$$P'\text{乘积}=P''\text{乘积}=P\text{乘积}$$

2.对于 G' 中从 r 到 s 的任一条有向路径 P'，存在G中 r 和

s 之间的一条路径 P，使得

$$P' \text{乘积} = P\text{乘积}$$

因此对于开关网络来说，G和 G' 是相同的。于是定理 11-1-1可以改进以适用于无向图。

定理11-1-2 设无向图G中所有边的权是布尔变量。设C是G的连接矩阵。则$[C+U]$的余子式 $\Delta_{rs}(=\Delta_{sr})$是$G$ 中顶点 r 和 s 之间的开关函数。

例11-1-2 图11-1-7中开关网络的连接矩阵C是

$$C=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\ \begin{bmatrix}0&0&a&b\\0&0&c&d\\a&c&0&e\\b&d&e&0\end{bmatrix}\end{array}$$

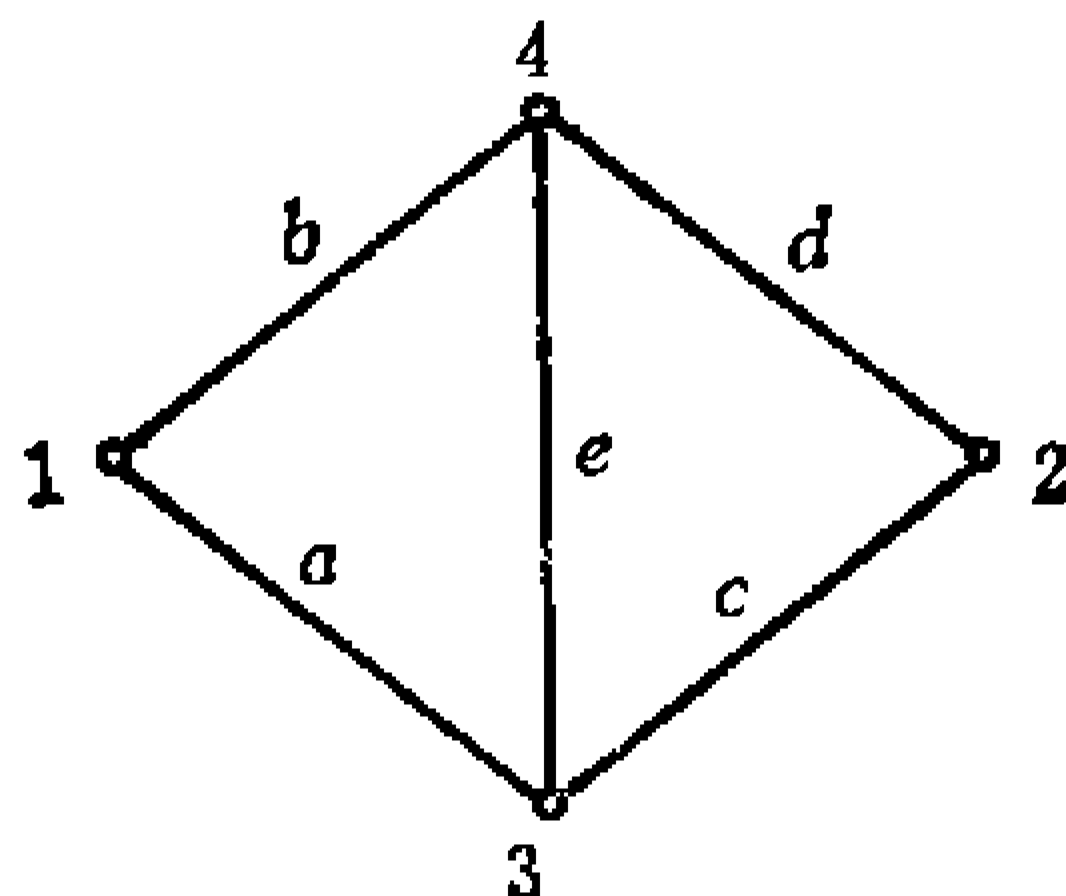


图11-1-7 开关网络G

则$[C+U]$的Δ_{12}是

$$\begin{vmatrix}0&c&d\\a&1&e\\b&e&1\end{vmatrix}=ac+ade+bce+bd$$

这就是顶点 1 和 2 之间的开关函数。

11-2 开关网络的分析

我们已经研究了一种求两顶点间的开关函数的方法，即应用定理11-1-2，这种方法是利用连接矩阵来进行的。这里，我们要考虑分析开关网络的另一种方法，它利用的是1-2节和1-6节中介绍的所有可能路径的集合的性质。

设$\{E\}$是线图G的欧拉图的集合，而$\{P_{ij}\}$是G的顶点 i 和 j 之间所有可能路径的集合。那么，从定理1-6-12我们知道

$$\{P_{ij}\}=\min\{P\oplus E;\ E\in\{E\}\} \tag{11-2-1}$$

其中$P\in\{P_{ij}\}$，也就是说，如果我们知道了两个顶点间的一条路径P，那么这两个顶点之间的所有可能的路径都可以由G的欧拉图和P的环和得到。从定理1-5-3我们还知道，如果线图G是不可分的，那么$\{E\}$可以由$\{C\}$来代替，其中$\{C\}$是G中所有可能的回路的集合。也就是说，对于一个不可分图G

$$\{P_{ij}\}=\min\{P\oplus C;\ C\in\{C\}\} \tag{11-2-2}$$

假定G是如图11-2-1所示的可分图，其中G_1和G_2都是不可分的。那么我们容易看出，$\{P_{ij}\}$可表示为

$$\{P_{ij}\}=\{P_{ik}\}\otimes\{P_{kj}\} \tag{11-2-3}$$

其中$i\in G_1$，$j\in G_2$，而

$$\{P_{ik}\}=\min\{P_1\oplus C_1;C_1\in\{C_1\}\} \tag{11-2-4}$$

$$\{P_{kj}\}=\min\{P_1\oplus C_2;\ C_2\in\{C_2\}\} \tag{11-2-5}$$

$P_1\in\{P_{ik}\}$，$P_2\in\{P_{kj}\}$，$\{C_1\}$是G_1中所有可能回路的集合，$\{C_2\}$是G_2中所有可能回路的集合。

一般地，我们可以叙述为以下定理。

定理11-2-1 假定把一个可分线图G从割点$v_2,v_3,\cdots,v_{k'}$处割开，从而可分成k个不可分子图$G_1,G_2,\cdots,G_k(k'\leqslant k)$，（图11-2-2给出了$k=6$的一例）。

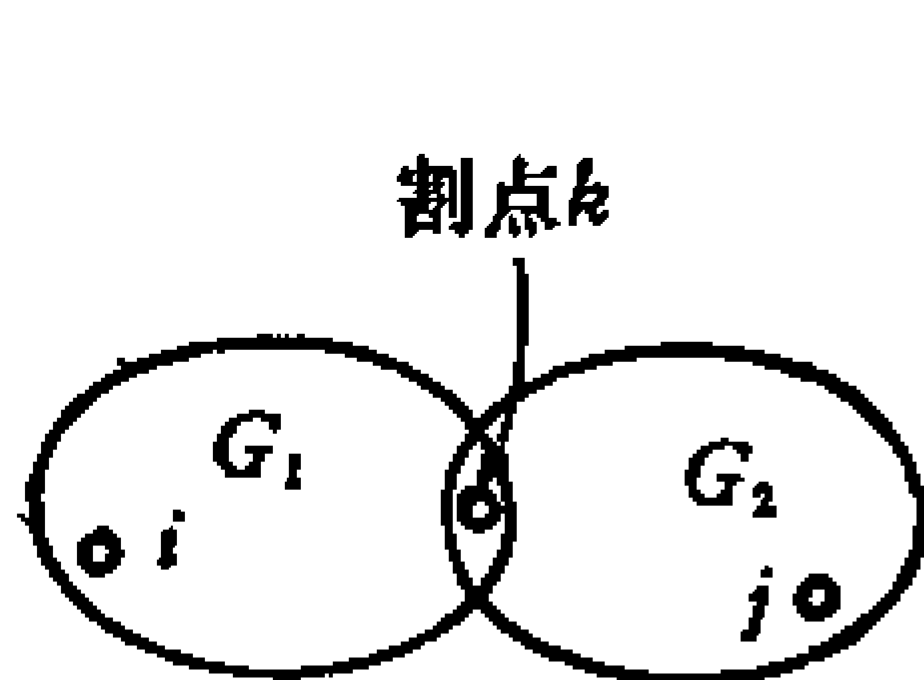


图11-2-1 可分图G

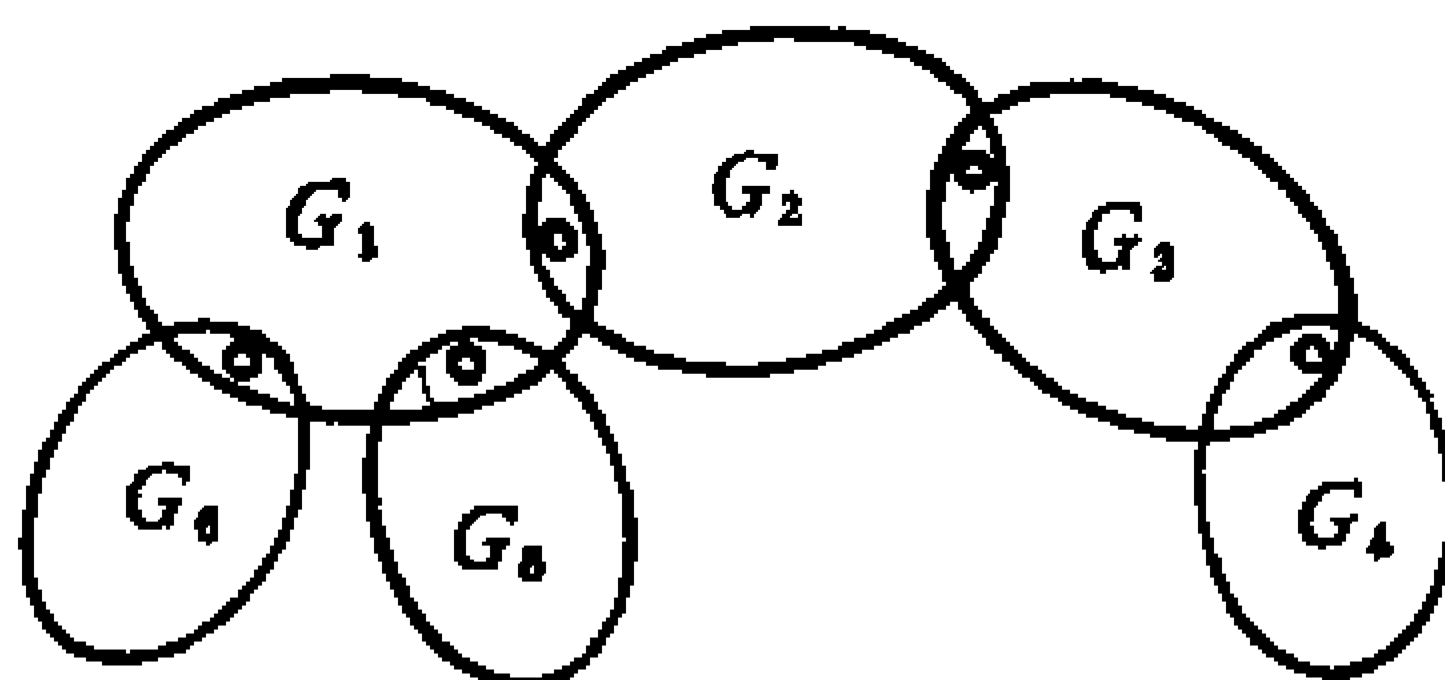


图11-2-2 可分图G

又假定顶点 i 和 j 之间的一条路径 P_{ij} 通过割点 $v_2, v_3, \cdots, v_m (m \leqslant k')$。设 $i \in G_1$，G_1 和 G_2 有公共割点 v_2，G_2 和 G_3 有公共割点 v_3，$\cdots, G_{m-1}$ 和 G_m 有公共割点 v_m，而 $j \in G_m$，那么

$$\{p_{ij}\} = \{p_{iv_2}\} \otimes \{p_{v_2v_3}\} \otimes \cdots \otimes \{p_{v_mj}\} \qquad (11\text{-}2\text{-}6)$$

其中

$$\{P_{iv_2}\} = \min\{P_1 \oplus C_1; \quad C_2 \in \{C_1\}\} \qquad (11\text{-}2\text{-}7)$$

$$\{P_{v_rv_{r+1}}\} = \min\{P_r \oplus C_r; \ C_r \in \{C_r\}\} \qquad (11\text{-}2\text{-}8)$$

$$\{P_{v_mj} = \min\{P_m \oplus C_m; \quad C_m \in \{C_m\}\} \qquad (11\text{-}2\text{-}9)$$

$P_1 \in \{P_{1v_2}\}$，$P_r \in \{P_{v_rv_{r+1}}\}$，$P_m \in \{P_{v_mj}\}$，$r = 2, 3, \cdots, m-1$，而 $\{C_u\}$ 是 G_u 中所有可能回路和空集的集合，$u = 1, 2, \cdots, m$。并且，开关函数 F_{ij} 可以表达为

$$F_{ij} = F_{iv_2} \cdot F_{v_1v_2} \cdot \ldots \cdot F_{v_mj} \qquad (11\text{-}2\text{-}10)$$

其中

$$F_{1v_1} = \sum_{p_1 \in \{p_{iv_1}\}} \text{（路径 } P_1 \text{ 乘积）} \qquad (11\text{-}2\text{-}11)$$

$$F_{v_rv_{r+1}} = \sum_{p_r \in \{p_{v_rv_{r+1}}\}} \text{（路径 } P_r \text{ 乘积）} \qquad (11\text{-}2\text{-}12)$$

$$F_{v_mj} = \sum_{p_m \in \{p_{v_mj}\}} \text{（路径 } P_m \text{ 乘积）} \qquad (11\text{-}2\text{-}13)$$

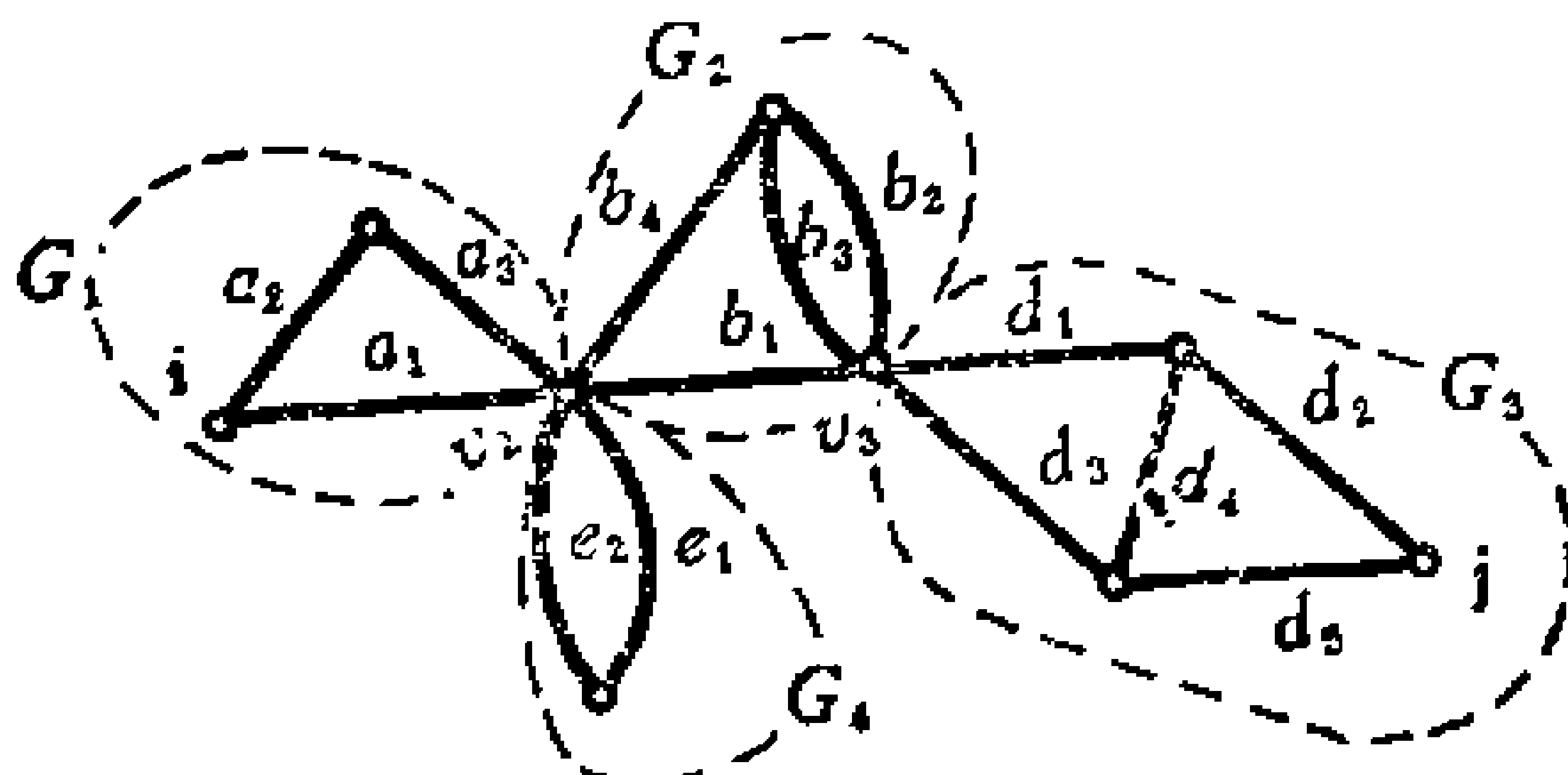


图11-2-3 开关网络

例11-2-1 考虑图11-2-3中的开关网络。假定我们选取 i 和 j 之间的一条路径 P_{ij} 为 $P_{ij}=(a_1,b_1,d_1,d_2)$。

这条路径通过割点 V_2 和 V_3。显然我们需要考虑的全部子图乃是 G_1,G_2，和 G_3。利用 G_1，G_2 和 G_3 的所有可能回路和空集的集合 $\{C_1\}$，$\{C_2\}$ 和 $\{C_3\}$，即

$$\{C_1\}=\{\phi,(a_1,a_2,a_3)\}$$

$$\{C_2\}=\{\phi\,(b,b_2,b_4),(b_1,b_3,b_4),(b_2,b_3)\}$$

$$\{C_3\}=\{\phi,(d_1,d_3,d_4),(d_2,d_4,d_6),(d_1,d_2,d_3,d_6)\}$$

我们可以得到

$$\{P_{iv_2}\}=\min\{(a_1)\oplus C_1;\quad C_1\in\{C_1\}\}=\{(a_1),(a_2,a_6)\}$$

$$\{P_{v_2v_3}\}=\min\{(b_1\oplus C_2;\quad C_2\in\{C_2\}\}=\{(b_1),(b_2,b_4),(b_3,b_4)\}$$

$$\{P_{v_3j}\}=\min\{(d_1,d_2)\oplus C_3;\ C_3\in\{C_3\}\}$$

$$=\{(d_1,d_2,),(d_2,d_3,d_4),(d_1,d_4,d_5),(d_3,d_6)\}$$

因此开关函数 F_{ij} 是

$$F_{ij}=F_{iv_2}\cdot F_{v_2v_3}\cdot F_{v_3j}$$

$$=(a_1+a_2a_3)(b_1+b_2b_4+b_3b_4)(d_1d_2+d_2d_3d_4$$

$$+d_1d_4d_5+d_3d_6)$$

这里讨论的方法适用于计算机分析开关网络。另外，如果有必要计算一个以上的开关函数，我们就可以利用路径集之间的关系来简化计算式，如利用定理1-6-7所给出的三角关系。

11-3 完全确定开关函数的综合

现在我们要来考虑一种特殊的网络，通称单触点网络（sin gle contact简称SC网络）。

定义11-3-1 SC 网络是一种无向图，其中每一条边的权为不同的布尔变量。

这里，我们只考虑这样一种开关（布尔）函数，它们是完全

确定了的（即对应的真值表为 1 或 0）。我们要解决的问题是：是否存在一个SC网络，满足所给定的完全确定开关函数。例如，函数

$$F = ab + acd + de$$

不是一个 SC 网络的开关函数。另一方面，函数

$$F = ab + acd$$

显然是一个 SC 网络的开关函数。

为了简便，我们采用以下定义。

定义11-3-2 我们说 $\{P_{rs}\}$ 是一个与完全确定开关函数 F_{rs} 对应的集合，如果

$$F_{rs} = \sum_{P_{rs} \in \{P_{rs}\}} P_{rs}\text{乘积} \qquad (11\text{-}3\text{-}1)$$

其中 P_{rs} 乘积是 $\{P_{rs}\}$ 中所有元素的乘积。

例如，如果 $F_{rs} = a(b + ce) + d(e + bc)$，则与 F_{rs} 对应的集合 $\{P_{rs}\}$ 是

$$\{P_{rs}\} = \{(a,b),(a,c,e),(d,e),(b,c,d)\}$$

因为在一个 SC 网络中每条边的权不同，为了简便，我们以一条边的权作为这条边的名称。若把一个完全确定开关函数 F_{ij} 表示为

$$F_{ij} = \sum_{P_{ij} \in \{P_{ij}\}} P_{ij}\text{乘积} \qquad (11\text{-}3\text{-}2)$$

我们就可以看出，如果一个与 F_{ij} 对应的开关网络是 SC 网络，那么集合 $\{P_{ij}\}$ 必定是顶点 i 和 j 之间的所有可能路径的集合。由于这个原因，我们有以下 SC 网络开关函数的必要条件。

定理11-3-1 设集合 $\{P_{ij}\}$ 是与一个 SC 网络的完全确定开关函数 F_{ij} 相对应的，对于 $\{P_{ij}\}$ 中任意奇数个 P_r，比如 $P_1, P_2, \cdots, P_{2k+1}$，必存在 $\{P_{ij}\}$ 中的 P'，满足：

$$P' \subset P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_{2k+1} \tag{11-3-3}$$

例如，如果 $F_{ij}=a(b+ce)+bcd$，那么 $\{P_{ij}\}=\{(a,b)\ (a,c,e)(b,c,d)\}$。因为 $(a,b)\oplus(a,c,e)\oplus(b,c,d)=(d,e)$，并且没有满足式(11-3-3)的 $P'\in\{P_{ij}\}$，所以 F_{ij} 不是一个 SC 网络的完全确定开关函数。

定理11-3-1的证明 如果 $\{P_{ij}\}$ 是顶点 i 和 j 之间所有可能路径的集合，那么奇数个 $P_r\in\{P_{ij}\}$ 的环和是一个 M 图 M_{ij} 见1-4节），它或者是一条路径 P，或者是一条路径和若干回路的无重边并，其中 $P\in\{P_{ij}\}$。 （证毕）

复习一下子图集合的某些性质是有帮助的，在 SC 网络的综合中也需要它们。在3-5节中，我们曾经学过从一个基本割集矩阵 Q_f 综合一个线图的方法，从式(3-4-24)，我们得到基本割集矩阵 Q_f 和基本回路矩阵 $B_f=[U\ B_{f_{12}}]$ 之间的关系为

$$Q_f=[B_{f_{12}}^t U] \tag{11-3-4}$$

我们知道，一个基本回路矩阵可以很容易地从所有可能回路的集合 $\{C\}$ 得到。在1-6节中，我们曾看到

$$\{C\}=\min\{E\} \tag{11-3-5}$$

其中 $\{E\}$ 是线图 G 中所有可能欧拉图的集合。因此，如果给定一个集合 $\{E\}$，我们就可以得到一个线图 G，它以 $\{E\}$ 作为所有可能欧拉图的集合。

一个 SC 网络的开关函数 F_{ij} 将给出 $\{P_{ij}\}$（i 与 j 之间所有可能路径的集合）而不是 $\{E\}$。但是，从1-4节和5-3节我们知道，集合 $\{E,M_{ij}\}$ 具有 n_e-n_v+2 个生成元，其中 n_e 或 n_v 分别为连通线图 G 中边数和顶点数。因为我们将试图从一个完全确定开关函数 F_{ij} 来综合一个 SC 网络 G，所以可以假设 G 是连通的。从 F_{ij} 综合得的 SC 网络 G 可以具有这样的性质：每一条边至少位于从 i 到 j 的一条路径中。因此我们容易看出 G 或为不可分图，或者由 k 个不可分子图 $G_1,G_2,\cdots G_k$ 组成，都有：（1）这些

子图的任意两个都没有公共边；（2）这些子图中任两个至多有一个公共点；（3）有$k-1$个割点；（4）$i\in G_1, j\in G_k$，（5）从 i 到 j 的每一条路径全都通过这 $k-1$个割点，如图 11-3-1 所示。可以看出

$$\{P_{ij}\}\otimes\{P_{ij}\}=\{C\} \tag{11-3-6}$$

其中$\{C\}$是G中所有回路的集合。

图11-3-1　SC网络G

从集合$\{C\}$，我们可以得到基本回路矩阵 B_f，因此，基本割集矩阵可由式(11-3-4)得到。现在我们可以找到一个线图G，它以$\{C\}$作为所有可能回路的集合。可是，G不一定以 $\{P_{ij}\}$ 作为从 i 到 j 的所有可能路径的集合。例如，假定$\{P_{ij}\}=\{(a,b),(c,d)\}$，那么

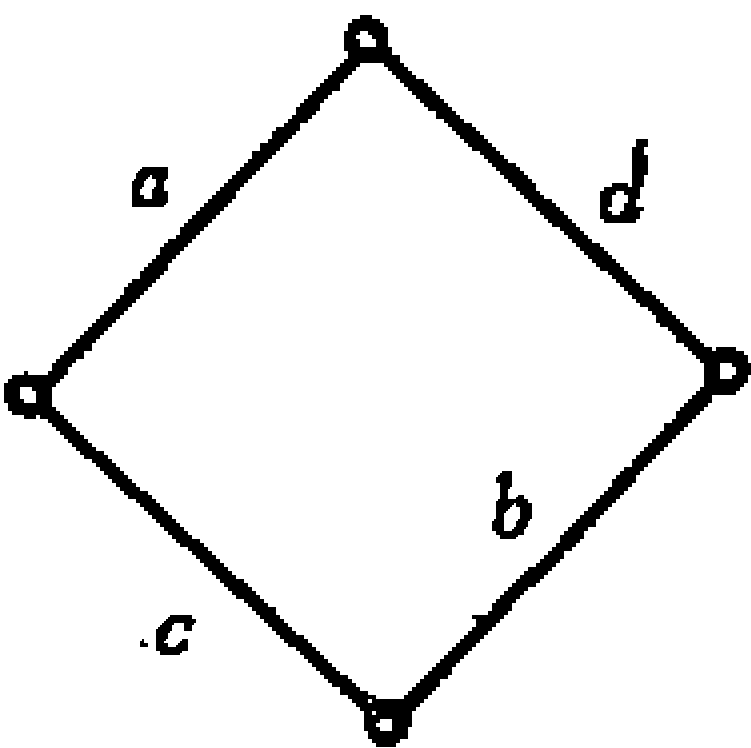


图11-3-2　线图G

$$\{P_{ij}\}\otimes\{P_{ij}\}=\{\phi,(a,b,c,d)\}$$

图11-3-2中的线图G以(a,b,c,d)为一个回路。因此G以$\{C\}$为所有可能回路的集合。可是，G并不以$\{(a,b),(c,d)\}$作为两个顶点间所有可能路径的集合。

为了得到以$\{P_{ij}\}$作为 i 和 j 之间所有可能的路径集合的线图，我们加上一条以 i 和 j 为端点的边 y。换句话说，如果有一个 SC 网络G以$\{P_{ij}\}$作为 i 和 j 之间所有可能路径的集合，那么，插入边 y 所得的新线图$G\cup(y)$将具有这样的性质：对于每一个 $P\in\{P_{ij}\}$，$(y)\cup P$ 是一个回路。因此

$$\{(y)\cup P_{ij}\}=\{(y)\cup P;\ P\in\{P_{ij}\}\} \qquad (11\text{-}3\text{-}7)$$

是$G\cup(y)$中所有可能的回路集合$\{C_y\}$的一个子集。

因为 SC 网络具有这样的性质，即

$$\{P_{ij}\}\otimes\{P_{ij}\}=\{C\} \qquad (11\text{-}3\text{-}8)$$

所以$\{y\}\cup P_{ij}\}$将包含线性无关的全部回路，它们能生成$G\cup(y)$的所有回路。这样，利用$\{(y)\cup P_{ij}\}$中的回路，我们可以得到$G\cup(y)$的回路矩阵B_y.而利用这个回路矩阵B_y，就可以得到基本回路矩阵B_f和基本割集矩阵Q_f。我们再根据这个矩阵Q_f，就可以构造一个线图G'。

现在，一个重要的问题是从G'中删去边y后，是否得到一个以给定集合$\{P_{ij}\}$为两顶点间所有可能路径集合的 SC 网络。下面的定理就回答了这个问题。

定理11-3-2 设$\{P_{ij}\}$是一个与满足定理11-3-1的完全确定开关函数F_{ij}对应的集合。又设$P_1,P_2\cdots,P_m$是$\{P_{ij}\}$中线性无关的路径，以致$\{P_{ij}\}$中其它任一路径P'不可能与这些路径线性无关。当且仅当存在一个零度为m的无向线图G，其线性无关回路为$(y)\cup P_1,(y)\cup P_2,\cdots,(y)\cup P_m$，其中$y$不在$\{P_{ij}\}$的任一路径中，则$G$去掉边$y$是一个满足$F_{ij}$的 SC 网络。

注意，一个 SC 网络满足F_{ij}的意思是：在 SC 网络中存在两个顶点，这两个顶点间的开关函数是F_{ij}。路径这个名称是用来给$\{P_{ij}\}$中的元素命名的。不过，如果不存在满足F_{ij}的 SC 网络，那么这种用法也许并不确切。

定理11-3-2的证明：假定有一个零度为m的无向线图G，$(y)\cup P_1,(y)\cup P_2,\cdots,(y)\cup P_m$是图$G$的线性无关回路。假定在$G$的顶点$i$和$j$之间有一条路径$P'$，它不在$\{P_{ij}\}$中。因为$(y)\cup P'$是$G$的一个回路，所以$(y)\cup P'$可以由$(y)\cup P_1,(y)\cup P_2,\cdots,(y)\cup P_m$中一部分的环和得到。不失一般性，设

$$(y)\cup P'=[(y)\cup P_1]\oplus[(y)\cup P_2]\oplus\cdots\oplus[(y)\cup P_{2k+1}]$$
(11-3-9)

其中 $2k+1\leqslant m$，那么

$$P'=P_1\oplus P_2\oplus\cdots\oplus P_{2k+1} \qquad (11\text{-}3\text{-}10)$$

P' 必在$\{P_{ij}\}$中，这是因为 F_{ij} 满足定理11-3-1，而这与 P' 不在$\{P_{ij}\}$中的假设矛盾。

假定G去掉边y后是一个满足 F_{ij} 的SC网络，那么很明显，G的零度为m，且$(y)\cup P_1,(y)\cup P_2,\cdots,(y)\cup P_m$是线性无关回路。（证毕）

运用这个定理，就可以从一个完全确定的开关函数 F_{ij} 按以下步骤综合出一个SC网络。

步骤1　检验所给的函数 F_{ij} 是否满足定理11-3-1。如果不满足，F_{ij} 就不是SC网络的开关函数。

步骤2　从对应于 F_{ij} 的集合$\{P_{ij}\}$中，选取线性无关路径$P_1,P_2,\cdots,P_m$。用回路$(y)\cup P_1,(y)\cup P_2,\cdots,(y)\cup P_m$构造回路矩阵$B$。

步骤3　用初等行运算和列运算把B变成基本回路矩阵 $[U\ B_{f_{12}}]$。

步骤4　构造基本割集矩阵Q_f：

$$Q_f=[B^t_{f_{12}}\ U] \qquad (11\text{-}3\text{-}11)$$

步骤5　用3-5节的方法求出线图G，它的基本割集矩阵是按步骤4得到的。

步骤6　删去边y，所得的图即为满足 F_{ij} 的SC网络，其中顶点i和j是边y的端点。

下面的例子说明了应用上述步骤的过程。

例11-3-1　由下可以看出，完全确定开关函数

$$F_{ij}=ab+acd+bce+de$$

满足了定理11-3-1。因此我们转到步骤2。

步骤 2　从

$$\{P_{ij}\} = \{(a,b),(a,c,d),(b,c,e),(d,e)\}$$

中，假定我们取 $P_1=(a,b)$，$P_2=(a,c,d)$和 $P_3=(b,c,e)$ 作为线性无关路径，注意$(d,e)=P_1 \oplus P_2 \oplus P_3$。回路矩阵$B$是

$$B = \begin{matrix} (y)\cup P_1 \\ (y)\cup P_2 \\ (y)\cup P_3 \end{matrix} \overset{\begin{matrix} a & b & c & d & e & y \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

步骤 3　调整B的列：

$$B \approx \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \overset{\begin{matrix} b & d & e & a & c & y \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

然后把行 1 加到行 3 上，得到

$$B_f = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \overset{\begin{matrix} b & d & e & a & c & y \end{matrix}}{\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]} = [U \quad B_{f_{12}}]$$

步骤 4 得到 Q_f：

$$Q_f = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \overset{\begin{matrix} b & d & e & a & c & y \end{matrix}}{\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}$$

步骤 5　首先求出关于行 1 的H子阵：

$$H_{(1)} = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \overset{\begin{matrix} c & y \end{matrix}}{\left[\begin{array}{c:c} 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 \end{array}\right]}$$

用这个H子阵就可以得到M子阵对：$M_1(1)$和$M_2(1)$

$$M_1(1) = \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\begin{bmatrix} b & d & e & a & c \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_3(1) = \begin{matrix} \\ 1 \\ 3 \end{matrix}\begin{bmatrix} b & d & e & a & y \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

与$M_1(1)$和$M_2(1)$对应的两个线图G_1和G_2如图11-3-3所示。将G_1和G_2结合在一起，移去顶点1，就得到图11-3-4(a)所示的线图G。

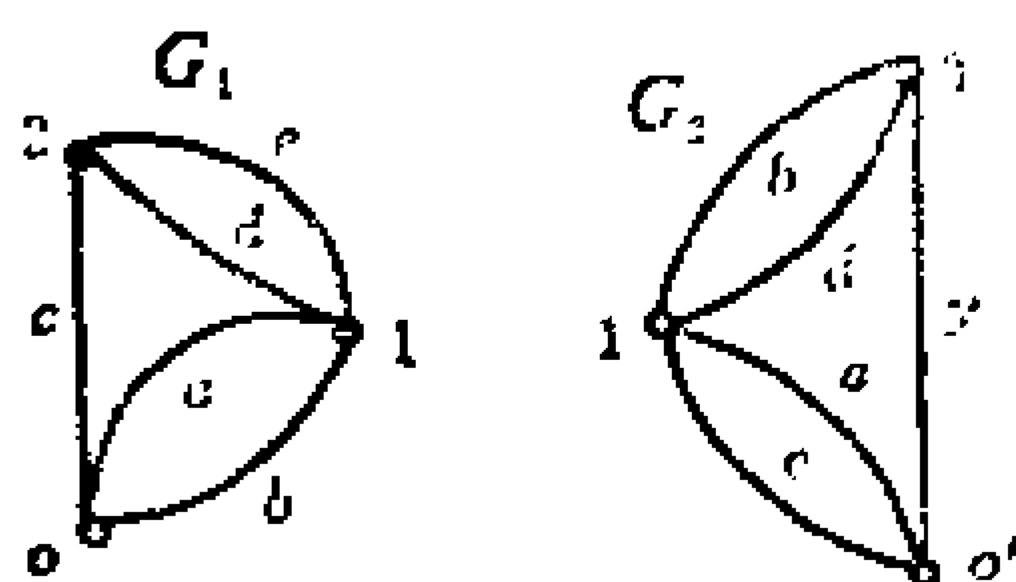


图11-3-3　对于$M_1(1)$和$M_2(1)$的线图

步骤6　从G_y中删去边y，得到线图G[图11-3-4(b)]它是在顶点3和O'（其间连着边y）之间满足已知F_{ij}的SC网络。

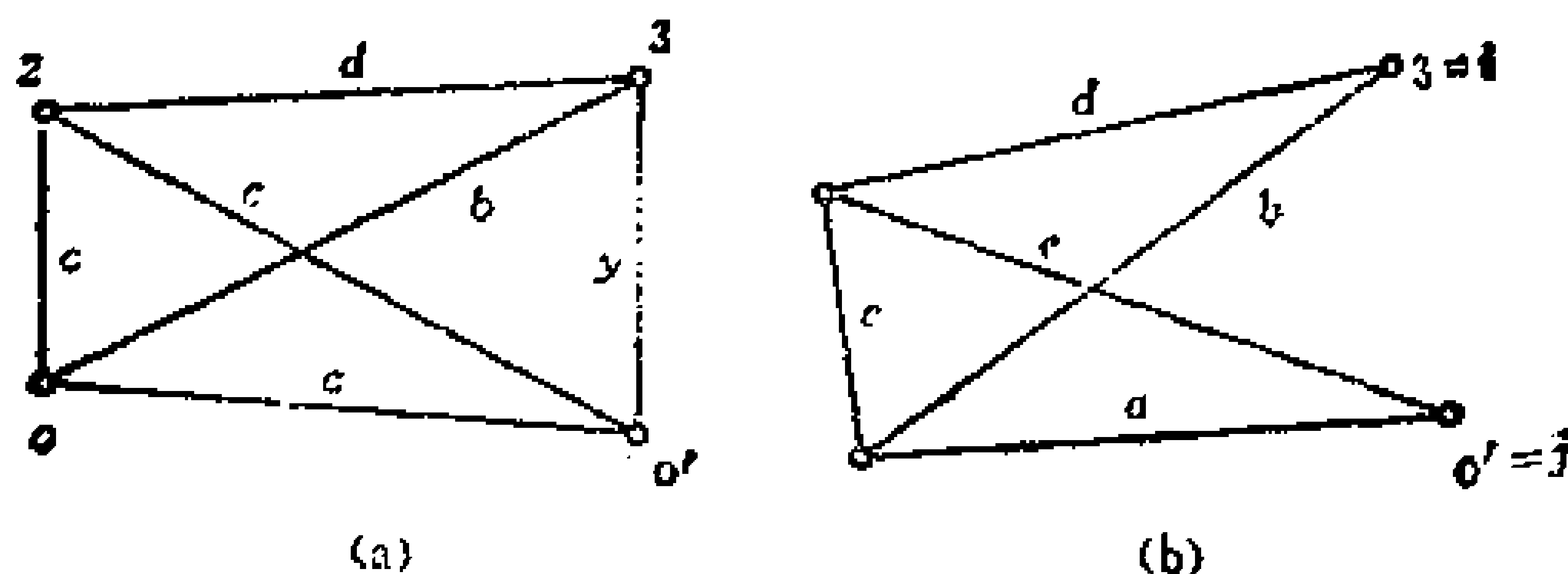


图11-3-4

(a)线图G'；(b)SC网络

11-4　以 SC 网络综合不全定开关函数

考虑下面的真值表：

x_2	x_1	F
0	0	0
0	1	I
1	0	1
1	1	1

其中符号 I 表示 F 是不确定的（不必考虑），如象此真值表所给出的，具有不完全确定情况的开关函数称为不全定开关函数。

定义11-4-1　对于一个不全定开关函数 F_{ij} 来说，符号 $\{R_{ij}\}$ 和 $\{I_{ij}\}$ 代表与 F_{ij} 对应的两个集合，它们满足：

1.　$$F_{ij}(1)=\sum_{R_I\in\{R_{ij}\}} R_I \text{乘积} \qquad (11\text{-}4\text{-}1)$$

2.　$$F_{ij}(I)=\sum_{I_I\in\{I_{ij}\}} I_I \text{乘积} \qquad (11\text{-}4\text{-}2)$$

其中 $F_{ij}(1)$ 是从 F_{ij} 把对应真值表内所有的 I 置 0 得到的，$F_{ij}(I)$ 是从 F_{ij} 把对应真值表内所有的 1 置 0，所有的 I 置 1 得到的。

注意，将对应真值表中所有的 I 置 1 时：

$$F_{ij}=F_{ij}(1)+F_{ij}(I) \qquad (11\text{-}4\text{-}3)$$

还可以看出

$$\{R_{ij}\}\cap\{I_{ij}\}=\phi \qquad (11\text{-}4\text{-}4)$$

我们也可以不用真值表而用 $F_{ij}(1)$ 和 $F_{ij}(I)$ 来确定一个不全定开关函数。例如，

$$F_{ij}(1) = x_2$$
$$F_{ij}(I) = x_1\bar{x}_2$$
给出一个不全定开关函数，其真值表就是上面所给出的。这组方程的集合$\{R_{ij}\}$和$\{I_{ij}\}$是

$$\{R_{ij}\} = (x_2)$$
$$\{I_{ij}\} = (x_1, \bar{x}_2)$$

若一个不全定开关函数给定，则我们可以选取$\{P_{ij}\}$使

$$\{R_{ij}\} \subset \{P_{ij}\}$$

并且任何一个$I \in \{I_{ij}\}$可以在$\{P_{ij}\}$中。但是，$\{P_{ij}\}$的选择一定要使得按照上节所提供的步骤就能够综合出一个SC网络。下面的例子说明选择集合$\{P_{ij}\}$的过程。

例11-4-1 设有一个不全定开关函数，其对应集合给定为

$$\{R_{ij}\} = \{(a,e,f),(b,d,f),(c,d,e),(a,b,c)\}$$

和

$$\{I_{ij}\} = \{(d,e,f),(a,b,f),(a,c,e),(b,c,d),(a,b,e)\}$$

假定我们选取$\{P_{ij}\} = \{R_{ij}\}$，这种选择需满足定理11-3-1。选择$P_1 = (a,e,f), P_2 = (b,d,f), P_3 = (c,d,e)$，我们有

$$B = \begin{matrix} (y)\cup P_1 \\ (y)\cup P_2 \\ (y)\cup P_3 \end{matrix} \overset{\begin{matrix} a & b & c & d & e & f & y \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

因为这是一个基本回路矩阵，所以，我们可以得到基本割集矩阵为

$$Q_f = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \overset{\begin{matrix} a & b & c & d & e & f & y \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

这个矩阵不可实现为基本割集矩阵，因此$F_{ij}(1)$不是SC网络的开关函数。

假定我们把(d,e,f)加到$\{P_{ij}\}$中去，那么

$$(d,e,f)\oplus P_1\oplus P_2=(a,b,f)\in\{I_{ij}\}$$

由定理11-3-1，(a,b,f)必在$\{P_{ij}\}$中。同样

$$(d,e,f)\oplus P_1\oplus P_3=(a,c,e)\in\{I_{ij}\}$$

表明所选的(a,c,e)必在$\{P_{ij}\}$中。最后

$$(d,e,f)\oplus P_2\oplus P_3=(b,c,d)\in\{I_{ij}\}$$

说明(b,c,d)必在$\{P_{ij}\}$中。因而，我们有

$$\{P_{ij}\}=\{R_{ij}\}\cup\{(d,e,f),(a,b,f),(a,c,e),(b,c,d)\}$$

显然，这个集合满足定理11-3-1。选$P_4=(d,e,f)$为线性无关路径组中的一个元素，我们有

$$B=\begin{array}{c} \\ (y)\cup P_1 \\ (y)\cup P_2 \\ (y)\cup P_3 \\ (y)\cup P_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

把第4行加到第2行和第3行，得

$$B_f=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc:ccc} a & b & c & d & e & f & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

由此我们得到基本割集矩阵Q_f为

$$Q_f=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc:ccc} a & b & c & d & e & f & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

把第 3 行加到第 2 行，得

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（列依次为 a b c d e f y）

这个矩阵的每一列最多有两个非零项。因此我们可以得到图 11-4-1 所示的线图G。去掉边 y，就得到了满足 F_{ij} 的一个 SC 网络。

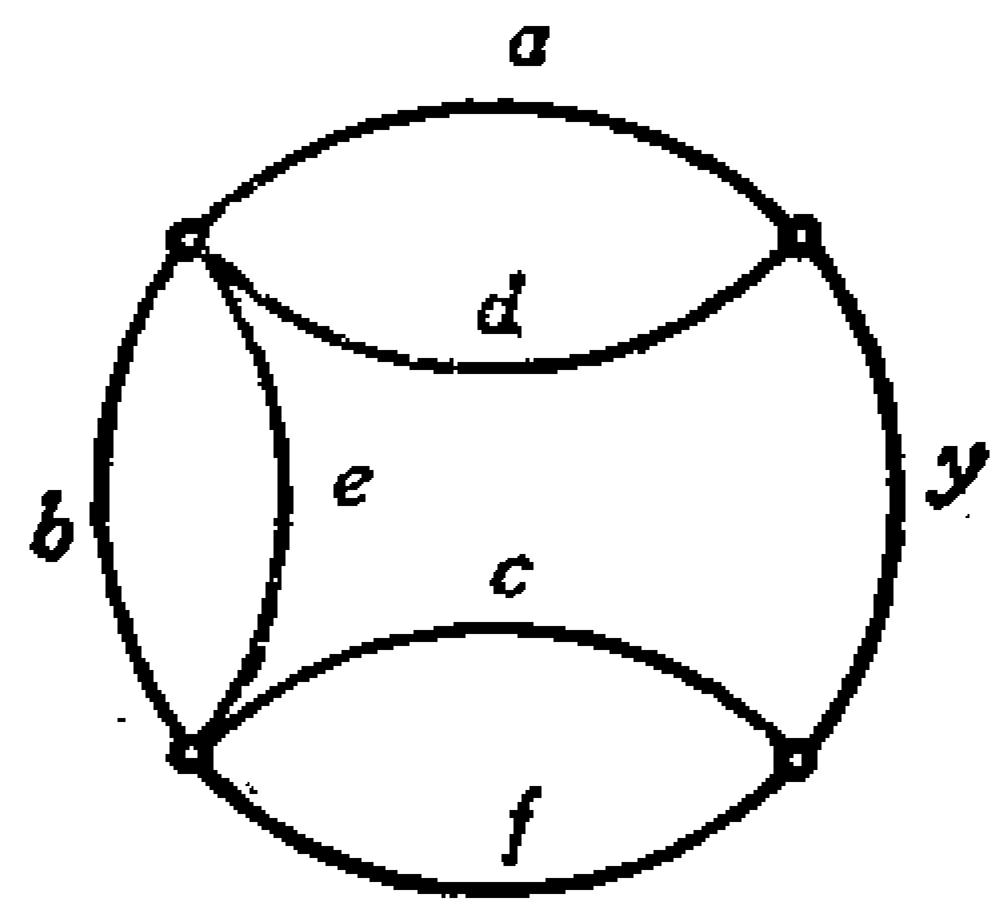


图11-4-1 线图G

假定我们不选 (d,e,f)，而是选择(a,b,e)作为$\{P_{ij}\}$ 的一个元素，也就是

$$\{P_{ij}\}\supset\{R_{ij}\}\cup(a,b,e)$$

那么

$$(a,b,e)\oplus P_1\oplus P_2=(d)\notin\{I_{ij}\}$$

从而，在$\{P_{ij}\}$中再多加入$\{I_{ij}\}$的任何其他元素是不可能满足定理11-3-1的. 因此上述$\{P_{ij}\}$的选择是给出待求SC网络的唯一选择。

这里一定要注意，只要在$\{P_{ij}\}$中出现的不同的布尔变量个数不变，对$\{P_{ij}\}$的各种选择就不改变所得的 SC 网络的边的数目。换句话说，所得的 SC网络的边的数目是由$\{P_{ij}\}$中不同的布尔变量的个数决定的。

11-5 多触点开关网络

在 SC 网络中，每一边的权必须是不同的布尔变量. 在 SP 网络中，一个开关网络的两条边所带的权可以是同一个布尔变量。然而，如果两条边的布尔变量 x 是相同的，那么一条边必为 x，而另一条边必为 $\bar{x}$ (x 的补) 。

定义11-5-1 SP 网络是一个无向线图，它满足：(1)每条边的权是布尔变量；(2)对于每个布尔变量 x，至多有一条边的权为 x，并且至多另有一条边的权为 $\bar{x}$。

考虑 SP 网络 G 的完全确定开关函数 F_{ij}，把它表示为

$$F_{ij}=\sum_{P_r\in\{P_{ij}\}} P_r \text{ 乘积} \qquad (11\text{-}5\text{-}1)$$

集合 $\{P_{ij}\}$ 不一定是 G 中 i 和 j 之间所有可能路径的集合。这是因为图中可能会有这样一条路径，它包含两条权为互补的边，如 x 和 $\bar{x}$，由于 $x\bar{x}=0$，在 F_{ij} 中它们就不会与非零项对应，例如，图11-5-1中 SP 网络的 F_{ij} 是

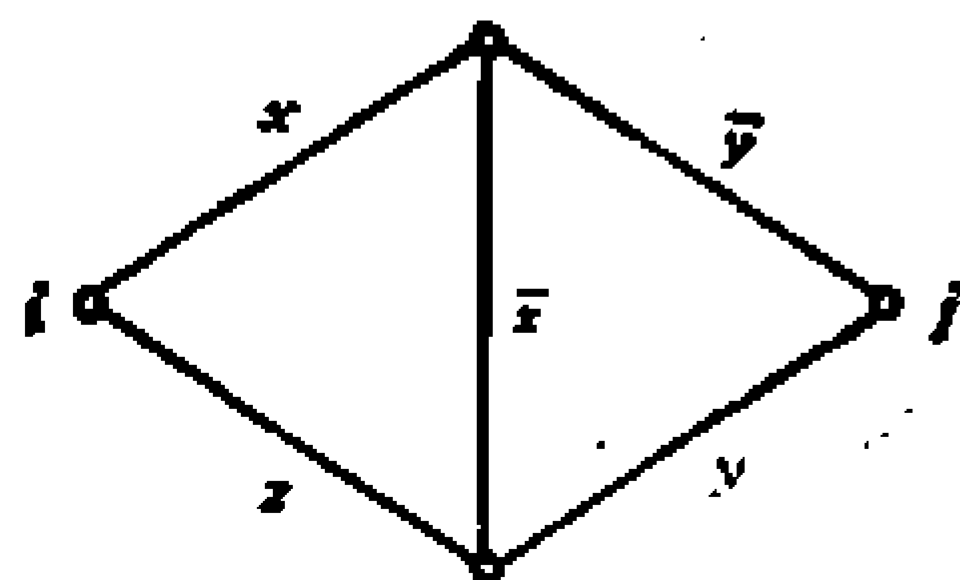


图11-5-1 SP网络

$$F_{ij}=x\bar{y}+yz+\bar{x}\bar{y}z$$

对应 F_{ij} 的集合 $\{P_{ij}\}$ 是

$$\{P_{ij}\}=\{(x,\bar{y}),(y,z),(\bar{x},\bar{y},z)\}$$

显然它不是该 SP 网络中 i 和 j 之间所有可能路径的集合。

定义11-5-2 当一条路径包含一个布尔变量及其补时，就称这条路径为 0 路径。

现在很清楚，与一个 SP 网络对应的完全确定开关函数 F_{ij} 的 $\{P_{ij}\}$ 一般不满足定理11-3-1。因此我们必须将 0 路径（它是 i 和 j 之间的路径）加进 $\{P_{ij}\}$ 中，才能使所得的集合 $\{P'_{ij}\}$ 按照11-3节中的步骤给出 SP 网络。下面的例子对此作了说明。

例11-5-1 假定一个完全确定开关函数 F_{ij} 是

$$F_{ij}=ace+c\bar{d}\bar{e}+\bar{a}bce+bd\bar{e}+\bar{a}b\bar{c}\bar{d}e$$

那么与 F_{ij} 对应的集合 $\{P_{ij}\}$ 是

$$\{P_{ij}\}=\{(a,c,e),(a,c,\bar{d},\bar{e}),(\bar{a},b,c,e),(b,d,\bar{e}),$$
$$(\bar{a},b,\bar{c},\bar{d},e)\}$$

它不满足定理11-3-1．这是因为

$$(a,c,e)\oplus(a,c,\bar{d},\bar{e})\oplus(b,d,\bar{e})=(b,d,\bar{d},e)\notin\{P_{ij}\}$$

$$(a,c,e)\oplus(\bar{a},b,c,e)\oplus(b,d,\bar{e})=(a,\bar{a},d,\bar{e})\notin\{P_{ij}\}$$

以及

$$(a,c,\bar{d},\bar{e})\oplus(\bar{a},b,c,e)\oplus(b,d,\bar{e})=(a,\bar{a},d,\bar{d},e)\notin\{P_{ij}\}$$

但是，它们都是0路径．因此我们可以把它们加入$\{P_{ij}\}$中而不改变F_{ij}.所得的集合$\{P'_{ij}\}$为

$$\{P'_{ij}\}=\{(a,c,e),(a,c,\bar{d},\bar{e}),(\bar{a},b,c,e),(b,d,\bar{e}),$$
$$(\bar{a},b,\bar{c},\bar{d},e),(b,d,\bar{d},e),(a,\bar{a},d,\bar{e}),(a,\bar{a},d,\bar{d},e)\}$$

设$P_1=(a,c,e)$，$P_2=(a,c,\bar{d},\bar{e})$，$P_3=(\bar{a},b,c,e)$，$P_4=(b,d,\bar{e})$是所选的线性无关路径，则我们可以得到一个回路矩阵$B$：

$$B=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc} a & \bar{d} & \bar{a} & d & b & c & e & \bar{e} & y\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right]\end{array}$$

把第一行加到第二行，得

$$B_f=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc:ccccc} a & \bar{d} & \bar{a} & d & b & c & e & \bar{e} & y\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc:ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right]\end{array}$$

因此基本割集矩阵Q_f是

$$Q_f=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc:ccccc} a & \bar{d} & \bar{a} & d & b & c & e & \bar{e} & y\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc:ccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\end{array}$$

如果我们把第 1 行加到第 5 行，把第 2 行加到第 3 行，就得到一个关联矩阵

$$
\begin{array}{c}
\quad\;\; \begin{array}{ccccccccc} a & \bar{d} & \bar{a} & d & b & c & e & \bar{e} & y \end{array} \\
A=\left[\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

以它为关联矩阵的线图 G 如图11-5-2所示。去掉边 y，得到的线图即为满足所给函数 F_{ij} 的 SP网络。

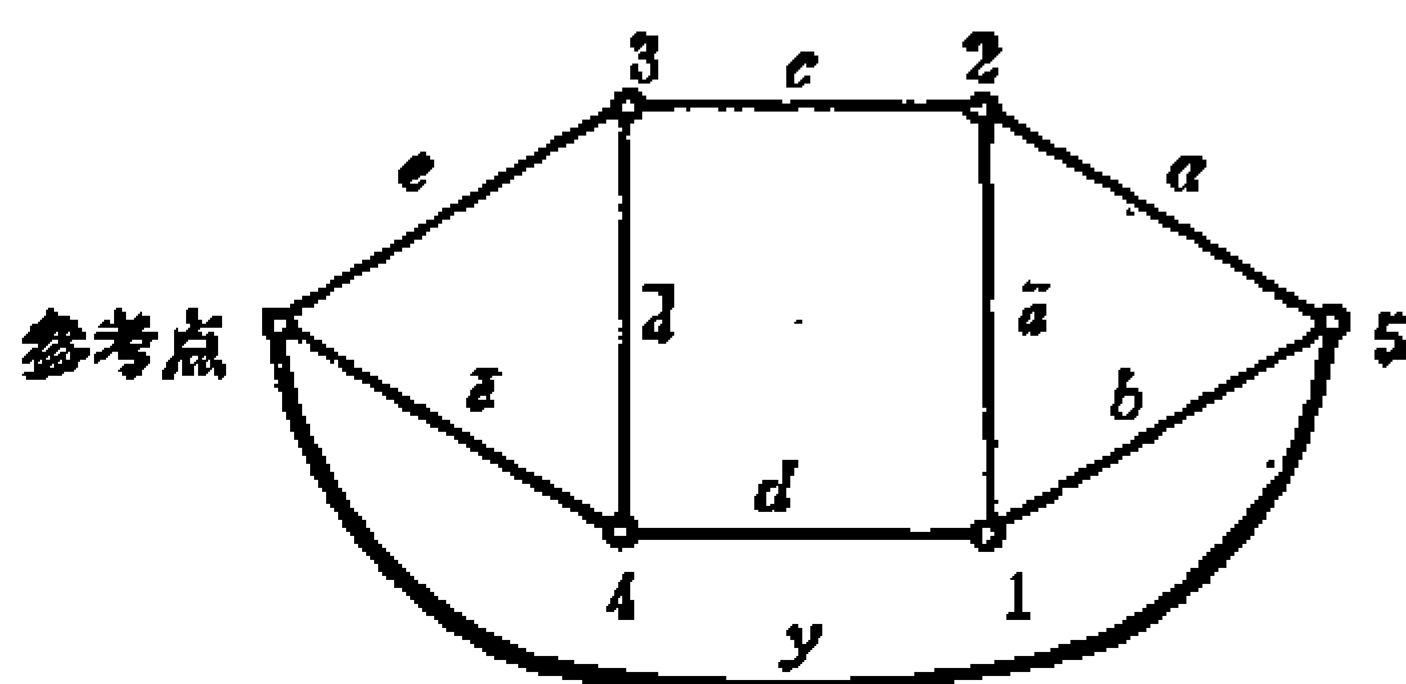


图11-5-2　线图G

当一个 SP 网络的开关函数为不完全确定时，就有集合$\{R_{ij}\}$和$\{I_{ij}\}$。这时，除了应该把 0 路径加进$\{P_{ij}\}$外，综合 SP 网络的方法与11-4节中所讲的几乎是一样的。

当一个开关网络可以有多触点（即一个布尔变量可以是无向线图中许多条边的权）时，这种网络如按照11-3节的方法来综合就变得非常复杂。在这种情况下，为了应用上述方法，就必须使每一条边都有各自不同的名称。这样在一个给定的开关函数F_{ij}中，要判断一个布尔变量是否是某一条边的权就非常困难。例如，在与开关函数 F_{ij} 对应的集合$\{P_{ij}\}$中，(a,b,c) 有可能来自 (a_1,a_2,b,c)，其中 $a_1=a_2$。换句话说，假设在一个包含两条带

有相同权的边的开关网络中，有一条 i 和 j 之间的路径，那么这条路径的路径乘积中只能出现 F_{ij} 中的一个 x 。当我们应用11-3节中的方法时，就必须重新构造这条含有两个带变量 x 的边所组成的路径。这可不是一个容易的事，下例将说明这一点。

例11-5-2 考虑一个开关函数 F_{ij}，

$$F_{ij}=ab+ac+bc$$

对应 F_{ij} 的集合 $\{P_{ij}\}$ 是

$$\{P_{ij}\}=\{(a,b),(a,c),(b,c)\}$$

它不满足定理11-3-1，因为

$$(a,b)\oplus(a,c)\oplus(b,c)=\phi$$

如果我们作以下改变：

$$(a,b)\Longrightarrow(a_1,b_1)$$
$$(a,c)\Longrightarrow(a_2,c)$$
$$(b,c)\Longrightarrow(b_2,c)$$

其中 $a_1=a_2, b_1=b_2$，那么

$$(a_1,b_1)\oplus(a_2,c)\oplus(b_2,c)=(a_1,a_2,b_1,b_2)$$

于是集合 $\{P_{ij}\}$ 为

$$\{P_{ij}\}=\{(a_1,b_1),(a_2,c),(b_2,c),(a_1,a_2,b_1,b_2)\}$$

它满足定理11-3-1，故按照11-3节的方法可得到满足 F_{ij} 的一个开关网络。

习　题

1.利用连接矩阵求出图 P-11-1 网络中从 i 到 j 的开关函数。

2.利用11-2节中所讲的路径集合求出图 P-11-2 中网络的开关函数 F_{12} 和 F_{13}。

3.综合一个 SC 网络，它满足完全确定开关函数

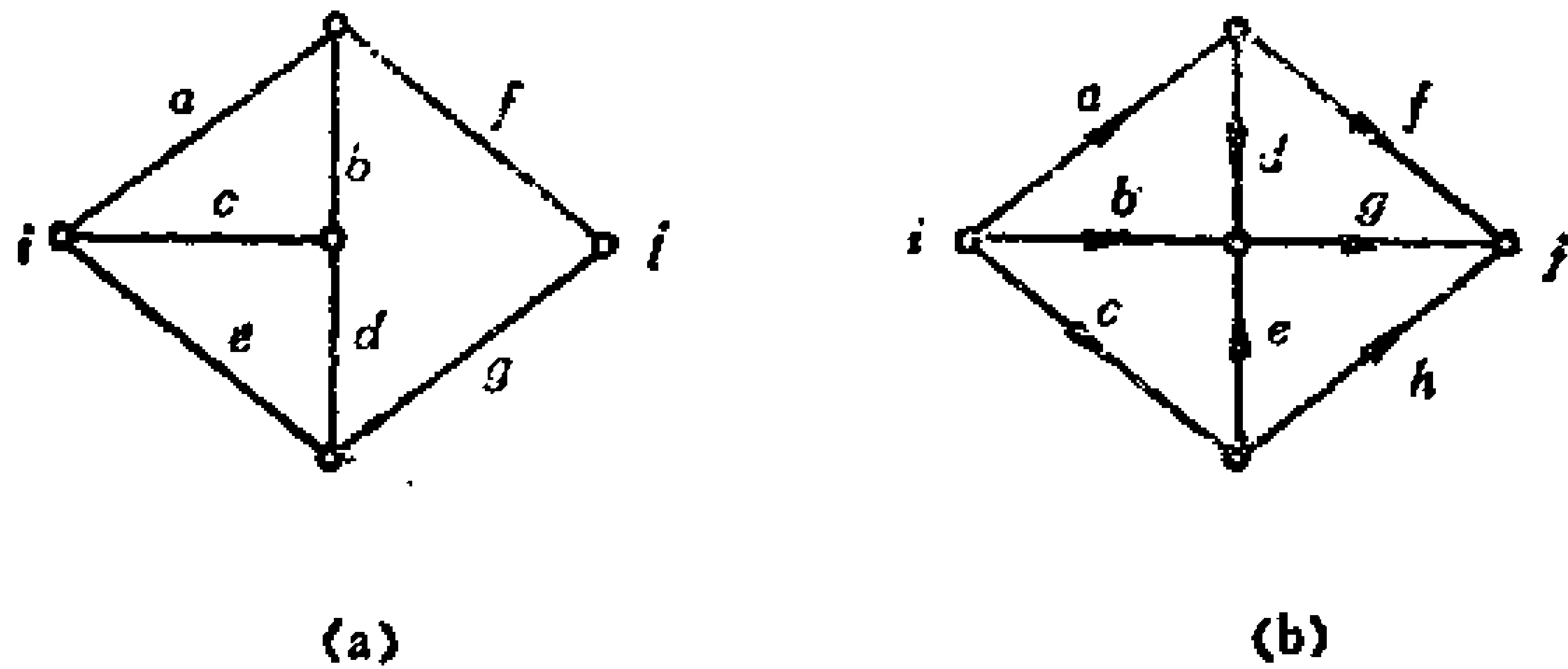
$$F=af+bdf+cdef+cg+beg+adeg$$

4. 综合一个 SC 网络，它满足一个不全定开关函数，其对应集合$\{R_{ij}\}$和$\{I_{ij}\}$是

$$\{R_{ij}\} = \{(a,d,e),(b,d,f),(b,e),(c)\}$$

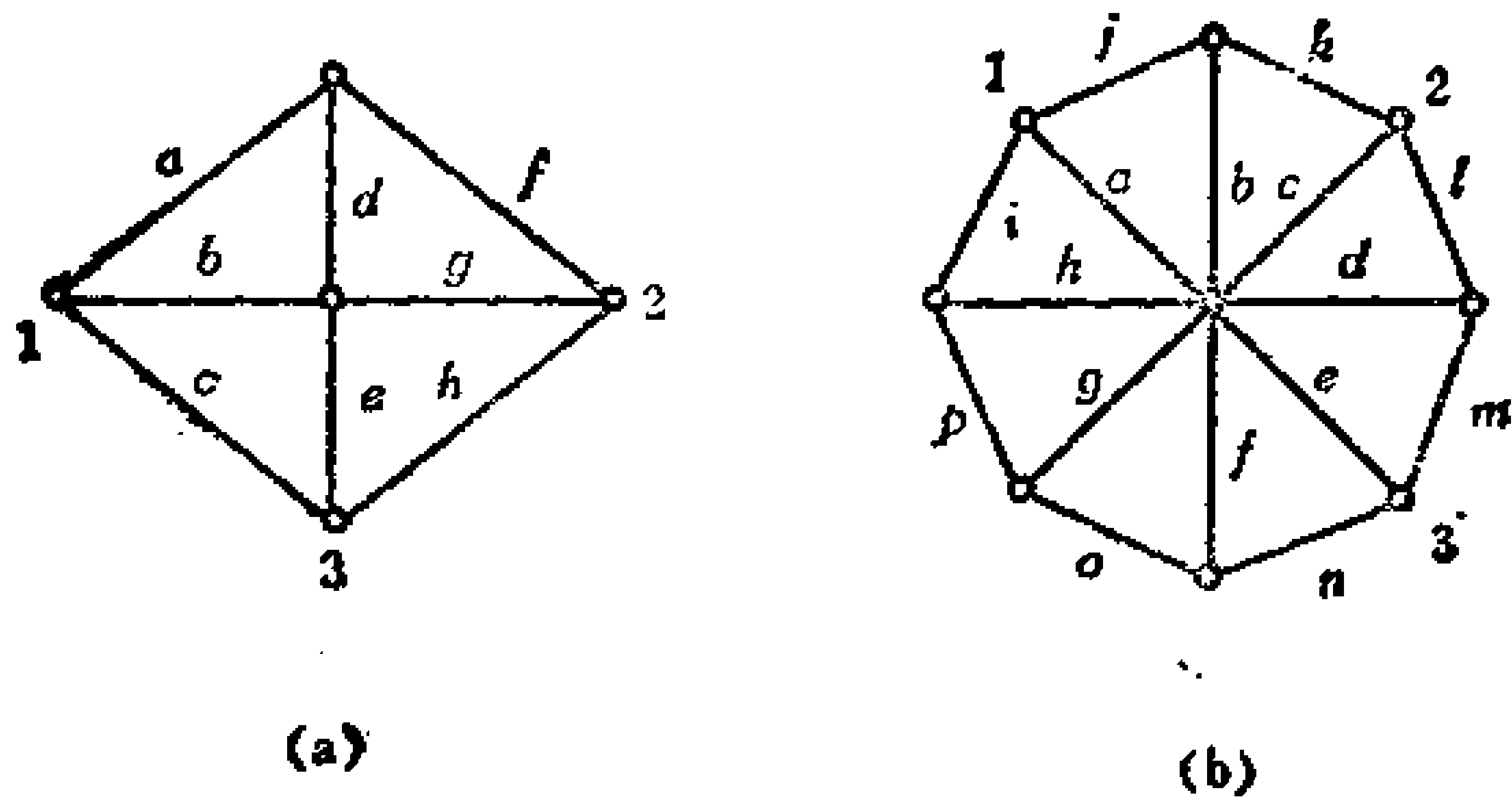
和

$$\{I_{ij}\} = \{(a,c,e),(a,f)\}$$



图P-11-1

(a) SC网络G；(b) 网络G'



图P-11-2

(a) SC网络G；(b) SC网络G'

5. $F_{ij}=ab+ac+bc+ad$ 是一个 SC 网络的开关函数吗?

6.假定 F_1 不是 SC 网络的开关函数，而 F_2 是 SC 网络的开关函数。$F=F_1+F_2$ 是 SC 网络的开关函数吗?

7.综合一个满足以下完全确定开关函数的 SP 网络:

$$F_{ij}=x\bar{y}z+\bar{x}yz+y\bar{u}\bar{z}+\bar{y}u\bar{z}$$

8.假定 F_1 是一个 SC 网络的完全确定开关函数，$F=xF_1+\bar{x}F_1$ 是一个 SP 网络的完全确定开关函数吗?

9.在 SC 网络 G 中，设 F_{ij} 是 i 和 j 之间的开关函数，F_{ip} 是 i 和 p 之间的开关函数。假定我们把一个新的变量 x 加在 G 中 p 和 j 之间，那么在所得的 SC 网络中，i 和 j 之间的开关函数是什么?

10.设 G 是一个 SP 网络。又设 i， j 和 k 是 G 中任意三顶点。在 F_{ij}，F_{jk} 和 F_{ik} 之间，存在什么关系? 其中 F_{pq} 是 p 和 q 之间的开关函数，$p,q\in(i,j,k)$。

第十二章　传输网理论——边权例

12-1　无向边权 (EWC) 网中的单流

我们来考虑从一站向另一站传送信息的介质，例如电话线路、公路、电力线、公用管道等等. 单位时间内这种介质所能传输的信息是有某种最大限量的. 每站所能处理的信息也会有一个最大的限量. 这种介质网络称为传输网(communication net). 我们可以用线图来表示它，其中每个顶点代表一个站，而每条边代表一个在两站之间传送信息的介质（链）.若各站都不限制所传信息的数量时，这样的网络称为边权传输网 (Edge Weighted Communication Net)，或记为EWC网. 当每条边所能传输信息的最大限量足够大，使得信息的传输量仅受到顶点（站）的限制时，这样的网络称为点权传输网(Vertex Weighted Communication Net)，或记为VWC网. 本章只讨论EWC网，VWC网在下一章讨论.

在EWC网中，因为只有边才限制信息的传输量，所以只有边具有容量（权）——边所能传送信息量的最大限量，这些权称为边容量. 当所有边均未定向的时候，就称网络为无向EWC网. 另一方面，当所有边均定了向时，就称之为有向EWC网. 例如，图12-1-1 中的线图是无向

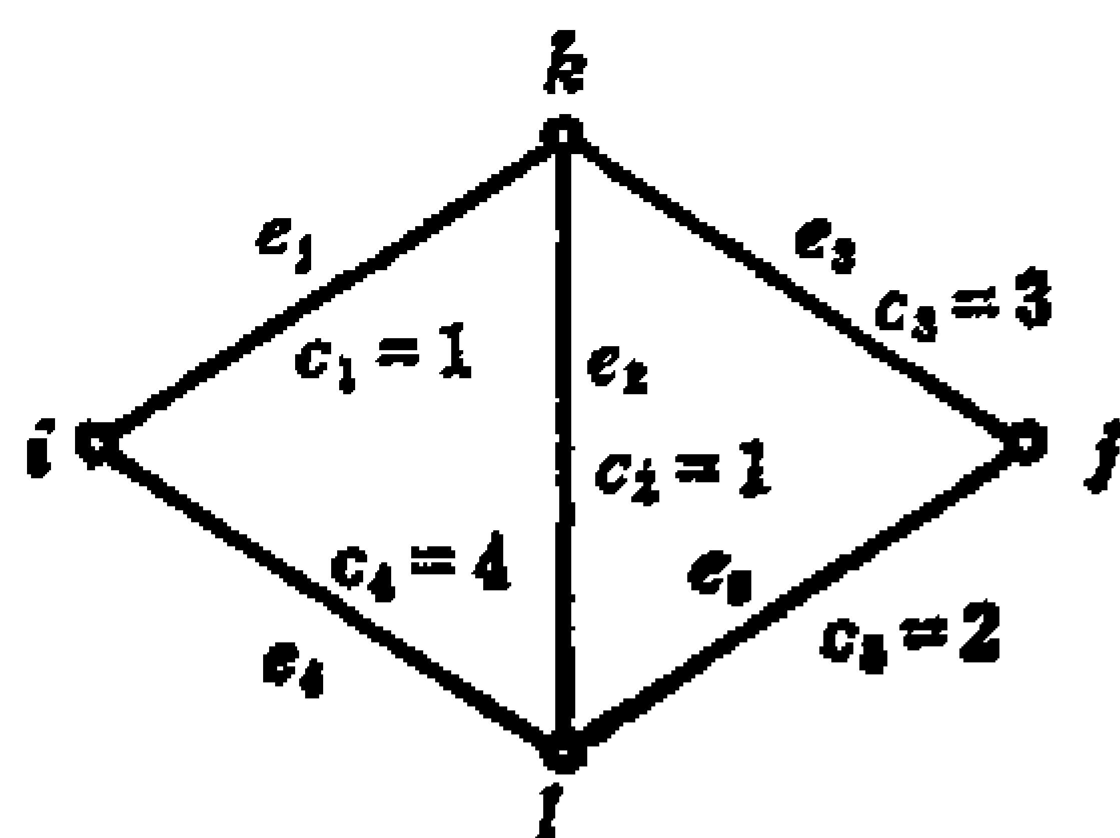


图12-1-1　一个无向EWC网

EWC网，其中，给每条边赋的权代表该边的边容量。

为了方便，我们用“从 i 分配到 j 的流”这样的说法来代替“从顶点 i 传输到顶点 j 的信息”这句话。这里我们要用到下面的术语。

定义12-1-1 设P_r是无向图中顶点 i 和 j 之间的一条路径。从 i 到 j 的对应有向路径是这样得到的：给P_r的每条边定一个方向，使路径P_r变成一条从 i 到 j 的有向路径。

例如，在图12-1-2(a)所示的无向线图中，路径 $P=(a,b,c)$ 的从 i 到 j 的对应有向路径如图12-1-2(b)所示。

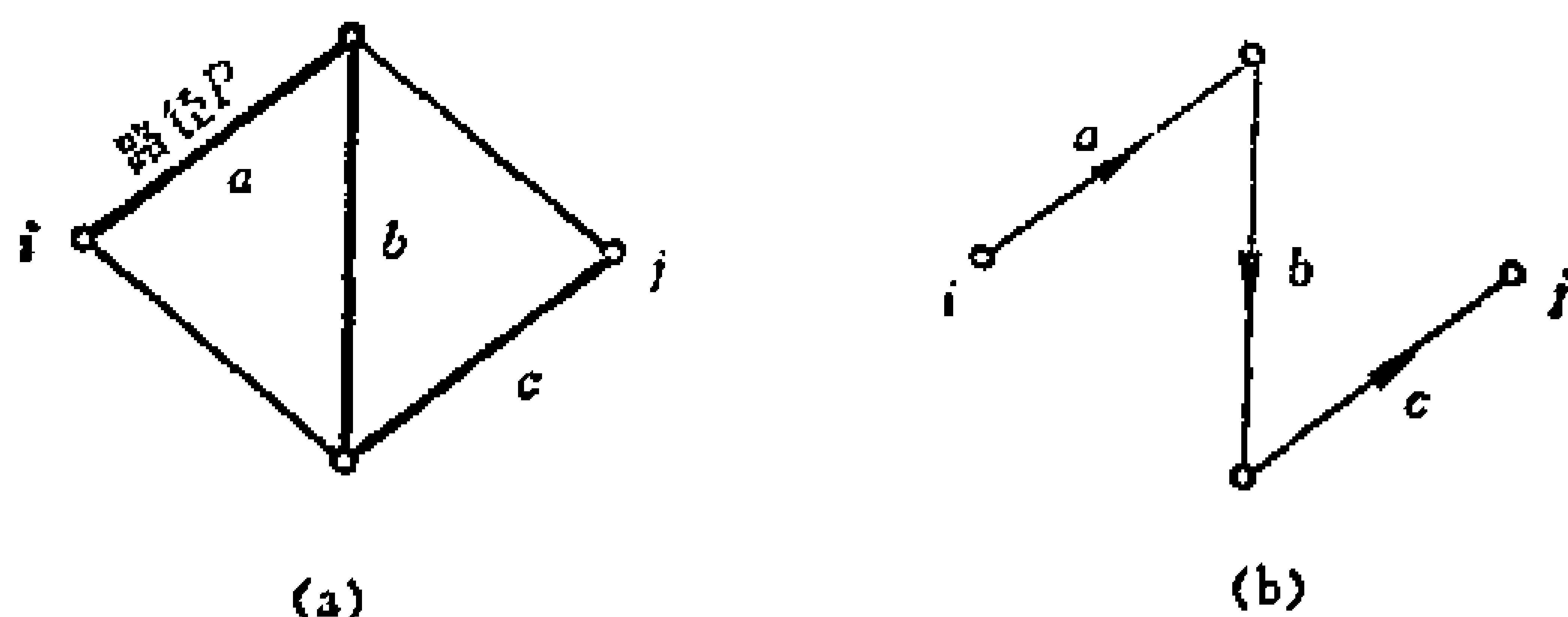


图12-1-2

(a) 线图G和路径P；(b) P的从 i 到 j 的对应有向路径

定义12-1-2 符号 $\psi_{r_{ij}}$ 表示从顶点 i 到顶点 j 的流（注意下标代表这些顶点）。

将流 $\psi_{r_{ij}}$ 分配给一条路径的意思是由这条路径中的边传输 $\psi_{r_{ij}}$。

定义12-1-3 设P_r是无向图中顶点 i 和 j 之间的一条路径。分配给路径P_r一个流$\psi_{r_{ij}}$的意思是把 $\psi_{r_{ij}}$分配给P_r的每条边，其定向与P_r的从 i 到 j 对应的有向路径方向一致。

例如，分配$\psi_{r_{ij}}=1$给路径 $P=(a, b, c)$，也就是说，我们把

1个单位的流连同适当的定向赋给P的每条边，如图 12-1-3(a)所示。为了简化，通常用一条线来代表$\psi_{r_{ij}}$，如图 12-1-3(b) 所示。

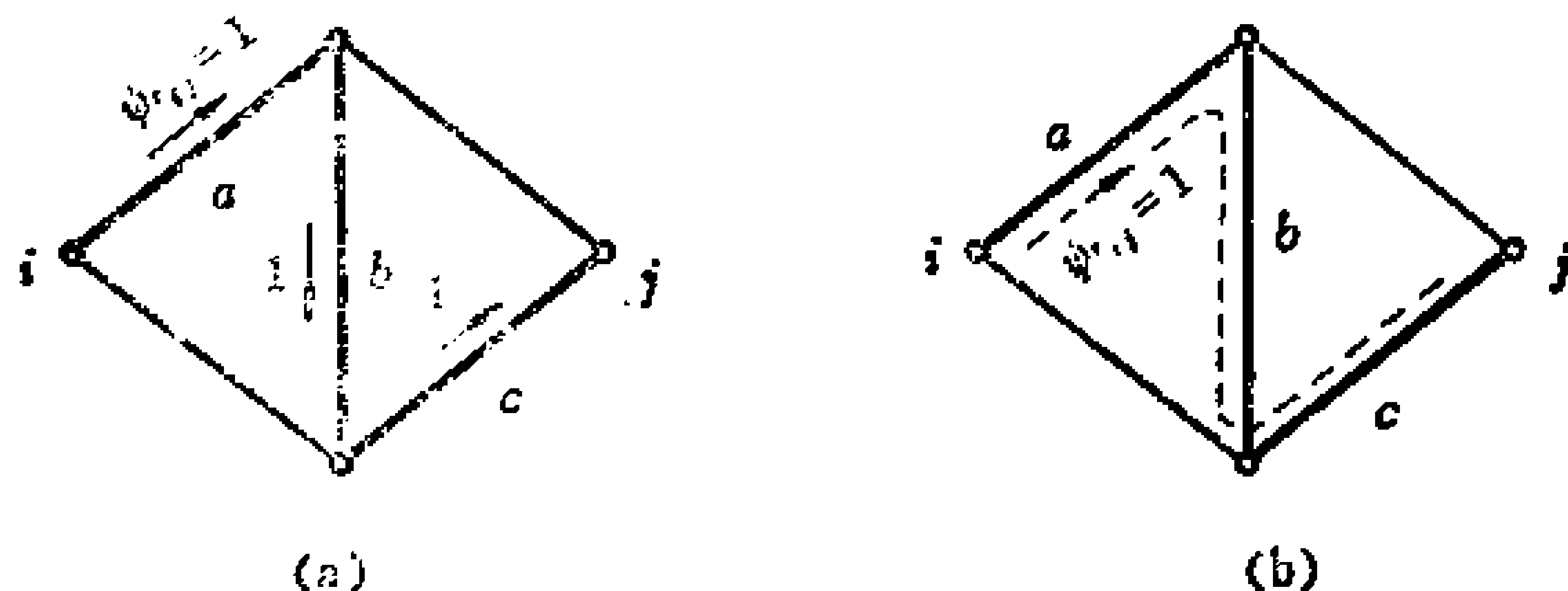


图12-1-3 $\psi_{r_{ij}}$ 的分配

(a) 分配$\psi_{r_{ij}}$给P的每条边；(b) 用线表示$\psi_{r_{ij}}$

当我们说将一个流$\psi_{r_{ij}}$分配给一个无向EWC网G时，一般是指

$$\psi_{ij}=\sum_{r=1}^{n}\psi_{r_{ij}} \tag{12-1-1}$$

其中，流ψ_{ij}的每一部分$\psi_{r_{ij}}$是分配给G中i和j之间一条路径P_r的，$r=1,2,\cdots,n$，而$\sum_{r=1}^{n}\psi_{r_{ij}}$是指对$\psi_{r_{ij}}$的数量求和。例如，在图12-1-4所示无向EWC网中有三个流$\psi_{1_{ij}}=1$，$\psi_{2_{ij}}=2$和$\psi_{3_{ij}}=3$，分别分配给路径P_1，P_2和P_3。因此，我们说$\psi_{ij}=\sum_{r=1}^{3}\psi_{r_{ij}}=6$分配给了$G$。

根据边容量的定义，必须注意将流$\psi_{r_{ij}}$分配给路径P_r ($r=1,2,\cdots,n$)时，不应出现分配给一条边的流量超过该边容量的情况。例如，在图 12-1-4 所示的EWC 网中，边b必须承担$\psi_{1_{ij}}+\psi_{2_{ij}}=3$。如果$b$的边容量小于3，那么图 12-1-4 所示要承担

$\psi_{ij}=6$ 的分配方式就不适当了。换句话说，给一条路径 P_r 分配流 ψ_{rij} 是有一定限制的。

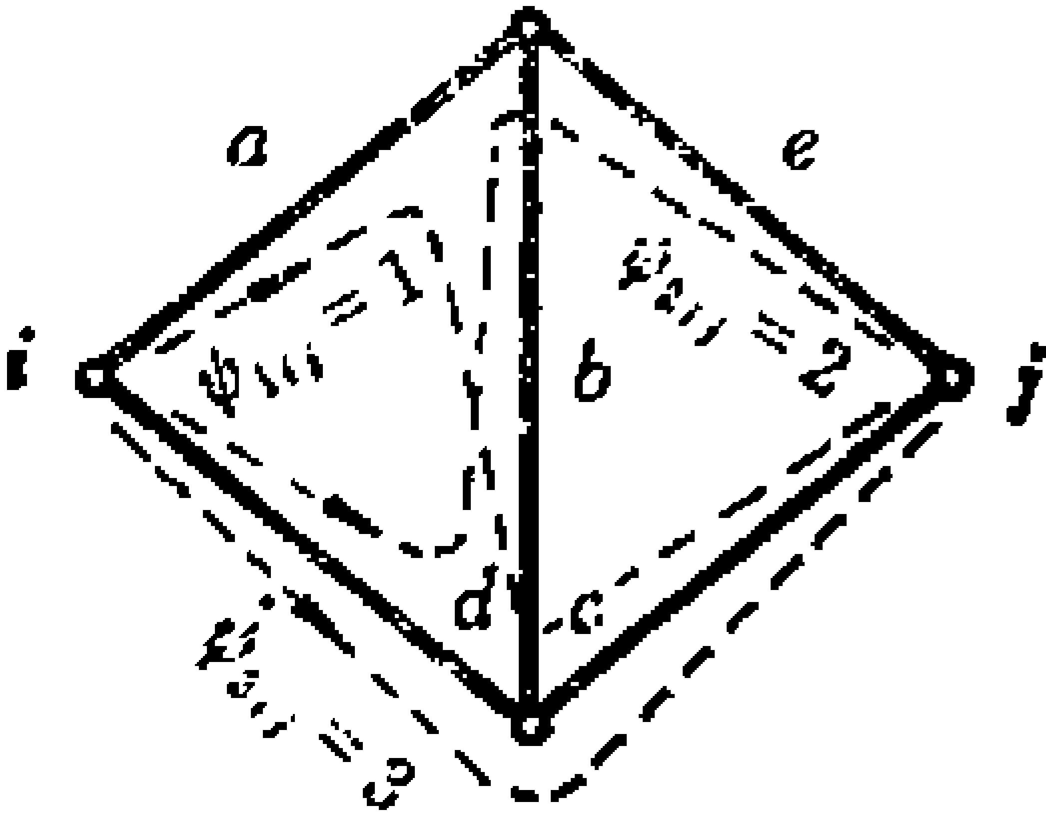


图12-1-4　ψ_{ij} 的分配

假定 $\psi_{sij}(s=1, 2, \cdots, h)$是分配给从 i 到 j 的路径 P_{sij}（对所有的s）的流。那么对于边容量为c'的任一边e'，必须满足下式

$$c'\geqslant\psi(e') \tag{12-1-2}$$

其中

$$\psi(e')=\sum_{s=1}^{h}\delta_s(e')\psi_{sij} \tag{12-1-3}$$

而

$$\delta_s(e')=\begin{cases}1 \text{ 若边}e'\text{在路径}P_s\text{中}\\ 0 \text{ 若边}e'\text{不在路径}P_s\text{中}\end{cases} \tag{12-1-4}$$

式（12-1-2）中的符号 $\psi(e')$ 表示将流 ψ_{sij} 给予路径 P_{sij} $(s=1, 2, \cdots, h)$ 的分配方式中，分配给边e'的总流。

假定流 ψ_{sij} 已分配给路径 P_{sij}，$s=1, 2, \cdots, h$。于是我们知道，式(12-1-2)对EWC 网G的每条边都应满足。要给路径P_{tij}分配一个附加的流 ψ_{tij}，P_{tij} 中的每条边e_u就必须满足

$$\psi(e_u)+\psi_{tij}\leqslant c_u \tag{12-1-5}$$

其中$\psi(e_u)$是按式(12-1-3)给出的边 e_u的总流，而 c_u 是边 e_u 的容量。式(12-1-5)可以改写为

$$\psi_{tij}\leqslant c_u-\psi(e_u) \tag{12-1-6}$$

这是P_{tij}中每条边都必须满足的公式。换句话说，

$$\psi_{tij}\leqslant\min\{c_u-\psi(e_u);\ e_u\in P_{tij}\} \tag{12-1-7}$$

此式的右端为通过一条路径 P_{rij} 能够给 EWC 网分配的附加流的上界。

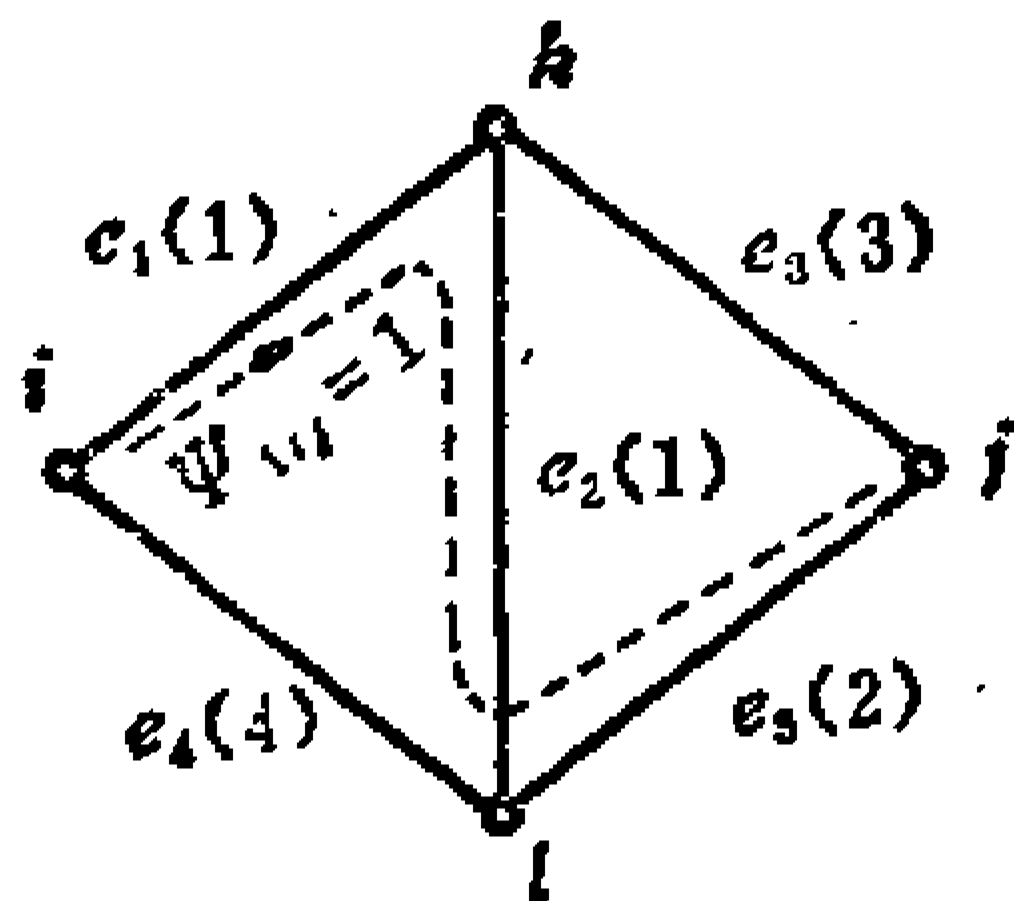


图12-1-5　流 $\psi_{ij}=1$

例12-1-1　假定我们给图 12-1-1 中的EWC 网一个流 ψ_{1ij}，如图12-1-5所示。那么只有一条路径 $P_{ij}=(e_4, e_5)$ 可以分配到一个从 i 到 J 的非零流。因为 $\min\{4-\psi(e_4);\ 2-\psi(e_5)\}$ 是 1，所以附加流 ψ_{2ij} 不能大于 1。

定义12-1-4　所谓"流 ψ_{ij} 可以被分配"的意思是说存在一个路径 P_{rij} $(r=1, 2, \cdots, h)$ 的集合，（其中每条路径都是在顶点 i 和 j 之间的一条路径），以及一个流 $\psi_{rij}\left(\psi_{rj}=\sum\limits_{r=1}^{h}\psi_{rij}\right)$ 的集合，使得对于 $r=1,2,\cdots,h$，ψ_{rij} 可以顺次分配给路径 P_{rij}。

在例12-1-1中，我们可以看出，$\psi_{ij}=2$ 可以分配给图12-1-1中的传输网。但是，如果我们不是如图12-1-5那样分配 $\psi_{1ij}=1$，那么就可以如图12-1-6那样把 $\psi_{ij}=4$ 分配给同一网络。这就说明，我们所能分配的流 ψ_{ij} 的数量是根据流的分配方式来决定的。另一方面，如果一个EWC网由有限条边组成，并且每条边的容量是有限的，那么我们知道，只能给它分配有限的流量。因此从顶点 i 到顶点 j 所分配的流必定有一个最大值，这个最大流称为从 i 到 j 的端限容量(terminal capacity)，记为 t_{ij}。

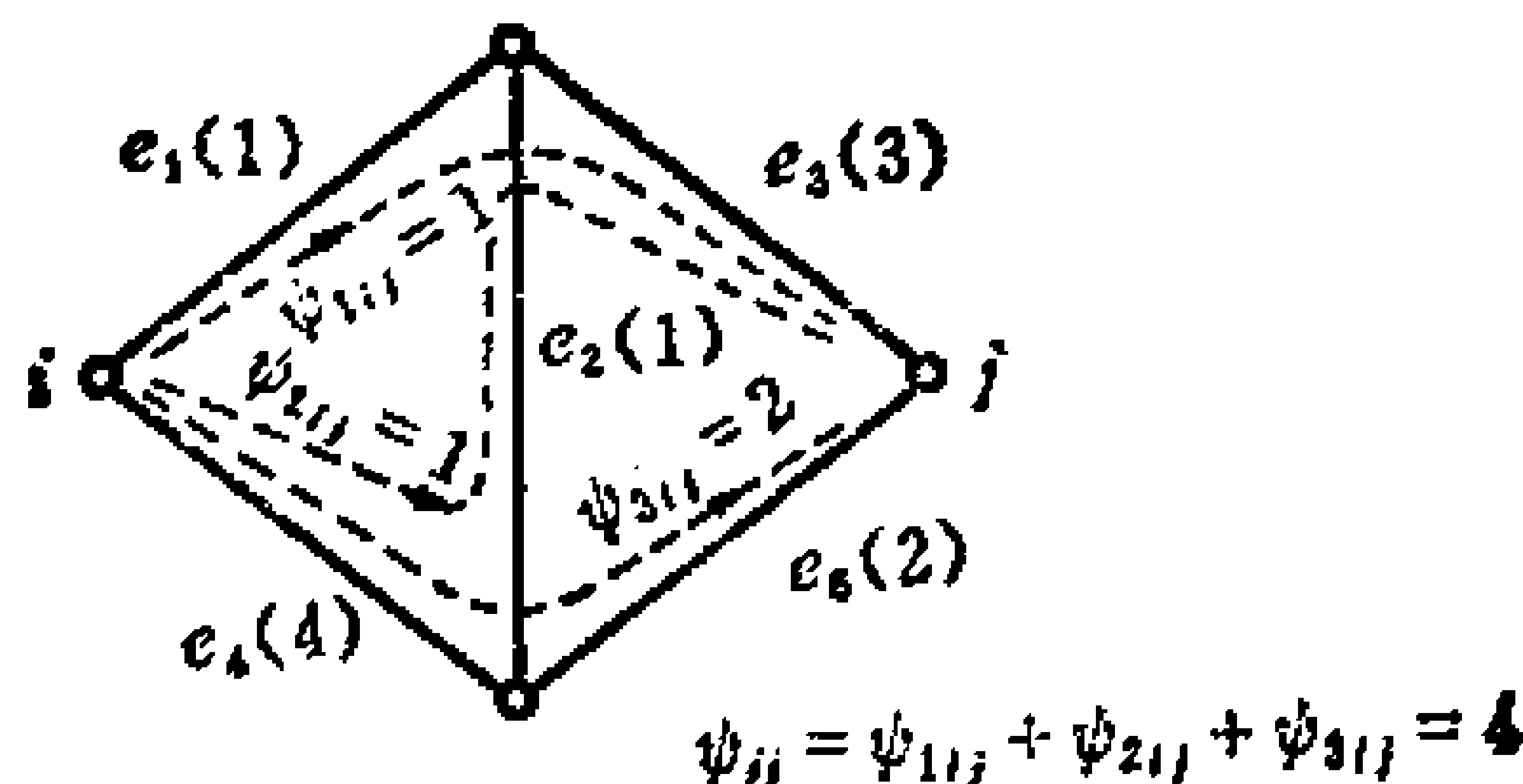


图12-1-6　把$\psi_{ij}=4$分配给一个EWC网

定义12-1-5　一个EWC网G的端限容量t_{ij}就是所能分配给G的从i到j的最大流。

假定一个流ψ_{ij}可以分配给一个EWC网G，并且假设ψ_{ij}就是最大流。也就是说，ψ_{ij}等于从i到j的端限容量t_{ij}。那么，任何一个满足$\psi'_{ij}\leqslant\psi_{ij}$的流$\psi'_{ij}$都可以分配给$G$，这是因为对于$r=1,2,\cdots,h$，把$\psi'_{rij}=a\psi_{rij}$分配给路径$P_{rij}$是满足式(12-1-2)的，其中

$$a=\frac{\psi'_{ij}}{\psi_{ij}} \qquad (12\text{-}1\text{-}8)$$

且

$$\psi_{ij}=\sum_{r=1}^{h}\psi'_{rij} \qquad (12\text{-}1\text{-}9)$$

因此，知道一个EWC网的端限容量t_{ij}是非常重要的。为了讨论端限容量，我们需要以下定义。

定义12-1-6　我们说一条边在流ψ_{ij}的一种分配方式下是饱和的（或称为饱和边），如果通过这条边的流等于该边的容量。

例如，图12-1-5中，在流ψ_{ij}的这种分配方式下，边e_1和e_2是饱和的。图12-1-6中，边e_1，e_2和e_5都是饱和的。

定义12-1-7　在流ψ_{ij}的一种分配方式下，如果割集S由饱和

边组成，那么就称S为饱和割集。

例如，在图12-1-6中，边e_1，e_2和e_5是饱和的。因此$S=(e_1, e_2, e_5)$在流ψ_{ij}的这种分配方式下是饱和割集。我们选择饱和割集的定向为割集中一条边上一个流的方向。注意，分配给一条边的几个流的方向可能不尽相同。

考虑图12-1-7中的EWC网。在边e_2中有两个方向相反的流，取其中的一个（比如说ψ_1），作为割集S的定向，我们可以说，边e_1中流的方向与S的定向不一致。同样，我们可以看出，边e_5中流的方向与S的定向也不同。

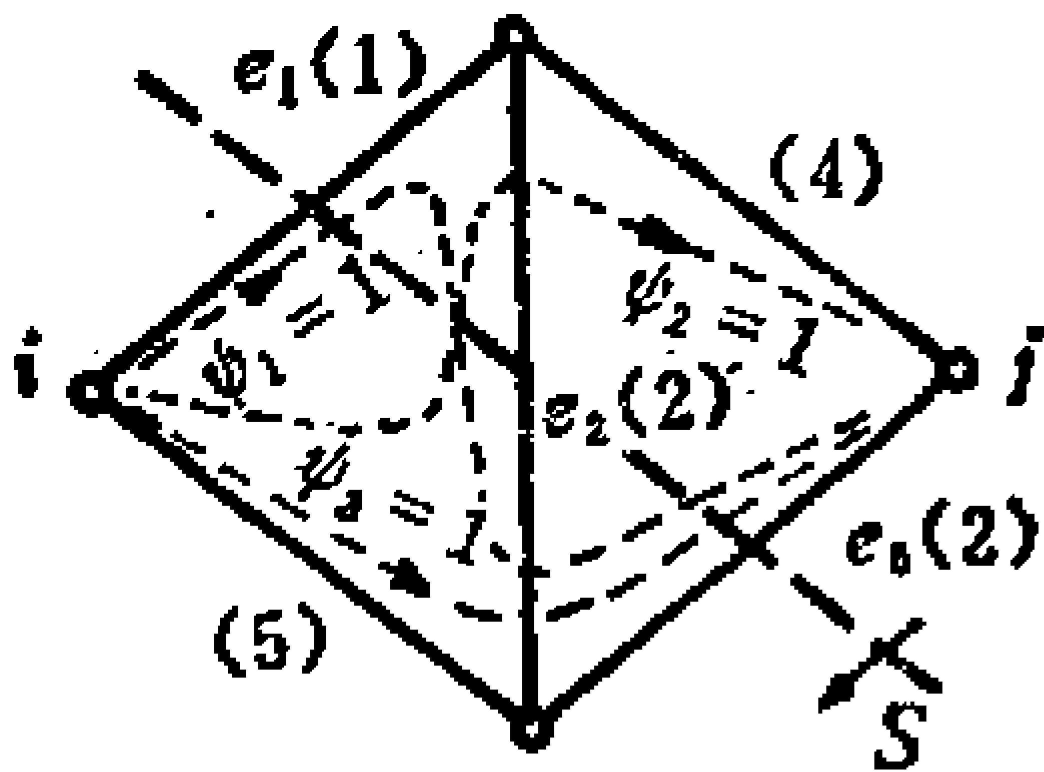


图12-1-7　一个EWC网，当$\psi_{ij}=3$时包含一个饱和割集S

定义12-1-8　如果一条边是饱和的，并且这条边中所有的非零流都是同方向（定向）的，我们就说这条边是一条基本饱和边。

例如，在图12-1-7中，边e_2是饱和的，但非基本饱和边。而e_1和e_5是基本饱和边。

定义12-1-9　当一个饱和割集中的所有边都是基本饱和边，且割集的定向与割集中每条边上的非零流方向一致时，就称此割集为基本饱和割集。

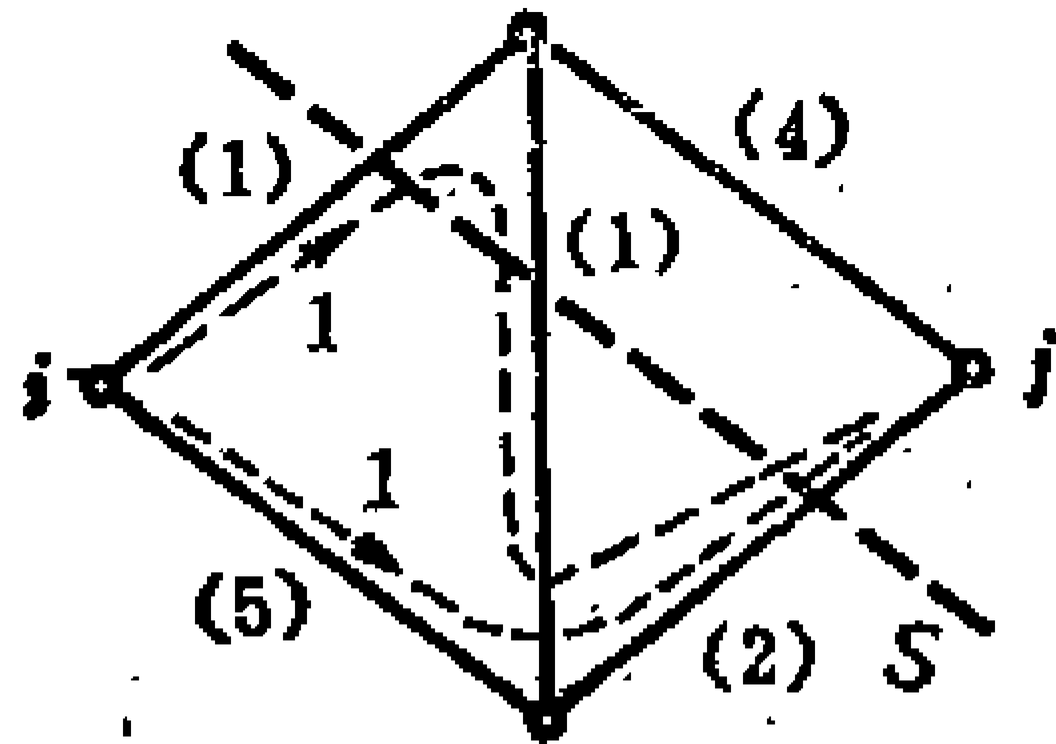


图12-1-8　饱和割集S

显然，图12-1-7中的S不是基本饱和割集，同样，图12-1-8中的饱和割集S也不是基本饱和割集，而图12-1-6中饱和割集(e_1, e_2, e_5)是基本饱和割集。

考虑图12-1-9所示的

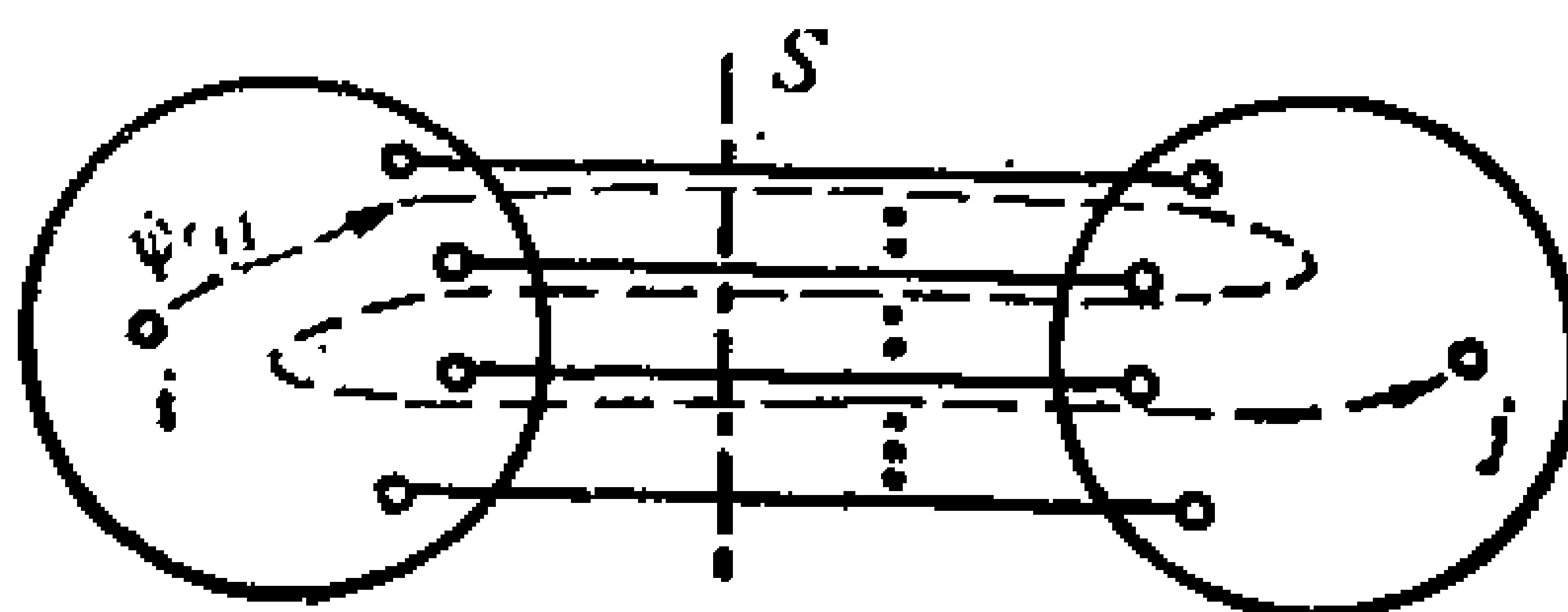


图12-1-9　饱和割集和流

EWC网，S是一个饱和割集，但非基本饱和割集。容易看出，存在一条从i到j的路径P_{ij}，分配给它的非零流为$\psi_{r_{ij}}$，并且这条路径至少包含割集S中的三条边，如图所示，另一方面，如果S是一个基本饱和割集，则每一条从i到j的路径P_{ij}（分配给它的非零流为$\psi_{r_{ij}}$）必定恰包含S的一条边，如图12-1-10所示。

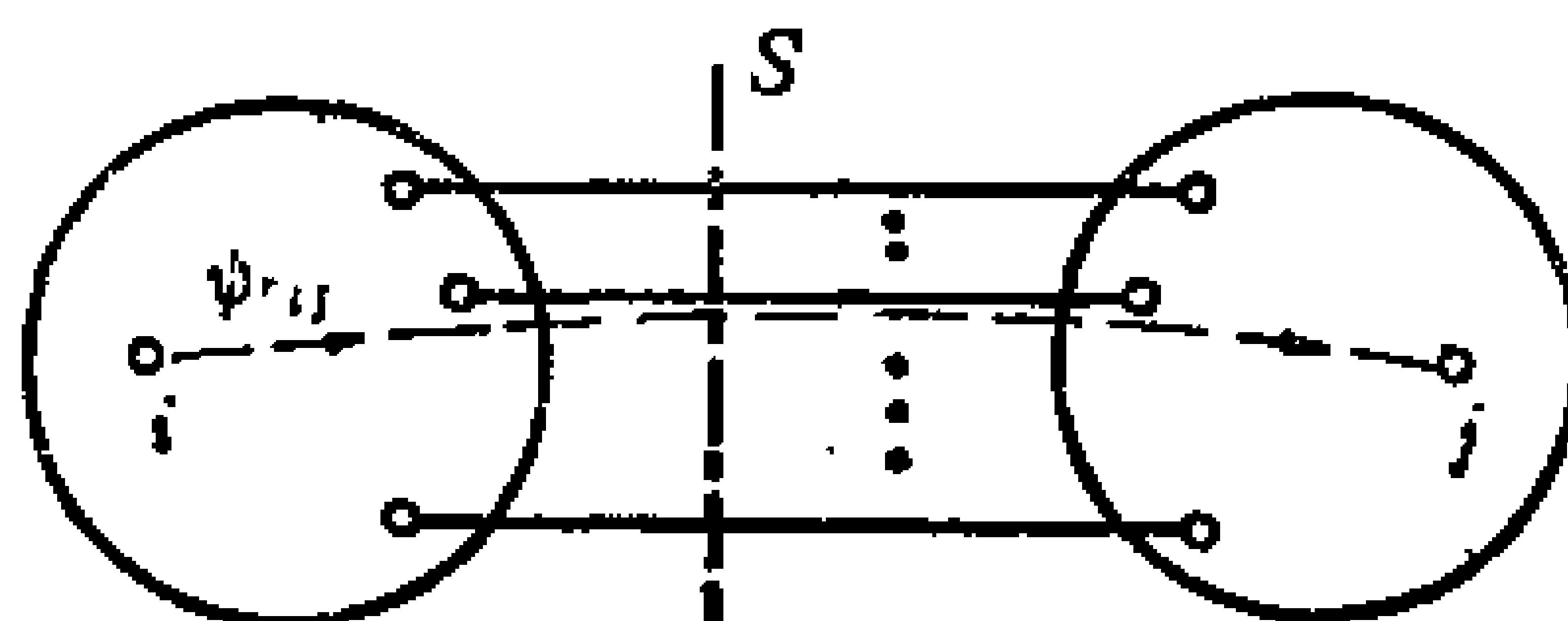


图12-1-10　基本饱和割集与流

在把最大流和基本饱和割集联系起来之前，我们来研究饱和割集的存在对分配附加流的影响。

引理12-1-1　对EWC网采用了分配流ψ_{ij}的一种方式之后，若不存在饱和割集，则从i到j的附加流是可以分配的。

证明：　因为不存在饱和割集，如果我们在EWC网中把每条边e_r的容量c_r变成$c'_r=c_r-\psi(e_r)$，其中$\psi(e_r)$是已给边e_r的总流，并删去新容量c'_r为零的边，那么在所得的网络中一定至少存在一条从i到j的路径P_{ij}，否则必有一个饱和割集。因为路径P_{ij}中

每条边的每个边容量非零，所以我们可以分配一个非零流给这条路径，其中

$$\psi'_{ij} \leqslant \min\{c'_r:\ e_r \in P_{ij}\} \tag{12-1-10}$$

（证毕）

根据引理12-1-1，如果不能对一个EWC网G分配任何更多的流ψ'_{ij}，那么我们就知道，至少存在一个分离顶点i和j的饱和割集。

下面是一个关于最大流的重要定理。

定理12-1-1　对有限条边的EWC网G采用了流ψ_{ij}的一种分配方式之后，若存在一个饱和割集但非基本饱和割集，则

$$\psi_{ij} < t_{ij} \tag{12-1-11}$$

注意t_{ij}是从i到j的端限容量，它等于从i到j的最大流。

证明：　因为G的边数是有限的，故G中的割集数也是有限的。设$\{S_q(i;j)\}$是所有分离i和j的割集的集合；又设由$\underline{S}_1$，$\underline{S}_2,\cdots,\underline{S}_k$组成的$\{\underline{S}_{q'}(i;j)\}$是$\{S_q(i;j)\}$中在$\psi_{ij}$的一种分配方式下所有饱和割集的集合。则我们可以看出，在$\{\underline{S}_{q'}(i;j)\}$中存在一个最接近顶点$j$的（割集）$\underline{S}_c$。也就是说，如果$\underline{S}_{q'}=\mathscr{E}(\Omega_{q'}\times\bar{\Omega}_{q'})^*$，$q'=1,2,\cdots,c,\cdots,k$，其中$j\in\bar{\Omega}_{q'}$，那么对所有的$q'$，有$\bar{\Omega}_c\subset\bar{\Omega}_{q'}$。

考虑图12-1-11所示的EWC网G，$\underline{S}_c$由边$e_1,e_2,\cdots,e_r$组成，它是最接近顶点j的。则在$\{\underline{S}_{q'}(i;j)\}$中的饱和割集没有一个包含$g_{cj}$的边，其中$g_{cj}$的顶点即为$\bar{\Omega}_c$中的顶点。并注意到$g_{ci}$和$g_{cj}$是从$G$删去$\underline{S}_c$中所有边后得到的一对子图。

因为$\underline{S}_c$是饱和割集，但非基本饱和割集，故存在一条路径P_{ij}，它包含$\underline{S}_c$中一条以上的边，且对它分配了非零流ψ_{rij}。不失一般性，设边e_1是从i到j的路径P_{ij}的边列中所出现的$\underline{S}_c$的第

---

* 见定义2-2-4和5-1-1。

一条边，如图12-1-11所示。设v_1和v_1'是边e_1所联的端点，并设v_1属于g_{ci}。因为在g_{cj}中没有分离顶点v_1'和j的饱和割集，所以我们可以找出一条从v_1'到j的路径P'。因而从v_1'到j可以给它分配非零流δ。

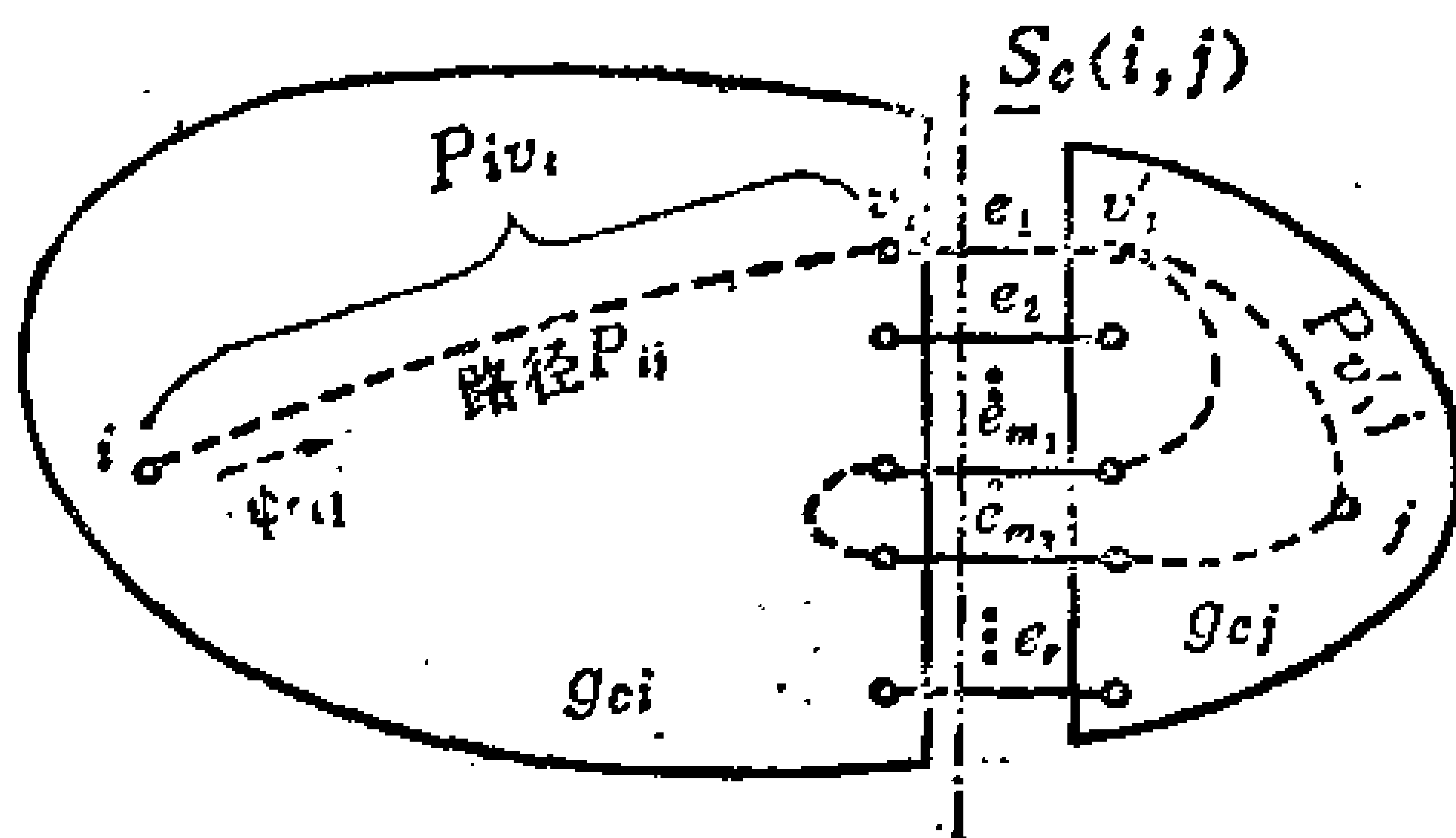


图12-1-11　EWC 网G及$\underline{S}_c(i,j)$

如果我们不把$\psi_{r_{ij}}$分配给P_{ij}，而把$(\psi_{r_{ij}}-\delta)$分配给P_{ij}，并把δ分配给路径$P'_{ij}=P_{iv_1}\cup(e_1)\cup P_{v_1'j}$，其中$P_{iv_1}$是从$i$到$v_1$的路径，它是$P_{ij}$的一部分，如图12-1-11所示。这样，我们正好就得到从i到j的同样数量的流，也就是ψ_{ij}。但是，因为对$P_{ij}\cap\underline{S}_c$中（除$e_1$外）的边所分配的流都减少了$\delta$，所以$\underline{S}_c$不再是饱和割集。只要选择充分小的$\delta$，仍不会产生任何新饱和割集。因此，对流$\psi_{ij}$的这种新的分配方式最多给出$k$-1个饱和割集。

我们可以重复这个过程，直到在流ψ_{ij}的一种分配方式下，不再有饱和割集。若不再有饱和割集，则我们可以根据引理12-1-1，分配附加的流。因此，ψ_{ij}就不是给定EWC网所能分配到的从i到j的最大流。

（证毕）

由定理12-1-1，我们可以得到以下定理。

定理12-1-2 当且仅当ψ_{ij}的一种分配方式至少产生一个分离i和j的基本饱和割集时，

$$\psi_{ij}=t_{ij} \qquad (12\text{-}1\text{-}12)$$

证明： 考虑任一分离i和j的割集，如图12-1-10所示。则我们可以看出，流ψ_{ij}一定通过割集中的边。因此从顶点i到顶点j所能输送的最大流量不可能超过割集中所有边的边容量之和。因为这个结论对任何分离i和j的割集都是对的，所以它对分离i和j的基本饱和割集也是对的。并且，通过一个基本饱和割集的总流等于这个割集中所有边的边容量之和，故式(12-1-12)为真。这样就由定理12-1-1给出了这个定理的证明。

（证毕）

定义12-1-10 割集S的值是指S中所有边的边容量之和，用$V[S]$表示。

考虑分离顶点i和j的所有割集的集合$\{S_q(i;j)\}$。注意，对$\{S_q(i;j)\}$中任一割集S来说，$V[S]$不可能小于最大流ψ_{ij}。如果流ψ_{ij}的一种分配方式产生了一个基本饱和割集S'（它分离i和j），那么S'在$\{S_q(i;j)\}$内。分配给基本饱和割集S'中边流之和必定等于ψ_{ij}。因此我们可以根据定理12-1-2的结果得出结论。

定理12-1-3 （最大流-最小割定理）对于一个EWC网，

$$t_{ij}=\min\{V[S];\ S\in\{S_q(i;j)\}\} \qquad (12\text{-}1\text{-}13)$$

例12-1-2 考虑图12-1-12中的EWC网。分离1和2的割集集合是

$$\{(a,b),(a,c,e),(b,c,d),(d,e)\}$$

因此

$$t_{12}=\min\{V[a,b],V[a,c,e],V[b,c,d],V[d,e]\}$$
$$=\min\{7,6,10,7\}=6$$

假定由ψ_{ij}的两种分配方式得到了分离顶点 i 和 j 的两种不同的基本饱和割集的集合 $\{\underline{S}'_q(i;j)\}$ 和 $\{\underline{S}''_r(i;j)\}$，并令$\psi'_{ij}$是一种分配方式，而$\psi''_{ij}$是另一种方式。设$\sum\limits_{(r)}\psi'_{rij}=\psi'_{ij}$，其中$\psi'_{rij}$是分配给路径 P_{rij} 的，设$\sum\limits_{(r)}\psi''_{rij}=\psi''_{ij}$，其中 ψ''_{rij} 是分配给路径 P_{rij} 的，$r=1,2,\cdots,k$。注意ψ'_{rij}或ψ''_{rij}可以为零。如果我们不分配ψ'_{rij}给P_{rij}，也可以分配 $a\psi'_{rij}+(1-a)\psi''_{rij}$给路径 P_{rij}，$r=1,2,\cdots,k$，其中$0<a<1$。这种分配方式也给出从 i 到 j 的相同的流。在这样的分配下，$\{\underline{S}'_q(i;j)\}$ 中任一割集$\underline{S}'_q$不再是基本饱和割集，除非这个割集同时也是$\{\underline{S}''_r(i;j)\}$ 中的基本饱和割集。因此，据定理12-1-2，要使ψ'_{ij}和ψ''_{ij}两者都给出从 i 到 j 的最大流，必有 $\{\underline{S}'_q(i;j)\}\cap\{\underline{S}''_r(i;j)\}\neq\phi$。同理，可以证明在所有的集合 $\{S_p(i;j)\}$ 中，至少有一个割集是公共的，其中 $\{S_p(i;j)\}$ 是在从 i 到 j 的最大流的一种分配方式下产生的分离 i 和 j 的基本饱和割集的集合，$p=1,2,\cdots$。这个公共割集称为对应于 t_{ij} 的割集，或t_{ij}的对应割集。例如，图12-1-12中的割集 (a,c,e) 就是t_{ij}的对应割集。对于下一节要讨论的端限容量之间的关系来说，端限容量的对应割集是非常重要的。

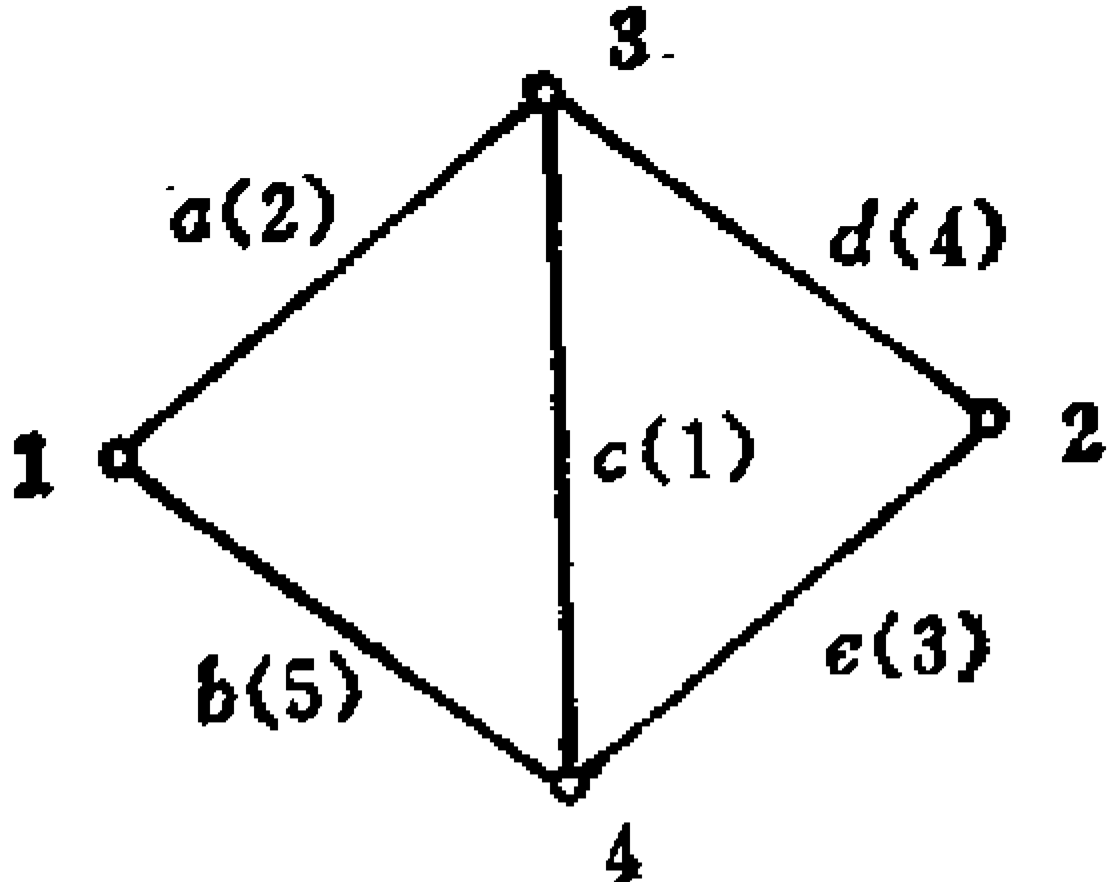


图 12-1-12　一个EWC网

12-2　无向EWC网的端限容量矩阵

确定一个 EWC 网的方法之一是给出这个网的所有可能的顶点对之间的端限容量。这可以由一个称为端限容量矩阵的矩阵

$T=[t_{ij}]$ 来作到。

定义12-2-1 EWC网 G 的端限容量矩阵 $T=[t_{ij}]$ 是一个方阵，它的第 r 行和第 r 列表示顶点 r，它的元素 t_{ij} 为

$t_{ij}=$ 从 i 到 j 的端限容量（当 $i\neq j$ 时）

$t_{ii}=d$（对所有的 i） (12-2-1)

对于一个EWC网，这个定义中的 d 可以是任意的，除非我们对从顶点 i 到它自身的端限容量赋予了某种意义。有时候，定义 d 为零可能要简便些。记号 d 是 diagonal entry（对角元）的第一个字母。

例12-2-1 考虑图 12-1-12 中的EWC网 G。我们已经知道 $t_{12}=6$。其余的端限容量是

$$t_{13}=\min\{V[a,b],\ V[a,c,e],\ V[a,c,d]\}=6$$
$$t_{14}=\min\{V[a,b],\ V[b,c,d],\ V[b,c,e]\}=7$$
$$t_{23}=\min\{V[d,e],\ V[b,c,d],\ V[a,c,d]\}=7$$
$$t_{24}=6$$
$$t_{34}=6$$

因此 G 的端限容量矩阵 T 为

$$T=\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & d & 6 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & d & 7 & 6 \\ 3 & 6 & 7 & d & 6 \\ 4 & 7 & 6 & 6 & d \end{matrix}$$

为了讨论EWC网的端限容量矩阵的性质，我们定义矩阵的主分块如下。

定义12-2-2 设 M 是一个方阵，其中每一个对角元均为 d，每一个非对角元都是实数。M 的一个分块

$$M=\begin{bmatrix}M_a & M_c\\ M_d & M_b\end{bmatrix}\tag{12-2-2}$$

称为主分块，如果：(1) M_c 中每一个元素是相同的，并且是除 d 外 M 中的最小数；(2) M_a 和 M_b 都是方子阵，其中每一个对角元都是 d 。M_a 和 M_b 称为由 M 的主分块划分得到的结果主子阵。

这一节中所讨论的 EWC 网都是无向的，我们可以看出，$t_{ij}=t_{ji}$。因此端限容量矩阵 T 是对称的。为了研究端限容量矩阵的性质，我们回忆上节所讨论的：对于每一个端限容量 t_{ij}，存在一个分离 i 和 j 的对应割集 S_1，并且它的值等于 t_{ij}。设

$$S_1=\mathscr{S}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)\tag{12-2-3}$$

因为 S_1 是 t_{ij} 的对应割集，故 $i\in\Omega_1$，$j\in\bar{\Omega}_1$。假定 t_{ij} 是 EWC 网 G 的所有端限容量中最小的一个，那么对于 Ω_1 中任一顶点 p 和 $\bar{\Omega}_1$ 中任一顶点 q，$t_{pq}=t_{ij}$，这是因为根据式 (12-1-13)

$$t_{pq}=\min\{V[S];\ S\in\{S(p;q)\}\}\tag{12-2-4}$$

又因为 S_1 分离 p 和 q，所以 S_1 是式 (12-2-4) 中的一个割集。此外，S_1 是 t_{ij} 的对应割集，而 t_{ij} 根据假设是 G 中最小的端限容量；$V[S_1]$ 也在所有分离 p 和 q 的割集的值中是最小的，因此 $t_{pq}=t_{ij}$。于是，经过行列调整，式(12-2-2)所示的端点容量矩阵的主分块划分是可能的：

$$T=\begin{bmatrix}T_a & T_1\\ T_1^t & T_b\end{bmatrix}\tag{12-2-5}$$

其中，T_a 由对应于 Ω_1 中的顶点的行和列组成，T_b 由对应于 $\bar{\Omega}_1$ 中的顶点的行和列所组成，并注意 T_1 中每一个 (r,s) 元素表示端限容量 t_{rs}。为此 T_1 中每个元素等于 t_{ij}。

设 $t_{i'j'}$ 是结果主子阵 T_a 和 T_b 中最小的元素。不失一般性，设 $t_{i'j'}$ 在 T_a 中。设

$$S_2=\mathscr{S}(\Omega_2\times\bar{\Omega}_2) \tag{12-2-6}$$

是$t_{i'j'}$的对应割集。则任一端点容量t_{uv}，$u\in(\Omega_2\cap\Omega_1)$，$v\in(\bar{\Omega}_2\cap\Omega_1)$，一定等于$t_{i'j'}$，这是因为，分离$u$和$v$的割集类中包含$S_2$，而据假设，$S_2$的值在这一类的所有割集的值中是最小的。现在，$T_a$的主分块有可能为

$$T=\left[\begin{array}{cc|c} T_{aa} & T_{a1} & \\ T_{a1}^t & T_{ab} & T_1 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{T_1^t} & T_b \end{array}\right] \tag{12-2-7}$$

其中T_{aa}由对应于$\Omega_2\cap\Omega_1$中顶点的行和列组成，T_{ab}由对应于$\bar{\Omega}_2\cap\Omega_1$中顶点的行和列组成。这样，$T_{a1}$的诸元素是相同的，并且在$T_a$的所有元素中是最小的。

类似地，我们可以挑选一个端限容量，它在结果主子阵T_{aa}，T_{ab}和T_b的所有元素中是最小的，使得我们可以应用主分块划分法。如此类推，直至所有的结果主子阵都只有一个元素为止。这个性质也是一个矩阵为端限容量矩阵的充分条件。

定理12-2-1 一个n_v阶的对称矩阵T是一个无向EWC网的端限容量矩阵，当且仅当我们可以得到这个矩阵的一个主分块，以及所有包含一个以上元素的结果主子阵的主分块。

证明： 从上面的讨论我们知道，矩阵T必然具有定理给出的性质，所以我们只需证明定理条件的充分性即可。即存在一种求出矩阵T的主分块，以及所有包含一个以上元素的结果主子阵的主分块的方法。现在，我们要证明，存在一个无向EWC网，它的端限容量矩阵就是所给的矩阵T。从主分块的定义可以看出，当对矩阵T_r作主分块划分时，即

$$T_r=\begin{bmatrix} T_{ra} & T_{r1} \\ T_{r1}^t & T_{rb} \end{bmatrix} \tag{12-2-8}$$

就是把与T_r的行对应的顶点集合分成两个集合，一个由与T_{ra}的行对应的顶点组成，另一个由与T_{rb}的行对应的顶点组成。因此，对于所给矩阵T所施行的一系列主分块划分，直至所有结果主子阵仅由对角元d组成，于是我们得到一个顶点集合类的序列。设这个集合类的序列是$\Gamma_0, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_{n_0-1}$。例如，对于已知矩阵$T$

$$T = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} d & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d & 3 & 2 \\ 1 & 3 & d & 2 \\ 1 & 2 & 2 & d \end{bmatrix} \end{array}$$

可以施行以下一系列主分块划分：

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|ccc} d & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & d & 3 & 2 \\ 1 & 3 & d & 2 \\ 1 & 2 & 2 & d \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|cc|c} d & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & d & 3 & 2 \\ 1 & 3 & d & 2 \\ \cline{2-4} 1 & 2 & 2 & d \end{array}\right] \end{array} \quad \left[\begin{array}{c|c|c|c} d & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & d & 3 & 2 \\ \hline 1 & 3 & d & 2 \\ \hline 1 & 2 & 2 & d \end{array}\right]$$

因此，顶点集合类序列是：

$$\Gamma_0 = \{(1,2,3,4)\}, \quad \Gamma_1 = \{(1),(2,3,4)\},$$
$$\Gamma_2 = \{(1),(2,3),(4)\}, \quad \Gamma_2 = \{(1),(2),(3),(4)\}$$

显然，Γ_k里恰有两个集合不在Γ_{k-1}中，而Γ_{k-1}里恰有一个集合不在Γ_k中。我们把Γ_k里的这两个集合称为生成集，而把Γ_{k-1}里不在Γ_k中的一个集合称为生成元。于是，我们可以这样说，除Γ_0和Γ_{n_0-1}外，在每一类Γ_p中，存在一个生成元和两个生成集，而Γ_0是由一个生成元组成的，Γ_{n_0-1}不含生成元。对于每一对生成集，就存在一组相同的端限容量，它们是从这两个生成集之一

的顶点到另一个顶点的。这些相同的端限容量就是由主分块划分而得到的两个子矩阵的全部元素。我们称这些端限容量中的任何一个为Γ_p的两个生成集的对应端限容量，$p=1, 2, \cdots, n_v-1$。例如，在上面给出的Γ_1中，集合（1）和（2，3，4）是生成集，它们的对应端限容量是1。在Γ_2中，（2，3）和（4）是生成集，它们的对应端限容量是2。在Γ_3中，（2）和（3）是生成集，它们的对应端限容量是3。

现在，我们就可以给出一个构造EWC网的方法了。这方法是从给定矩阵出发的，它要利用到$\Gamma_0, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_{n_v-1}$这一顶点集合类的序列，并须注意$n_v$是所给矩阵的列数。

设Ω_{11}和Ω_{12}是Γ_1的两个生成集。然后我们将Ω_{11}看作一个顶点而将Ω_{12}看作另一顶点，并在它们之间连一条边，其边容量等于这两个生成集的对应端限容量。其次，设Ω_{21}和Ω_{22}为Γ_2中两个生成集，Ω_{11}为Γ_1中的生成元。这就相当于把顶点Ω_{11}切割开，使Ω_{21}和Ω_{22}这两个生成集成为两个顶点。原来连接到顶点Ω_{11}的边可以与这两个新顶点Ω_{21}和Ω_{22}中任何一个相连。在这两个新顶点之间，我们连上一条边，其边容量等于Γ_2中两个生成集的对应端限容量。现在，整个步骤已经很明显了，这就是，把Γ_p中代表生成元的顶点切割成两个顶点v_{p1}和v_{p2}，用来表示Γ_{p+1}中的两个生成集；然后改变原来与顶点v_p关联的边的连接方法，使它与v_{p1}或v_{p2}关联，并在v_{p1}和v_{p2}之间连一条新的边，其边容量等于Γ_{p+1}中两个生成集的对应端限容量，$p=1,2,\cdots,n_v-1$。用这个步骤最终得到一个由n_v-1条边和n_v个顶点组成的EWC网。显然这个EWC网是一个连通的无向线图。因此，就其结构而言，这个EWC网是一个树。这意味着，每一个割集由一条边构成，并且容易看出，这个EWC网的端限容量矩阵等于所给的矩阵。

（证毕）

例12-2-2 从一个给定矩阵

$$T=\begin{array}{c}\\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1 & 2 & 3 & 4\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc} d & 1 & 1 & 1\\ 1 & d & 3 & 2\\ 1 & 3 & d & 2\\ 1 & 2 & 2 & d\end{array}\right]\end{array}$$

以及上面给出的类序列Γ_0, Γ_1, Γ_2, Γ_3，我们可以构造一个EWC网如下：

1．从$\Gamma_1=\{(1),(2,3,4)\}$，我们得到一个由一条边组成的EWC网，如图12-2-1(a)所示，其边容量为（1）和（2，3，4）的对应端限容量。

2．从$\Gamma_2=\{(1),(2,3),(4)\}$，我们将顶点（2，3，4）切割成两个顶点（2，3）和（4），并在这两个顶点之间添加一条边，其边容量等于（2，3）和（4）的对应端限容量，如图12-2-1(b)所示。

3．从$\Gamma_3=\{(1),(2),(3),(4)\}$，我们将顶点（2，3）切割成两个顶点（2）和（3），并在这两个顶点之间添加一条边，其边容量等于Γ_3中生成集的对应端限容量．所得的EWC网如图12-2-1(c)所示，它的端限容量矩阵等于所给的矩阵。

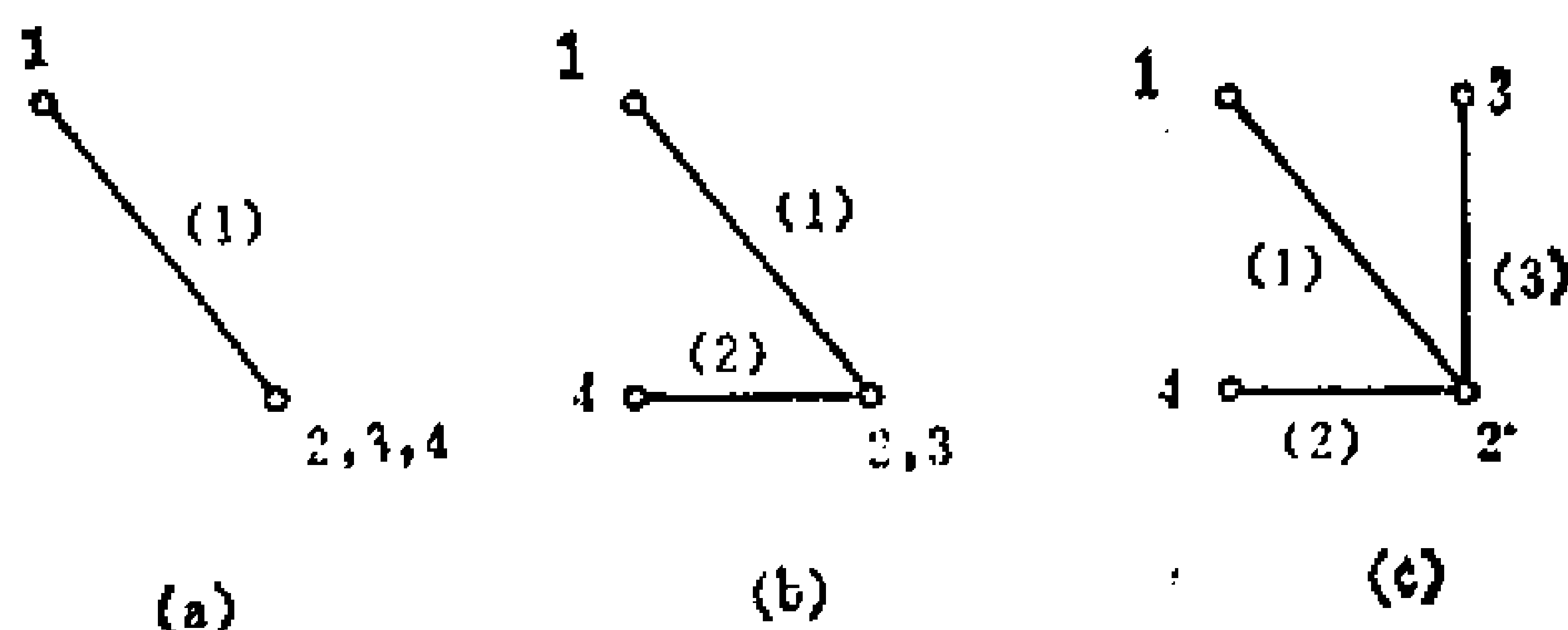


图12-2-1　构造一个EWC网

在用Γ_p中的生成元Ω_p和Γ_{p+1}中的生成集Ω_a与Ω_b来构造一个EWC网的过程中，我们只把顶点Ω_p切割成两个顶点Ω_a和Ω_b。

除了切割顶点以外，如果把与顶点Ω_p连接的边也分成两组，我们就可以得到一个不同的EWC网。考虑图 12-2-2 中的顶点 Ω_p，边 e_1，e_2，$\cdots$，e_k 与它连接。假定我们把顶点 Ω_p 切割成两个顶点 Ω_a和Ω_b，同时把边e_q分成e_{q1}和e_{q2}，它们的边容量等于$c_q/2$，其中c_q是边e_q的边容量，$q=1, 2, \cdots, k$，如图12-2-3所示。

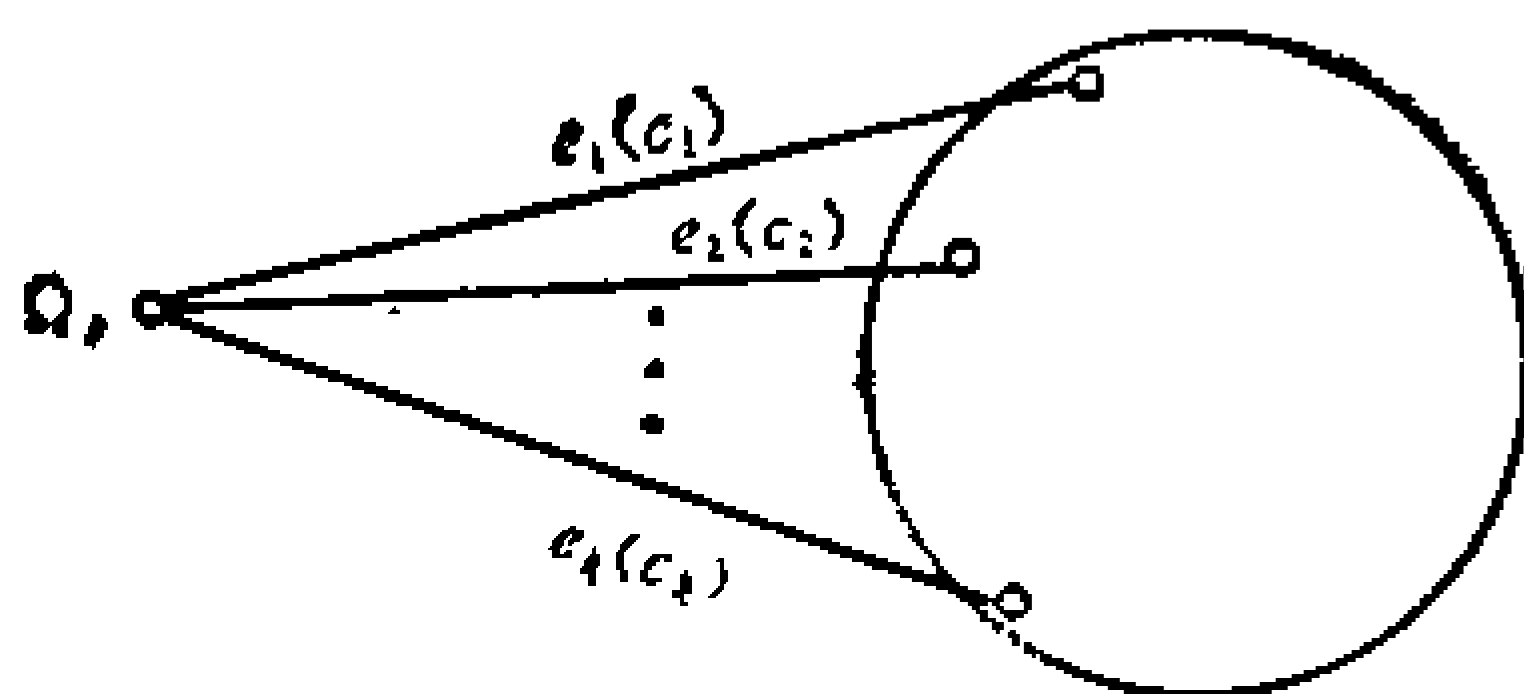


图12-2-2　一个带顶点Ω_p的EWC网

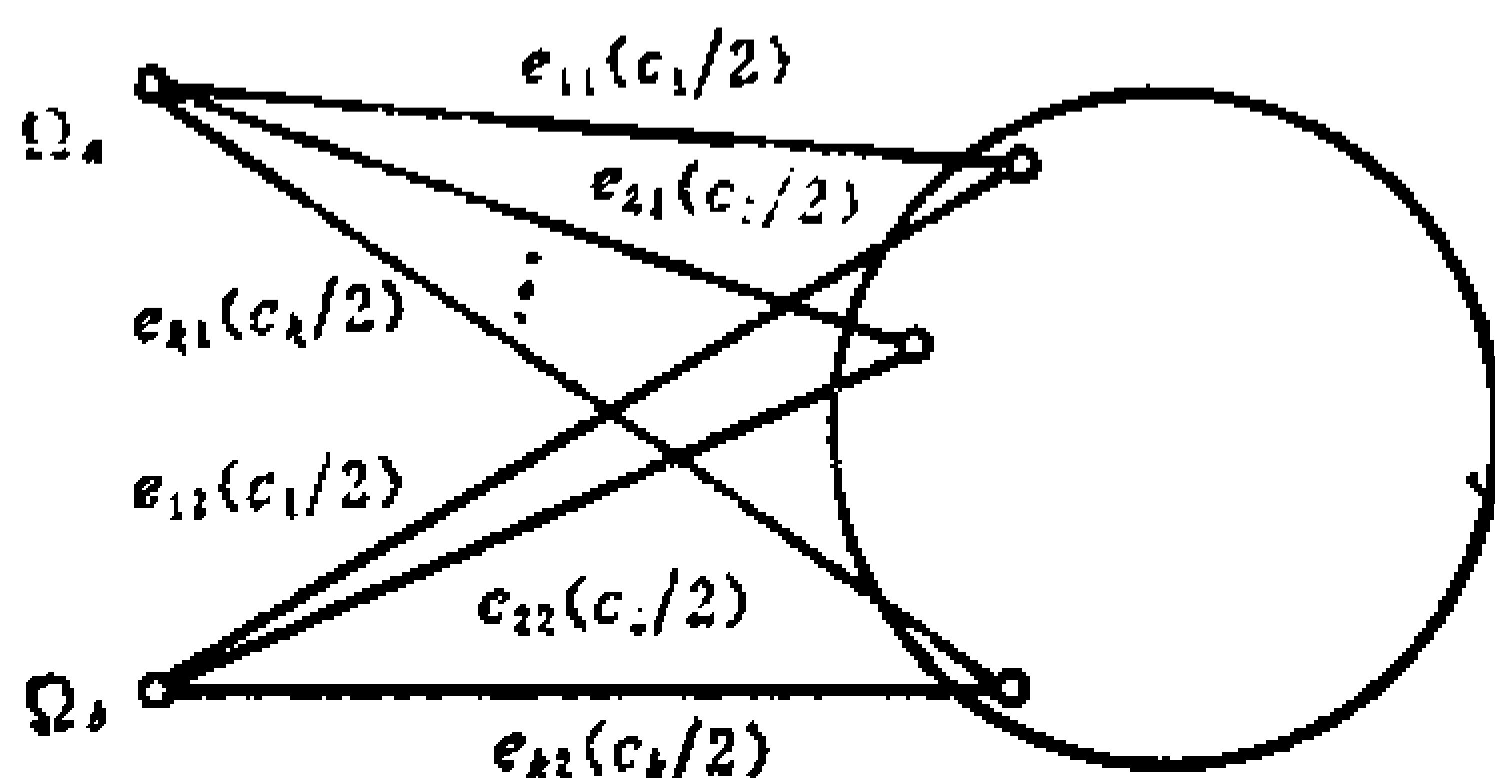


图12-2-3　一个带顶点Ω_a及Ω_b的EWC网

然后，我们在这两个新顶点之间添加一条边 e'，e' 的边容量c'不等于生成集Ω_a和Ω_b的对应端限容量 t，而等于

$$t-\sum_{q=1}^{k}\frac{c_q}{2}$$

例12-2-3　假定所给的矩阵就是例 12-2-2 中的矩阵，我们修改构造EWC网的步骤如下：

1．在顶点（1）和（2，3，4）之间添加一条边e_1，其边

容量等于Γ_1中生成集（1）和（2，3，4）的对应端限容量，如图 12-2-4(a) 所示。

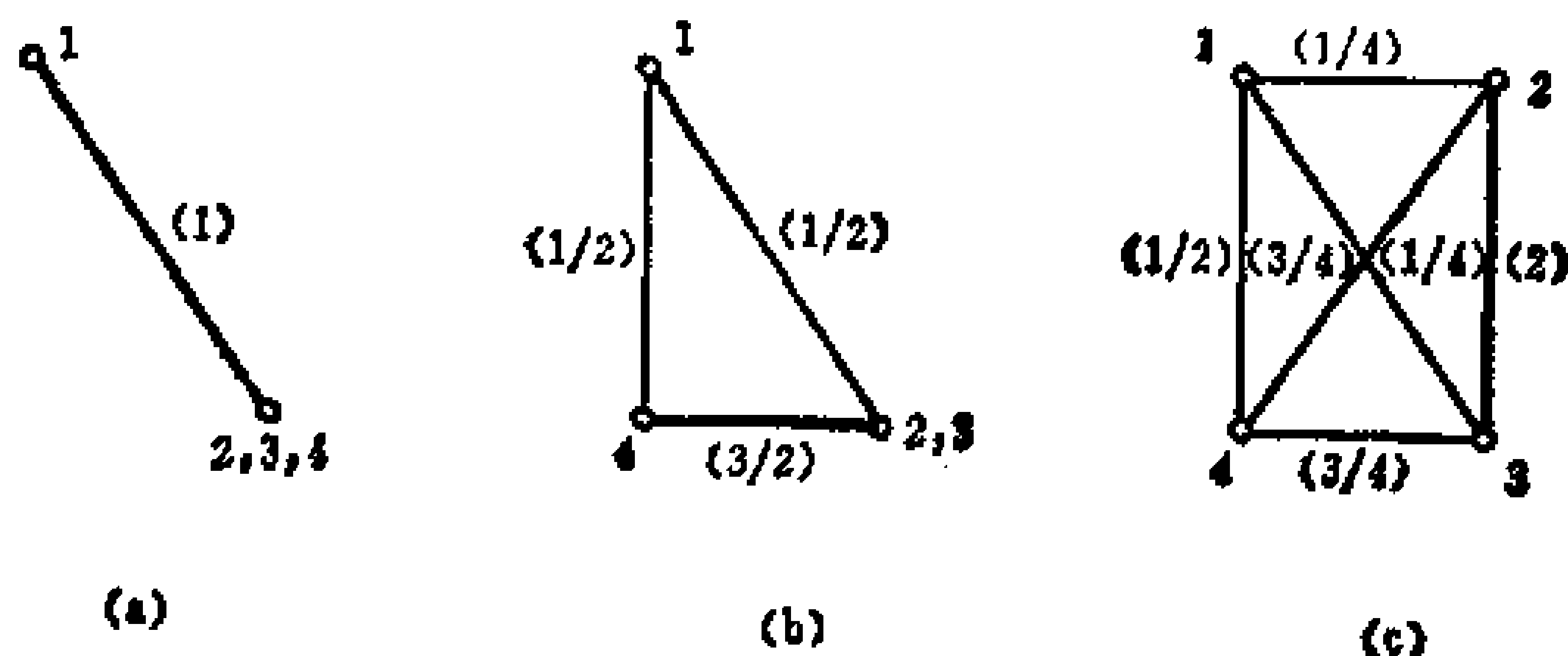


图12-2-4 构造一个EWC网的步骤

2. 把顶点（2，3，4）切割成两个顶点（2，3）和（4），因为Γ_2中的生成集为（2，3）和（4）。同时把边e_1分成e_{11}和e_{12}，它们的边容量等于e_1边容量的一半。然后，在顶点（2，3）和（4）之间添加一条边e_2，其边容量等于（2，3）和（4）的对应端限容量减去1/2，如图 12-2-4(b) 所示。

3. 把顶点（2，3）切割成两个顶点（2）和（3），同时将边e_{12}和e_2分成e_{121}，e_{122}，e_{21}和e_{22}，这些边中每一条的边容量都等于对应边的边容量的一半。然后添加边e_3，其边容量等于生成集（3）和（4）的对应端限容量减去与顶点（2）相连的各边的边容量总和的一半，如图 12-2-4(c) 所示。所得的结果即为一个EWC网，其端限容量矩阵等于所给的矩阵。

从上面的例子我们可以看出，可以有很多EWC网，其端限容量矩阵都等于所给的矩阵。因此，规定一些指标来表明这些EWC网的差别是合理的。这些指标之一是

$$I=\sum_{e_p\in G}\mathscr{W}_p c_p \tag{12-2-9}$$

其中c_p是边e_p的边容量，求和是对传输网G中所有的边容量进行

的。$\mathscr{W}_p$称为边e_p边容量的单位价值。当$\mathscr{W}_p=1$（对所有的p）时，指标I变成

$$I_u=\sum_{c_p\in G}c_p \tag{12-2-10}$$

假定我们对相同端限容量矩阵的全部EWC网计算指标I_u，则将有一个EWC网的指标I_u为最小。这就意味着在考虑单位价值的条件下，这个EWC网的构造费用最低廉。找出最廉价的EWC网的一种方法是求出指标I_u的下界I_0，并构造一个EWC网，使其指标I_u等于I_0。为此，我们定义I_0为

$$I_0=\min\{\text{所有满足给定端限容量矩阵的EWC网的}I_u\} \tag{12-2-11}$$

为了求得I_0，我们在EWC网G中取一个顶点r。设t_{rj}是端限容量t_{rq}中最大的一个（对所有的顶点$q\neq r$）。因为我们可以分配一个流ψ_{rj}，它等于G中来自顶点r的t_{rj}，故

$$\psi_{rj}\leqslant V[S(r)] \tag{12-2-12}$$

其中$S(r)$是与顶点r有关的关联集（见2—1节）。换句话说，为了使一个EWC网G能够负载流ψ_{rj}，与顶点r相连的边的边容量之和必须至少等于ψ_{rj}。

设$r=1, 2, \cdots, n$是一个EWC网的全部顶点，则我们可以看出，G中全部边容量的和是

$$\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}V[S(r)]$$

或者

$$I_u=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}V[S(r)] \tag{12-2-13}$$

考虑端限容量矩阵T。设t_{ri_r}是T中第r行最大的端限容量，则由式(12-2-12)，对任一满足T的EWC网就有

$$t_{ri_r} \leqslant V[S(r)] \quad (12\text{-}2\text{-}14)$$

设I_s定义为

$$I_s = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} t_{ri_r} \quad (12\text{-}2\text{-}15)$$

由式(12-2-13)和式(12-2-14)，我们可以看出，任何一个（满足给定端限容量矩阵T）EWC网的指标I_u不可能小于I_s也就是说，

$$I_s \leqslant I_0 \leqslant I_u \quad (12\text{-}2\text{-}16)$$

假定存在一个EWC网G_0，对于G_0中所有的顶点r，来自顶点r最大的端限容量（即对于G_0中所有的顶点q，t_{rq}中最大的端限容量）等于与顶点r有关的关联集$S(r)$的值。故对所有的顶点r，式(12-2-14)变为

$$t_{ri_r} = V[S(r)] \quad (12\text{-}2\text{-}17)$$

于是G_0的I_u等于I_0。问题在于，这样的EWC网是否存在。答案是肯定的。事实上，用上面讨论的修改步骤所得的EWC网G（它是一个完全图）对于所有的顶点都能满足式(12-2-17).这可以用如下的方法证明。首先注意到，对于任何一个顶点r，在系列$\Gamma_0, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_{n-1}$中存在类$\Gamma_2$，使得两个生成集里有一个仅由顶点$r$组成。设$\Omega_q$是另一个生成集，$t_q$是生成集$(r)$和$\Omega_q$的对应端限容量。

现在考虑用修改的过程得到EWC网的步骤，这就是，对于网络中任一顶点v，就存在一个将顶点v从顶点集合中分离出来的步骤q。因此我们可以假设图12-2-5中的EWC网就是由步骤q-1得到的网络，其中G_2与生成元Ω_{q-1}对应。注意$\Omega_{q-1} = (r) \cup \Omega_q$，从而顶点$r$是在步骤$q$中从$\Omega_{q-1}$中分离出来的，如图12-2-6所示。为了完成步骤$q$，我们给连接在顶点$r$和集合$\Omega_q$之间的边赋一个容量，使得与顶点$r$有关的关联集

$S(r)$ 的值等于 t_q。其余的步骤都是把集合 Ω_q 或 G_1 的顶点分开，它们都不会改变关联集 $S(r)$ 的值。

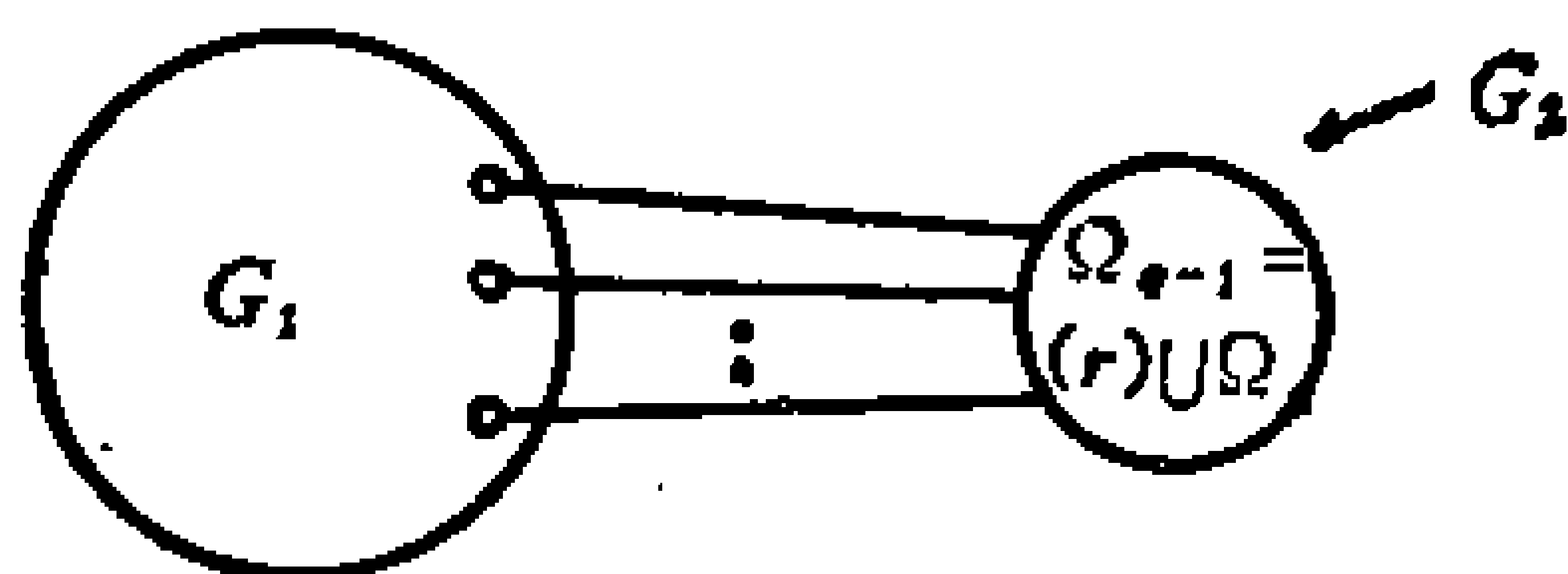


图12-2-5　在步骤 q-1 时的EWC网

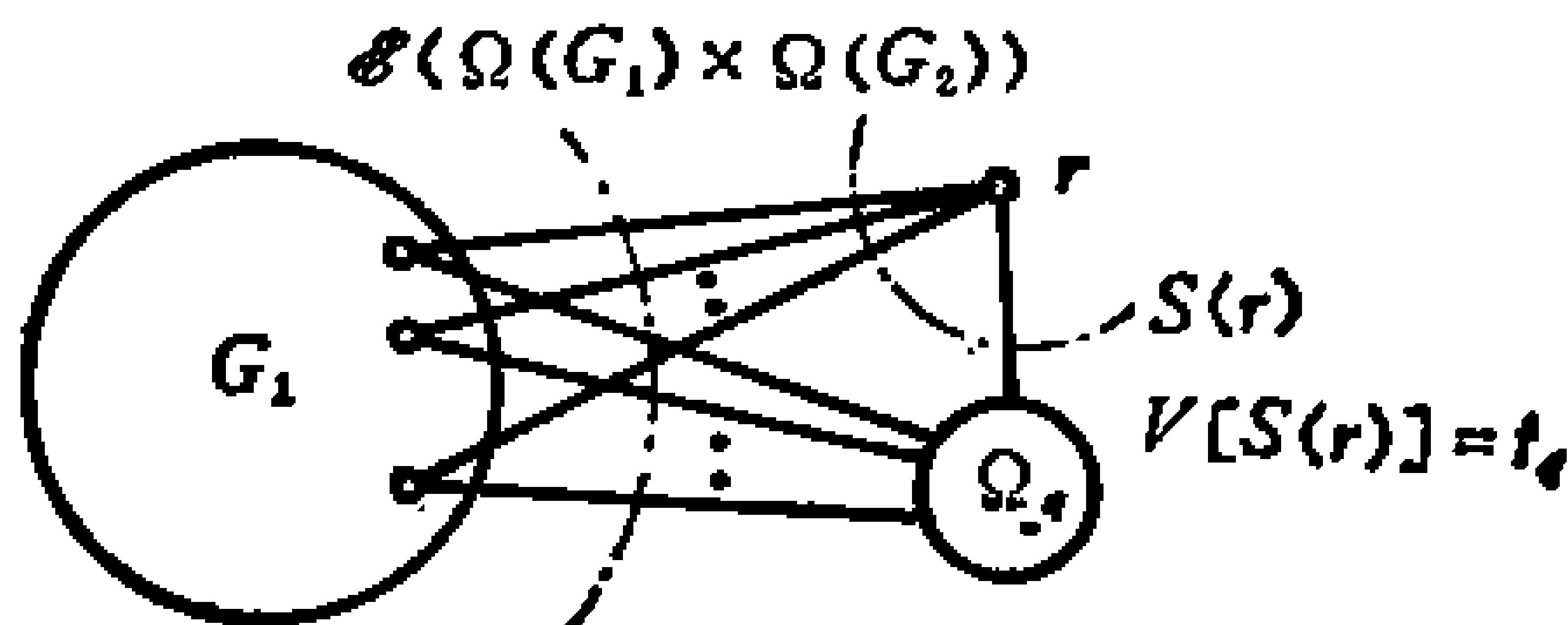


图12-2-6　在步骤 q 时的EWC网

端限容量 t_q 在来自顶点 r 的所有端限容量中必定是最大的，因为据式（12-2-12），要分配比 t_q 更大的流是不可能的。于是我们可以看出：

$$t_q = V[S(r)] \qquad (12\text{-}2\text{-}18)$$

可见，上述结果对于 G 中任何顶点都适用。因此，由修改步骤所得的 G 的 I_u 等于 I_s，同时用式（12-2-16）也就证明了 $I_0 = I_s$。

例12-2-4　例12-2-2给出的端限容量矩阵 T 是

$$T = \begin{array}{c} \\ t \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} d & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d & 3 & 2 \\ 1 & 3 & d & 2 \\ 1 & 2 & 2 & d \end{bmatrix} \end{array}$$

每一行的最大端限容量如下表所示：

行	最大端限容量
1	1
2	3
3	3
4	2

所有这些最大端限容量的和是 9 ，因此

$$I_0=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{4}t_{r_1r}=\frac{9}{2}$$

在例 12-2-3 中，我们已经用修改步骤得到图 12-2-4 (c) 中的 EWC网。这个EWC网满足以上端限容量矩阵。这个网络的指标 I_n 是

$$I_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+2=\frac{9}{2}$$

它等于 I_0

12-3 端限容量之间的关系

端限容量的对应割集有一个非常有趣的性质。设 i，j，k，m 是一个无向 EWC 网的顶点。设 $S_1=\mathscr{S}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$ 是端限容量 t_{ij} 的对应割集，而 $S_2=\mathscr{S}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_2)$ 是端限容量 t_{km} 的对应割集。又设

$$\Omega_1=(\Omega_i,\ \Omega_m) \tag{12-3-1}$$

$$\bar{\Omega}_1=(\Omega_k,\ \Omega_j) \tag{12-3-2}$$

$$\Omega_2=(\Omega_i,\ \Omega_k) \tag{12-3-3}$$

$$\bar{\Omega}_2=(\Omega_j,\ \Omega_m) \tag{12-3-4}$$

其中 $i\in\Omega_i$，$j\in\Omega_j$，$k\in\Omega_k$，$m\in\Omega_m$，如图12-3-1所示。因此

$$S_1=\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_k)\cup\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_j)\cup\mathscr{E}(\Omega_m\times\Omega_k)\cup\mathscr{E}(\Omega_m\times\Omega_j) \tag{12-3-5}$$

$$S_2=\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_m)\cup\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_j)\cup\mathscr{E}(\Omega_k\times\Omega_m)\cup\mathscr{E}(\Omega_k\times\Omega_j) \tag{12-3-6}$$

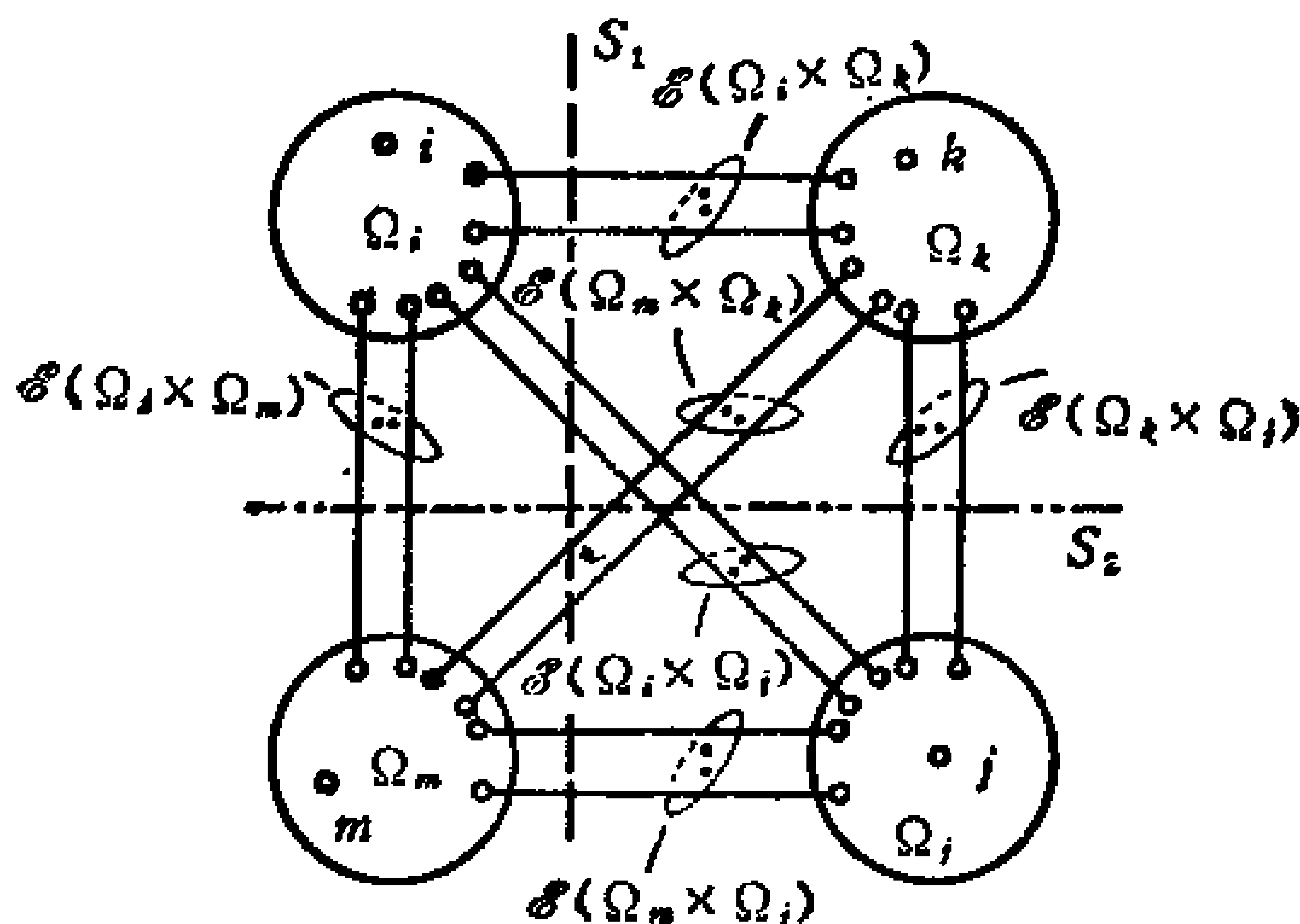


图12-3-1　由Ω_i，Ω_j，Ω_k，Ω_m组成的EWC网

当两个割集处于这种情况时（如图 12-3-1 所示），我们说这两个割集互相交叉。换句话说，当我们删去两个割集的所有边时，若最大连通子图的数目增加了二个以上，我们就说这两个割集互相交叉。为了简便，我们定义

$$V[\mathscr{E}(\Omega_p\times\Omega_q)]=\sum_{e_r\in\mathscr{E}(\Omega_p\times\Omega_q)}c_r \tag{12-3-7}$$

也就是说，$V[\mathscr{E}(\Omega_p\times\Omega_q)]$等于集合中所有边的边容量之和。

因为 S_1 是端限容量 t_{ij} 的对应割集，所以当从顶点 i 到顶点 j 分配到最大流 ψ_{ij}（等于 t_{ij}）时，S_1 就是一个基本饱和割集。

因此，无论 S_2 在 ψ_{ij} 的这一分配方式下是否是基本饱和割集，我们都有

$$V[\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_k)]+V[\mathscr{E}(\Omega_m\times\Omega_k)]\leqslant V[\mathscr{E}(\Omega_k\times\Omega_j)] \tag{12-3-8}$$

故

$$V[\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_k)]\leqslant V[\mathscr{E}(\Omega_k\times\Omega_j)] \tag{12-3-9}$$

同理

$$V[\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_m)]\geqslant V[\mathscr{E}(\Omega_m\times\Omega_j)] \tag{12-3-10}$$

另一方面，当我们从顶点 k 到顶点 m 分配最大流 ψ_{km}（它等于 t_{km}）时，S_2是一个基本饱和割集，所以我们有

$$V[\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_k)]\geqslant V[\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_m)] \tag{12-3-11}$$

以及

$$V[\mathscr{E}(\Omega_k\times\Omega_j)]\leqslant V[\mathscr{E}(\Omega_m\times\Omega_j)] \tag{12-3-12}$$

因此，由式（12-3-9），(12-3-10)，(12-3-11)，(12-3-12)，我们有

$$\begin{aligned}V[\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_k)]&\leqslant V[\mathscr{E}(\Omega_k\times\Omega_j)]\leqslant V[\mathscr{E}(\Omega_m\times\Omega_j)]\\&\leqslant V[\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_m)]\leqslant V[\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_k)]\end{aligned} \tag{12-3-13}$$

当S_1和 S_2 相互交叉时，这些式子必定相等，并且有

$$V[\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_j)]=V[\mathscr{E}(\Omega_m\times\Omega_k)]=0 \tag{12-3-14}$$

注意，如果式（12-3-13）中的等式满足，而且式（12-3-14）也满足，由式（12-3-5）和（12-3-6），则 $t_{ij}=t_{km}$。然而在这种情况下，由图12-3-1我们可以看出，如果我们不用 S_2 作为 t_{km} 的对应割集，也可以用

$$S'_2=\mathscr{E}(\Omega_i\times\Omega_k)\cup\mathscr{E}(\Omega_j\times\Omega_k) \tag{12-3-15}$$

作 t_{km} 的对应割集。注意在这个条件下

$$\mathscr{E}(\Omega_m\times\Omega_k)=\emptyset$$

因此可以得到下面的引理。

引理12-3-1 设S_1是端限容量t_{ij}的对应割集，则对于任何端限容量t_{km}，存在t_{km}的一个对应割集，使这个割集与S_1不互相交叉。

有了这个结果，我们就可以来讨论端限容量的一个有趣的性质。这就是下面定理给出的三角关系。

定理12-3-1 设i，j，k是一个EWC网络中的顶点，则

$$t_{ij} \geqslant \min(t_{ik}, t_{kj}) \qquad (12\text{-}3\text{-}16)$$

证明： 设S_1是t_{ij}的对应割集，此处$S_1 = \mathscr{S}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$，$i \in \Omega_1$，$j \in \bar{\Omega}_1$。设$k \in \Omega_1$，如图12-3-2(a)所示。根据上面的引理，存在一个t_{kj}的对应割集S'，使得S'和S_1不互相交叉。现在，如图12-3-2(b)所示，若$S_1 = S'$的条件不满足，那么S'必定分离顶点i和k，而当$S_1 = S'$时，定理的证明是显然的。因此，在分配等于t_{kj}的最大流时，为了使S'成为基本饱和割集，必有：

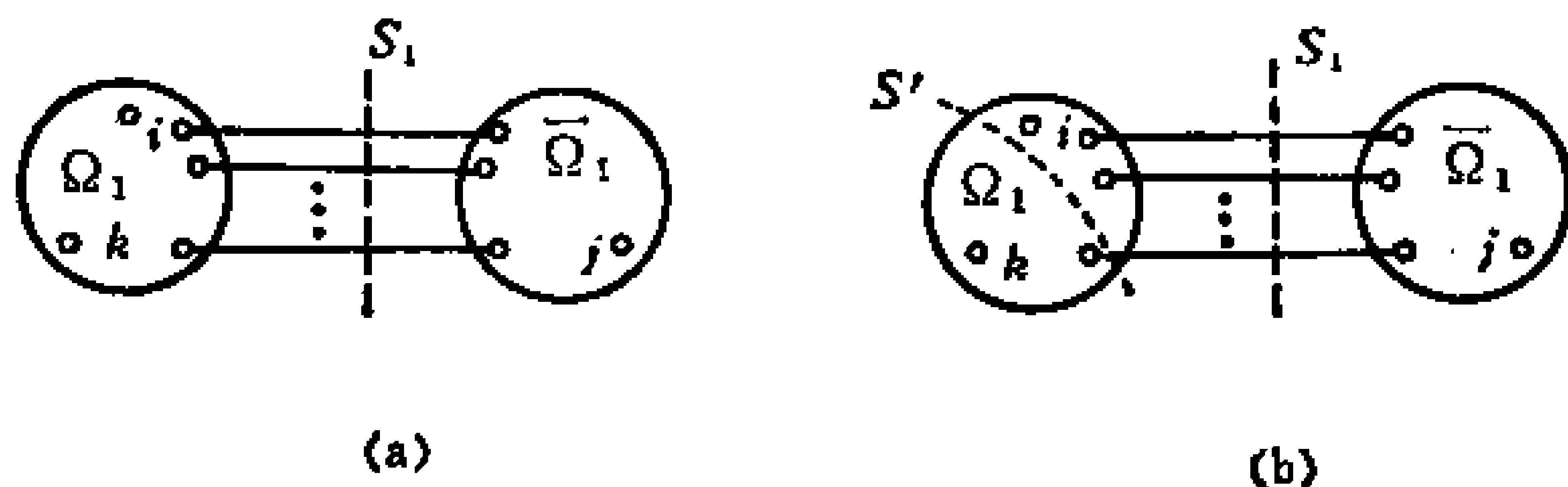


图12-3-2 顶点i, k, j的位置

$$V[S'] \leqslant V[S_1] \qquad (12\text{-}3\text{-}17)$$

或

$$t_{kj} \leqslant t_{ij} \qquad (12\text{-}3\text{-}18)$$

因而式(12-3-16)是正确的。

当$k \in \bar{\Omega}_1$时，如图12-3-3(a)所示。t_{ik}的对应割集S''不与S_1交叉，且一定分离顶点j和k，这是由于假设$S'' \neq S_1$，故S''必处于图12-3-3(b)所示的位置。因而，在流ψ_{ik}（等于t_{ik}）的

分配下，为使S''是基本饱和割集，必有

$$V[S'']\leqslant V[S_1] \tag{12-3-19}$$

或

$$t_{ik}\leqslant t_{ij} \tag{12-3-20}$$

因此，式(12-3-16)是正确的。 （证毕）

容易看出，定理12-2-1和定理12-3-1是等价的。

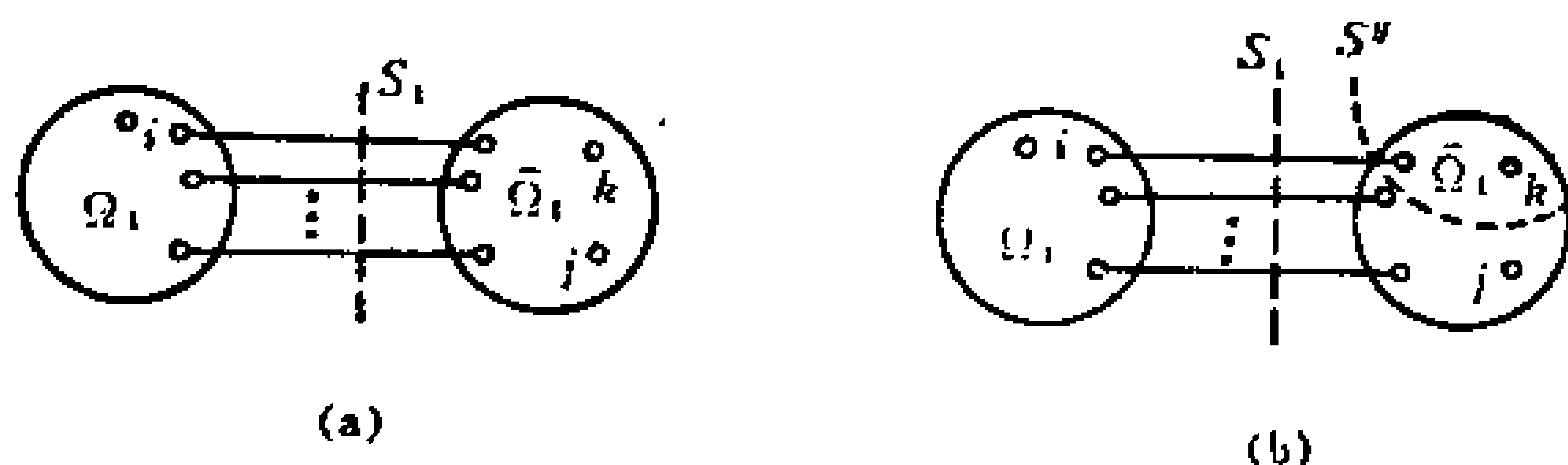


图12-3-3 顶点i，j，k的位置

12-4 割集的W类

考虑由n_v个顶点构成的连通EWC网G。设$S_1, S_2, \cdots, S_{n_v-1}$是分离$i$和$j$的线性无关割集。假定我们将流$\psi_{ij}$分配给$G$，使这些割集$S_p(p=1, 2, \cdots, n_v-1)$都变成基本饱和割集，那么很明显，存在着一个流$\psi_{r_{ij}}$的集合，它构成流$\psi_{ij}$，并且每条路径$P_{r_{ij}}$（其中的流$\psi_{r_{ij}}$非零）通过每一个割集$S_p$正好一次*。一般地，在一个EWC网中，总有一类线性无关割集，如果我们只把非零流$\psi_{r_{ij}}$分配给路径$P_{r_{ij}}$，而这些路径都通过每一个割集正好一次，那么就可以得到一个从i到j的最大流。如果一个这样的类不是另一个这样的类的子类，这样的类就是割集的W类。我们可以用下面的步骤来得到割集的W类。$S_{11}, S_{12}, \cdots, S_{1k_1}$等割集的类是

* "一条路径P通过一个割集S正好一次"，这句话的意思是说$P\cap S$正好有一条边。

这样的类，它们的值 $\sum_{e_p \in s} c_p$ 在分离 i 和 j 的全部割集的值中是最小的。注意，我们现在只考虑分离 i 和 j 的割集。假定在割集 $S_{11}, S_{12}, \cdots, S_{1m_1}, \cdots, S_{1k_1}$ 中，$S_{11}, S_{12}, \cdots, S_{1m_1}$ 是线性无关的，显然当把一个从 i 到 j 的最大流赋给 G 时，这 k_1 个割集就变成了基本饱和割集。

我们用 α^1 来乘 EWC 网 G 的所有这种边的边容量，这种边是属于割集 $S_{1p}(p=1, 2, \cdots, m_1)$ 中任一个割集的，这样就修改了网络 G。设所得的EWC网是 $G(\alpha^1)$。然后我们选择满足 $1 \leqslant \alpha^1 < \infty$ 的最小的 α^1，从而得到一些新的割集 $S_{21}, S_{22}, \cdots, S_{2k_2}$，使它们的值在 $G(\alpha^1)$ 的所有分离 i 和 j 的割集的值中是最小的。设这个值是 α_0^1，而这个 $\alpha^1 = \alpha_0^1$ 的EWC网是 $G(\alpha_0^1)$。注意，在 $G(\alpha_0^1)$ 中，$S_{11}, S_{12}, \cdots, S_{1k_1}$ 等割集的值也是最小的。设割集 $S_{21}, S_{22}, \cdots, S_{2m_2}$ 和割集 $S_{11}, S_{12}, \cdots, S_{1m_1}$ 是 $S_{11}, \cdots, S_{1k_1}, S_{21}, \cdots, S_{2m_2}, \cdots, S_{2k_2}$ 中线性无关的割集。

再来重复这个步骤：用 α^2 来乘所考虑的割集的所有边的边容量，然后选取最小值 α_0^2，由它产生一些新的割集，这些新割集的值在所得网络 $G(\alpha_0^1 \alpha_0^2)$ 的全部分离 i 和 j 割集的值中是最小的。

现在，一般的模式已经很清楚了。设

$$\{S_0\} = \{S_{11}, \cdots, S_{1m_1}, S_{21}, \cdots, S_{2m_2}, \cdots, S_{p-11}, \cdots, S_{p-1m_{p-1}}\} \tag{12-4-1}$$

假定 $G(\alpha_0^1 \alpha_0^2 \cdots \alpha_0^{p-1})$ 中的 $S_{p1}, S_{p2}, \cdots, S_{pk_p}$ 在 $\alpha^{p-1} = \alpha_0^{p-1}$ 时，是该EWC网的全部分离 i 和 j 的割集中其值最小的割集，并且在 $\alpha^{p-1} = \alpha_0^{p-1}$ 时没有值更小的割集。设 $S_{p1}, \cdots, S_{pm_p}(m_p \leqslant k_p)$ 以及 $\{S_0\}$ 中的割集在所有被考虑的割集中是线性无关的，则我们把 $S_{p1}, \cdots, S_{pm_p}$ 也包括在 $\{S_0\}$ 类中。

我们继续进行刚才描述的步骤，直至下面两种情况之一出现：

情况 1 在 $G(\alpha_0^1\cdots\alpha_0^{p-1})$ 中不存在既能分离 i 和 j，但又不能由 $\{S_0\}$ 中割集的线性组合得到的割集。这时，割集的W类即为式(12-4-1)中的$\{S_0\}$。

情况 2 至少存在一个 $G(\alpha_0^1\cdots\alpha_0^{p-1})$ 中能分离 i 和 j，却不能由式(12-4-1)中 $\{S_0\}$ 内割集的线性组合得到的割集。要出现情况 2，就必须不存在这样的 α^{p-1}，$(1\leqslant\alpha^{p-1}<\infty)$，它在 $G(\alpha_0^1\cdots\alpha_0^{p-1})$ 中至少产生一个关于式(12-4-1)中的 $\{S_0\}$ 线性无关的新割集 S_{pr}，而该新割集的值在分离 i 和 j 的割集的值中是最小的。假定 $G(\alpha_0^1\cdots\alpha_0^{p-1})$ 中的割集 S_{p1}，S_{p2}，$\cdots$，S_{pk_p} 的值对于 α_0^{p-1} $(1\leqslant\alpha_0^{p-1}<\infty)$ 的任何一个值都不可能是最小的，又假定在 S_{11}，S_{12}，$\cdots$，S_{1k_1}，S_{21}，$\cdots$，S_{p-11}，$\cdots$，$S_{p-1k_{p-1}}$，S_{p1}，$\cdots$，S_{pk_p} 中，S_{p1}，S_{p2}，$\cdots$，S_{pm_p} 以及 $\{S_0\}$ 中的割集是线性无关的，则关于顶点 i 和 j 的割集的W类由 $\{S_0\}$ 中的所有割集和割集 S_{p1}，S_{p2}，$\cdots$，S_{pm_p} 组成。

为了说明确定割集的W类的方法，考虑图 12-4-1 中的EWC网。我们可以看出，在分离 i 和 j 的所有割集中，只有割集$S_{11}=(a,b)$ 的值最小。把 a，b 边的边容量乘以 $\alpha_0^1=2$，我们就得到一个新割集 $S_{21}=(c,e)$，它的值在 $G(\alpha_0^1=2)$ 中是最小的，如图 12-4-1(b) 所示。将 $G(\alpha_0^1)$ 中S_{11}和 S_{21} 各边的边容量乘以α^2，并置 $\alpha_0^2=3$，我们得到 $G(\alpha_0^1=2,\ \alpha_0^2=3)$，如图 12-4-1(c) 所示。现在，存在一个新的割集 $S_{31}=(a,d,e)$，它的值在目前所有可用的割集中是最小的。前面说过，我们只讨论分离顶点 i 和 j 的割集。因此，关于 i 和 j 的割集的W类由 (a,b)，(a,d,e)，(c,e) 组成

以下定理给出了割集的W类和流 ψ_{ij} 之间的一个明显关系。

定理12-4-1 对于一个给定的 EWC 网G，存在分离 i 和 j 的一类线性无关割集，以及一个从 i 到 j 路径的类 $\{P_r\}$，其中每一条路径通过这个割集类中每个割集一次，从而可用分配非零流

给 $\{P_r\}$ 中的路径的方法，给出任意一个不超过端限容量 t_{rj} 的可行流 ψ_{ij}。

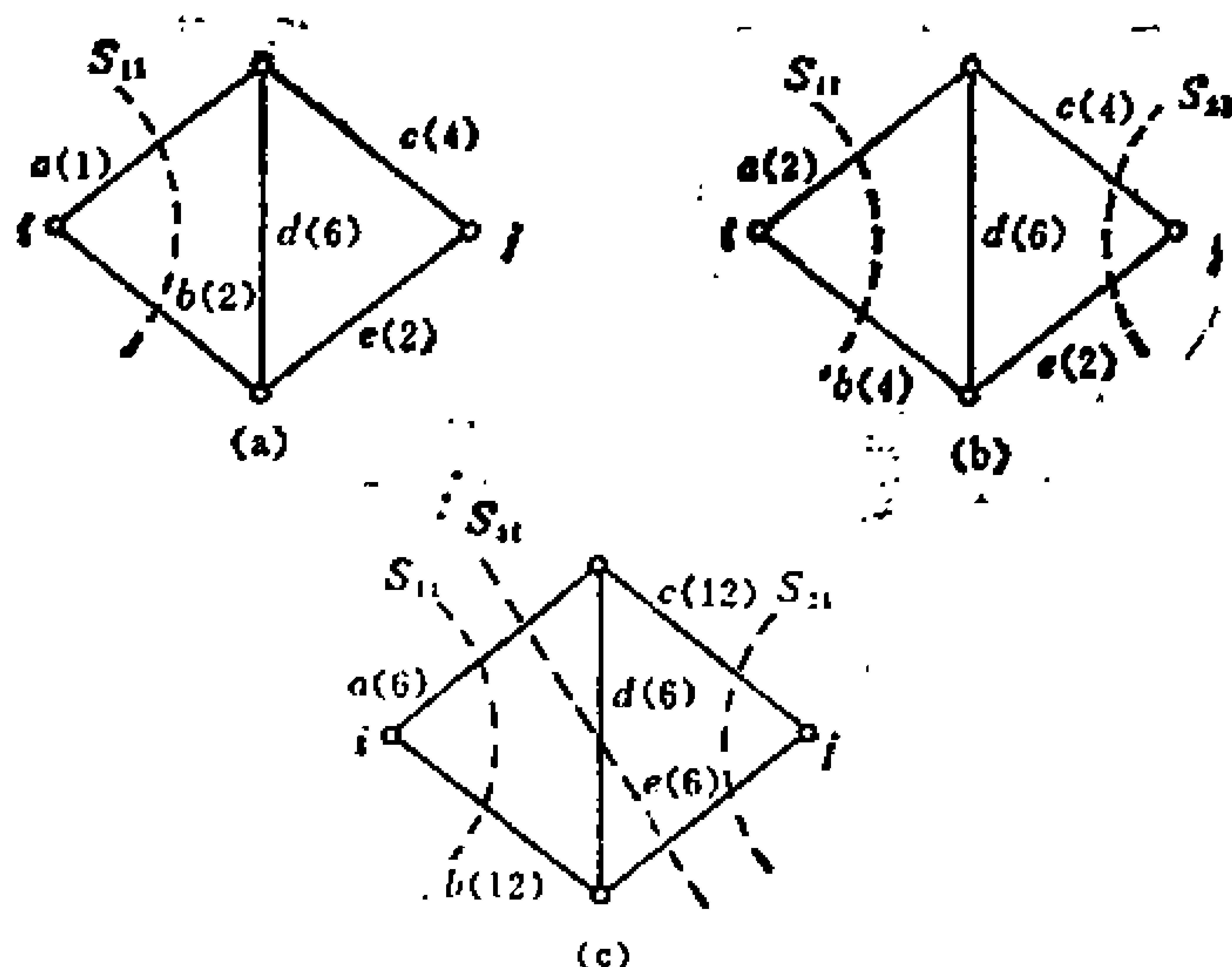


图12-4-1　EWC 网

(a) G；(b) $G(\alpha_0^1)$；(c) $G(\alpha_0^1\ \alpha_0^2)$

证明：　我们考虑前面描述的割集的W类和从所给 EWC 网 G 导出的修改网络 $G(\alpha_0^1\cdots\alpha_0^{p-1})$，有两种可能出现的情况。

情况 1　在这种情况下，W类中的割集就是式（12-4-1）中 $\{S_0\}$ 的割集。在$G(\alpha_0^1\cdots\alpha_0^{p-1})$中，当我们分配一个最大流$\psi'_{ij}$时，$W$类中所有的割集都是基本饱和割集。因此，存在着流 ψ'_{ij} 的一个集合，它用这样的方法给出 $G(\alpha_0^1\cdots\alpha_0^{p-1})$ 中从 i 到 j 的最大流ψ'_{ij}，以致带有非零流的每一路径通过每个割集正好一次。设 $\psi'_{ij}(e)$ 是与流 ψ'_{rij} 的集合对应的边流集合。用

$$A=\alpha_0^1\alpha_0^2\cdots\alpha_0^{p-1} \tag{12-4-2}$$

去除每个这样的路径流与用A去除分配给每条边的流是等效的。

因此，边 e 的流变成 $\psi'_{ij}(e)/A$。另一方面，G中任一条边的边容量不小于修改网络 $G(\alpha_0^1\cdots\alpha_0^{p-1})$，中边的边容量乘以$1/A$。这样，路径流$\psi'_{rij}/A$ 的集合可以分配给 G。很明显，这就在G中给出了一个从 i 到 j 的最大流。要得到其他任何一个从 i 到 j 的流，给每个流分配 ψ_{ij}/A 的K倍即可（这里 $0\leqslant K\leqslant1$）。因此对于这种情况定理为真。

情况 2　当割集的W类包含不属于式（12-4-1）的 $\{S_0\}$ 中的割集 $S_{p1},S_{p2},\cdots,S_{pm_p}$ 时，在 $G(\alpha_0^1\cdots\alpha_0^{p-2})$ 中至少存在一条边，其边容量和原来的网络 G 的边容量相同。设这些边是 $e_1,e_2,\cdots,e_q$，又设 $\bar{G}(\alpha_0^1\cdots\alpha_0^{p-2})$ 是从 $G(\alpha_0^1\cdots\alpha_0^{p-2})$ 中移去这些边得到的EWC网。那么，在 $\bar{G}(\alpha_0^1\cdots\alpha_0^{p-2})$ 中，在同 S_{p-11}，S_{p-12}，$\cdots$，$S_{p-1m_{p-1}}$变换相同的条件下，与 S_{p1}，S_{p2}，$\cdots$，S_{pm_p} 对应的割集变成基本饱和割集，这是因为，要从G得到$\bar{G}$（$\alpha_0^1\cdots\alpha_0^{p-2}$），在 S_{p1}，$\cdots$，S_{pm_p} 中凡是未用 α^{p-2} 乘的每条边都要移走。因此，就 $\bar{G}(\alpha_0^1\cdots\alpha_0^{p-2})$ 而言，可以应用情况 1。因为分配给 $\bar{G}(\alpha_0^1\cdots\alpha_0^{p-2})$ 中的路径的一类流也可以分配给 G 中的同一路径，故对这种情况定理为真。　　　　（证毕）

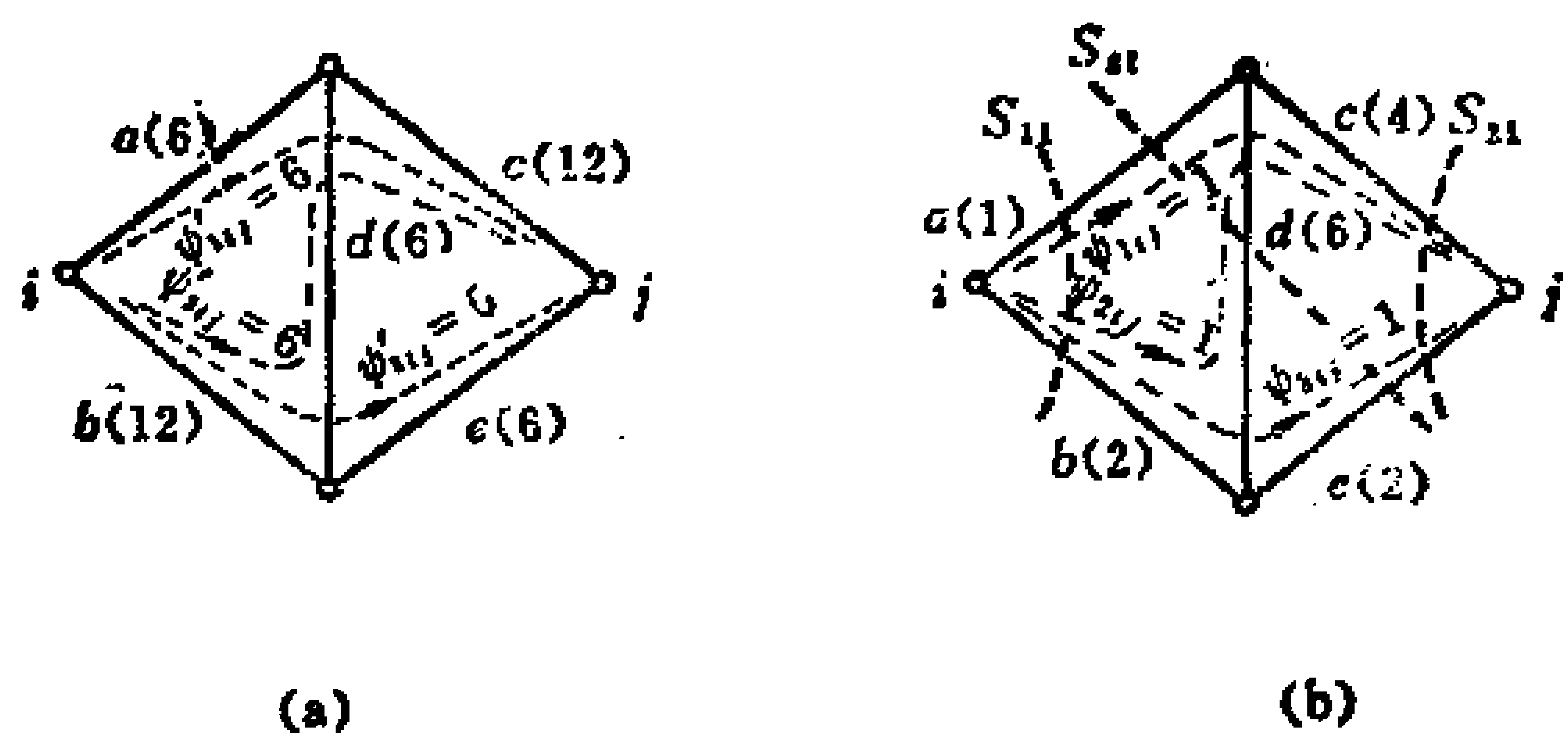


图12-4-2　用 $G(\alpha_0^1\alpha_0^2)$ 分配流 ψ_{ij}

(a) $G(\alpha_0^1\ \alpha_0^2)$；(b)$G$

考虑图12-4-1(c)中的EWC网$G(\alpha_0^1\alpha_0^2)$．我们要分配最大流ψ_{ij}给这个传输网的唯一方式是分配流$\psi'_{1ij}=6$，$\psi'_{2ij}=6$和$\psi'_{3ij}=6$，如图12-4-2(a)所示。因为$\alpha_0^1\alpha_0^2=6$，所以如图12-4-2(b)所示，分配流$\psi_{1ij}=1$，$\psi_{2ij}=1$，$\psi_{3ij}=1$给出最大流ψ_{ij}；并且显然割集(a,b)，(a,d,e)，(c,e)是线性无关割集，而分配了非零流的这些路径，对每一个割集每一条都只通过一次。

12-5 有向EWC网

当一个EWC网的每边都有一个定向，表示通过该边的流只按规定的方向流动时，就称这个网络为有向EWC网。把流ψ_{rij}分配给从顶点i到顶点j的一条路径P_{rij}，除了路径必须是从i到j的有向路径外，其余的情况都与无向EWC网中的情况相同．同样，分配流ψ_{rij}给一个有向EWC网和分配给无向EWC网是一样的，并且从i到j的端限容量是从i到j所能分配到的最大流。我们应该注意，在有向EWC网的情况下，端限容量t_{ij}有可能不等于端限容量t_{ji}。

为了讨论有向EWC网的性质，我们定义半割如下。

定义12-5-1 设$S_{ij}=\mathscr{E}(\Omega_i\times\bar{\Omega}_i)\cup\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i\times\Omega_i)$是一个有向线图的割集，其中$i\in\Omega_i$，$j\in\bar{\Omega}_i$，则$S_{ij}$的半割$s_{ij}$和$s_{ji}$分别为

$$s_{ij}=\mathscr{E}(\Omega_i\times\bar{\Omega}_i) \tag{12-5-1}$$

$$s_{ji}=\mathscr{E}(\bar{\Omega}_i\times\Omega_i) \tag{12-5-2}$$

注意s_{ij}和s_{ji}是无重边的集合，并且

$$s_{ij}\cup s_{ji}=S_{ij} \tag{12-5-3}$$

与无向EWC网的情况一样，一个有向EWC网的边称为饱和的，如果这条边的边流等于它的边容量。但是在有向EWC网中分配流ψ_{ij}时，与之有关的基本饱和割集的定义与无向EWC网中相应的定义有一点不同。

定义12-5-2 在一个有向EWC网中，如果割集 S_{ij} 的半割 s_{ij} 中每条边都是饱和的，而 S_{ij} 的半割 s_{ji} 中每条边都没有非零流，那么割集 S_{ij} 就是流 ψ_{ij} 的（从 i 到 j）一个分配方式下的基本饱和割集。

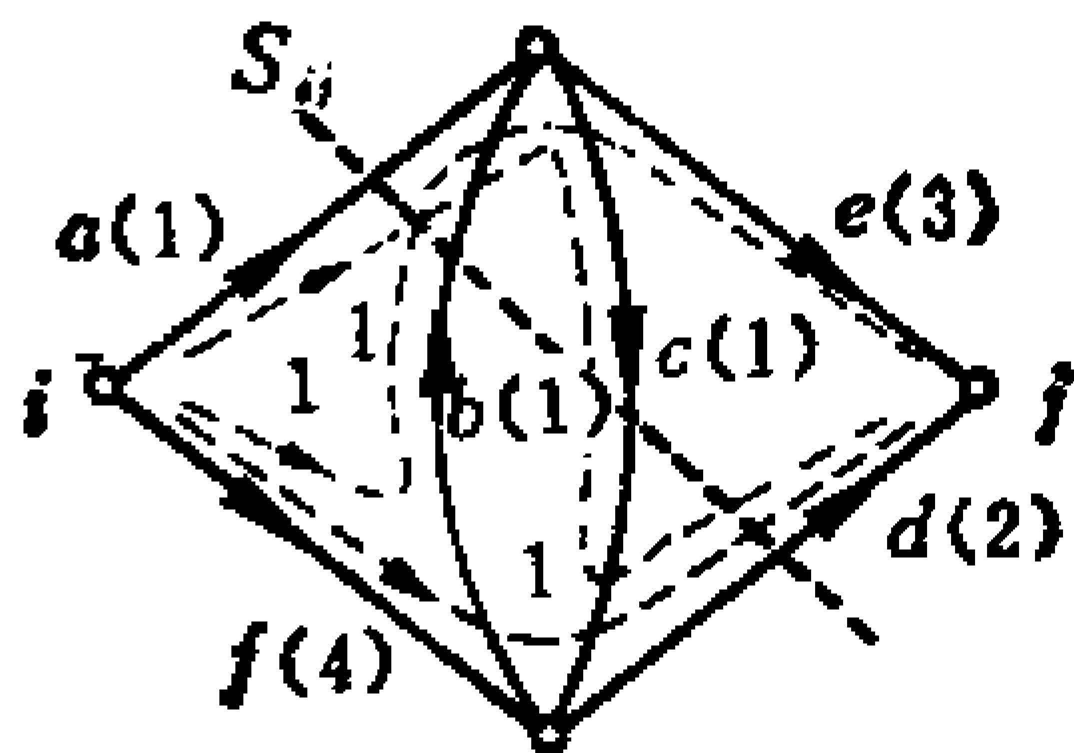


图12-5-1 一个有向EWC网和流 ψ_{ij}

例如，如果我们分配流 ψ_{ij} 如图 12-5-1所示，那么割集S_{ij} = (a, b, c, d) 中每一条边都是饱和的。但是，S_{ij} 不是基本饱和割集，这是因为 S_{ij} 的半割 s_{ij} 和 s_{ji} 为

$$s_{ij}=(a,b,d),\ s_{ji}=(c)$$

而给边 c 分配了一个非零边流 $\psi_{ij}(c)$。

当我们如图 12-5-2 所示那样分配流 ψ_{ij} 时，割集 S_{ij} = (a, b, c, d) 变成了基本饱和割集。根据上面这些定义，我们可以证明定理12-5-1。

定理12-5-1 当且仅当存在一个分离 i 和 j 的基本饱和割集时，分配给有向 EWC 网的流 ψ_{ij} 是最大的。

这个定理的证明与定理 12-1-2 的证明正好相同，只不过要用到有向 EWC 网的基本饱和割集。很容易看出，对于最大流 ψ_{ij} 的每一种可能的分配方式，至少存在一个分离 i 和 j 的基本饱和割集。我们称这个割集为端限容量 t_{ij} 的对应割集。

从定理12-5-1，我们得到另一个定理。

定理12-5-2 端限容量 t_{ij} 等于

$$t_{ij}=\min\{V[s_{pij}];\ S_{pij}\text{的半割}s_{pij}\in S(i;\ j)\} \qquad (12\text{-}5\text{-}4)$$

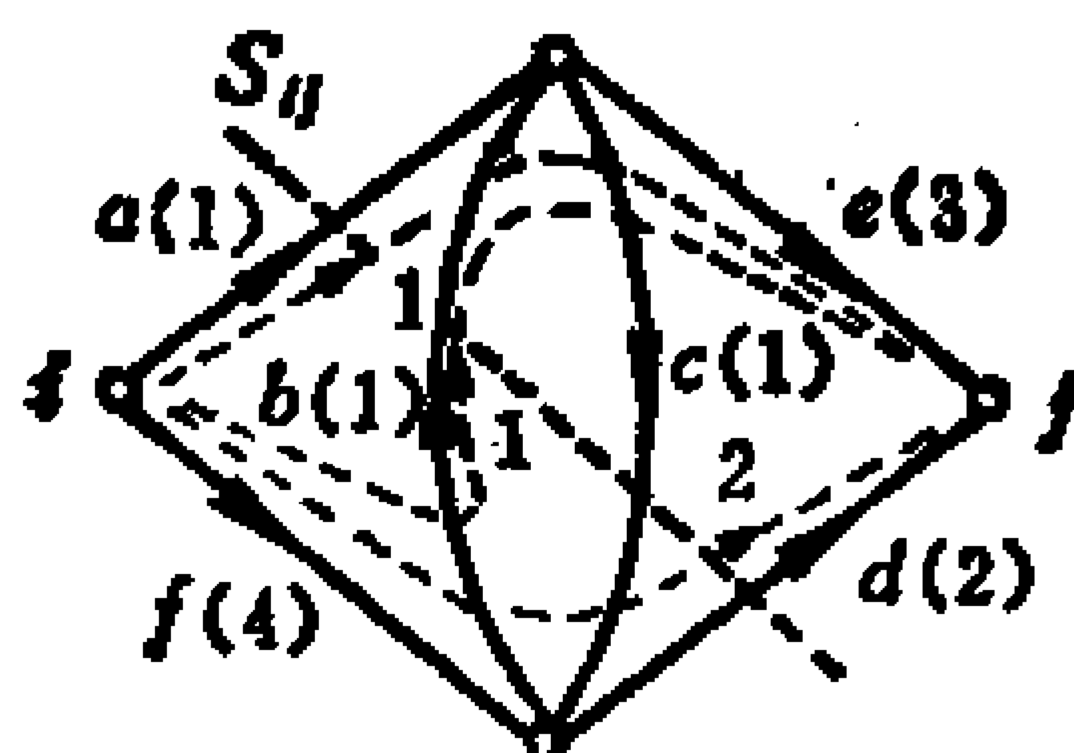


图12-5-2 在图12-5-1中的有向EWC网之内分配流 ϕ_{ij} 的不同方式

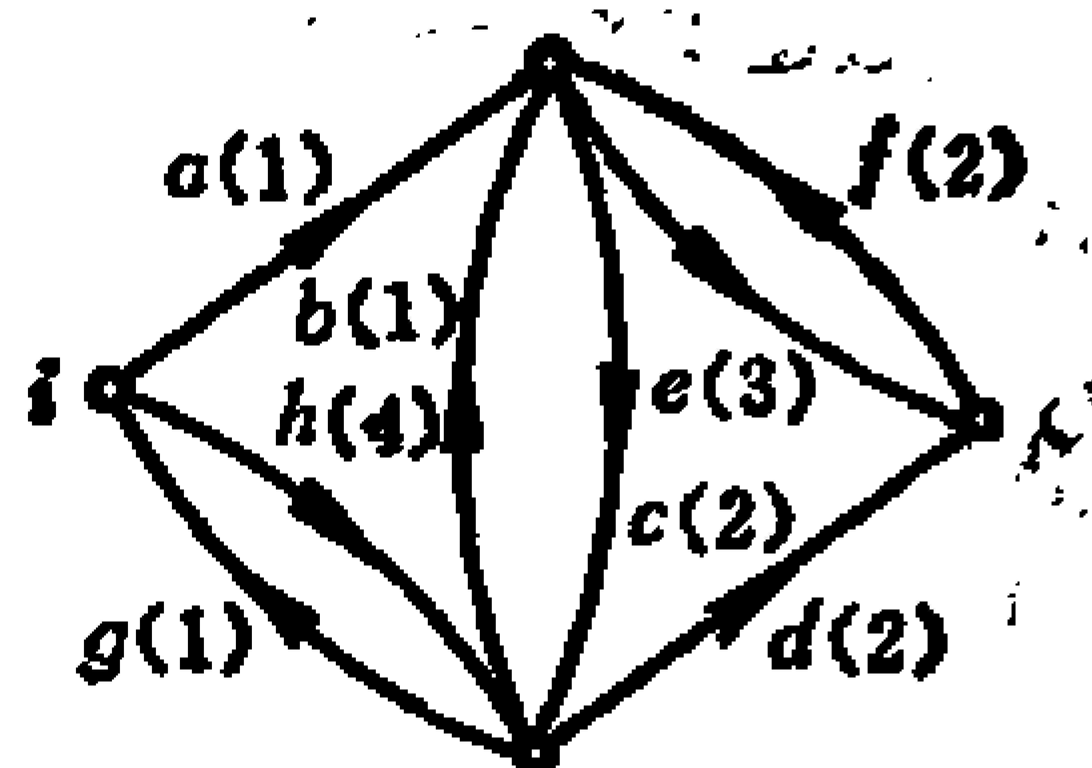


图12-5-3 有向EWC网 G

例12-5-1 在图12-5-3的有向 EWC 网 G 中，$\{S(i;\ j)\}$ 由以下分离 i 和 j 的割集组成：

$$S_{1ij}=(a,g,h),\quad S_{2ij}=(a,b,c,d),$$
$$S_{3ij}=(d,e,f),\quad S_{4ij}=(b,c,e,f,g,h)$$

这些割集的半割 s_{pij} 为

$$s_{1ij}=(a,h),\qquad s_{2ij}=(a,b,d),$$
$$s_{3ij}=(d,e),\quad \text{and}\quad s_{4ij}=(c,e,h)$$

因此

$$t_{ij}=\min\{V(s_{pij})\}=\min(5,4,5,9)=4$$

另一方面

$$s_{1ji}=(g),\qquad s_{2ji}=(c),$$
$$s_{3ji}=(f),\quad \text{and}\quad s_{4ji}=(b,f,g)$$

所以

$$t_{ji}=\min\{V(s_{pji})\}=\min(1,2,2,4)=1$$

显然，一个有向 EWC 网的端限容量矩阵一般是不对称的。但是，利用证明定理12-2-1中条件的必要性时所采用的步骤，我们

可以求得端限容量矩阵的主分块以及所有包含一个以上元素的结果主子阵的主分块。

定理12-5-3 一个有向 EWC 网的端限容量矩阵可以作主分块划分，并且所有包含一个以上元素的结果主子阵也可以作主分块划分。

例12-5-2 图12-5-4中有向 EWC 网的端限容量矩阵 T 以及所有的结果主子阵都可以作主分块划分，如下所示：

$$T = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c} d & 2 & 2 & 2 \\ \hline 6 & d & 3 & 3 \\ \cline{2-4} 4 & 4 & d & 3 \\ \cline{2-4} 6 & 7 & 5 & d \end{array}\right] \end{array}$$

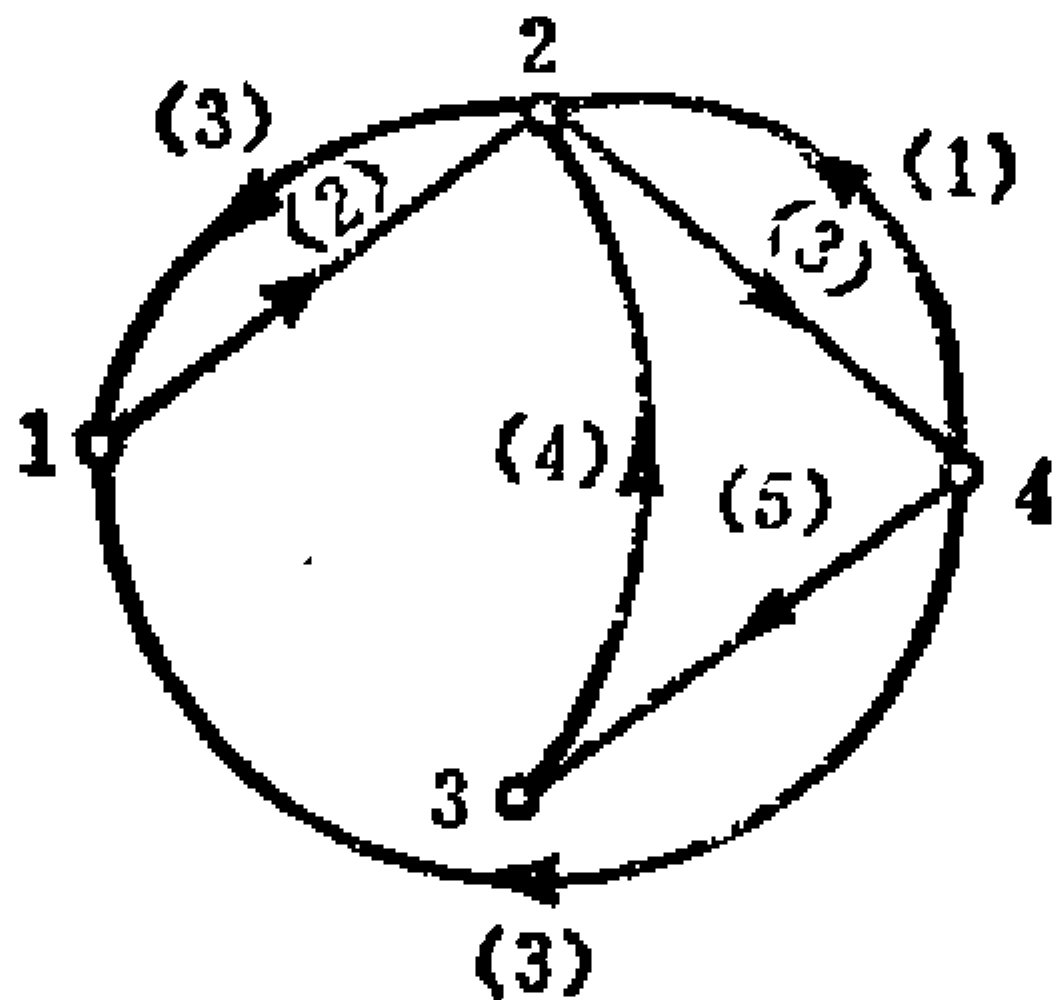


图12-5-4 有向EWC网

在无向 EWC 网的情况下，端限容量矩阵是对称的。因此，一个网络所能有的不同端限容量的最大数目为 n_v-1，其中 n_v 是该网络的顶点数。另一方面，不难看出，一个有向 EWC 网中不同端限容量的最大数目是大于 n_v-1 的。

考虑图12-5-5中的有向 EWC 网，其中 p 和 q 都是顶点。又

考虑一个由ψ_{1pq}, ψ_{2pq}, ψ_{3pq}, ψ_{4pq}组成的流$\psi_{fq}=t_{pq}$(即$\psi_{pq}=\psi_{1pq}+\psi_{2pq}+\psi_{3pq}+\psi_{4pq}$),其中流$\psi_{1pq}$通过从$p$到$q$的边,流$\psi_{2pq}$通

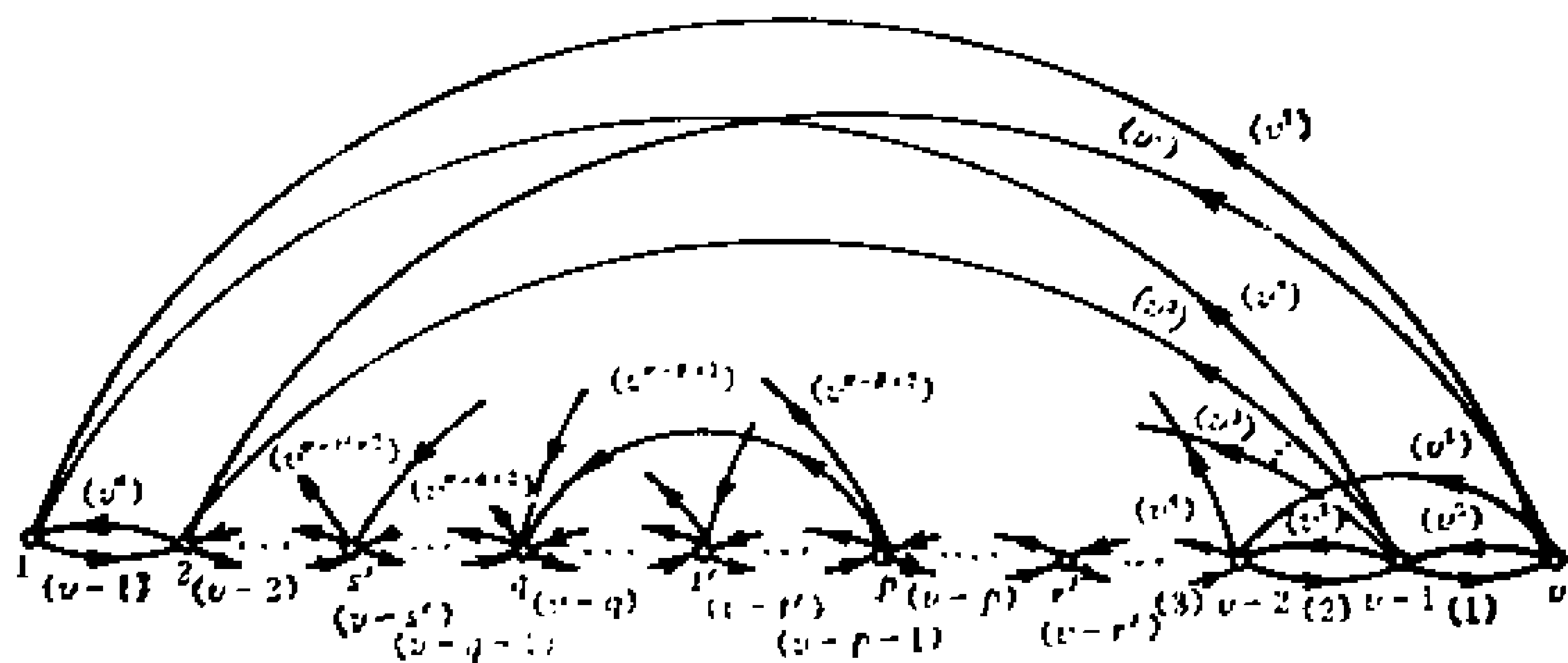


图12-5-5 有向EWC网

过从顶点p到顶点$r'>p$的边,流ψ_{3pq}通过从顶点p到顶点$s'<q$的边,流ψ_{4pq}通过从顶点p到顶点t' ($q<t'<p$) 的边。因为从顶点p到顶点q的边的边容量为v^{v-p+2},所以$\psi_{1pq}=v^{v-p+2}$。流ψ_{2pq}一定要通过从顶点p到顶点$p+1$的边,而从顶点$p+1$到顶点p的边的边容量大于从顶点p到顶点$p+1$的边的边容量。这一事实告诉我们,$\psi_{2pq}=v-p$。对于ψ_{3pq},考虑从p到$s'(<q)$的所有有向路径。因为这些路径都必包含从顶点q-1到顶点q的边,该边的边容量为v-q-1,而从p到q-1的边的边容量大于v-q-1,所以$\psi_{3pq}=v-q-1$。最后,每一条从顶点p到顶点q,通过顶点t'而不过顶点r'和s'的有向路径,包含从顶点p到顶点t'的边,其边容量为v^{v-p+2},而对于所有的t',从t'到顶点q的边的边容量大于v^{v-p+2},所以

$$\psi_{4pq}=(p-q-1)v^{v-p+2}$$

因此$t_{pq}=\psi_{fq}$。而

$$t_{pq}=(p-q)v^{v-p+2}+2v-p-q-1$$
$$p\neq v,\quad q\neq 1 \tag{12-5-5}$$

当 $p=v$ 或 $q=1$ 时，$\psi_{2_{pq}}$ 或 $\psi_{3_{pq}}$ 为零。因而

$$t_{pq}=\begin{cases}(p-q)v^{v-p+2}+v-q-1 & p=v,\ q\neq 1\\(p-q)v^{v-p+2}+v-p & p\neq v,\ q=1\\(p-q)v^{v-p+2} & p=v,\ q=1\end{cases} \qquad (12\text{-}5\text{-}6)$$

由此我们可以看出，仅当 $p_1=p_2$ 且 $q_1=q_2$ 时，

$$t_{p_1q_2}=t_{p_2q_1} \qquad (12\text{-}5\text{-}7)$$

还可以看出，所有的 $t_{pq}(p>q)$ 都大于 v。对于 t_{qp} 我们有

$$t_{qp}=t_{p-1p}=v-p-1 \qquad (12\text{-}5\text{-}8)$$

它是小于 v 的。因此，我们得到图 12-5-5 中网络的端限容量矩阵，矩阵的主对角线上方的元素由 $v-1$ 个不同的值组成，而主对角线下方的元素都不相同。现在我们可以说，存在一个 n_v 个顶点的（连通的）有向EWC网，正好有 $(n_v-1)(n_v+2)/2$ 个不同的端限容量。

端限容量矩阵有一种特殊子矩阵，称为 S 子阵，与 $\{S(i;j)\}$ 中的集合有密切的关系，并且，这种子阵对于研究一个矩阵作为有向 EWC 网的端限容量矩阵的可实现性是非常重要的。

定义12-5-3 设 Ω_1 和 $\bar{\Omega}_1$ 是一对不相交的顶点集合，且 $\Omega_1\cup\bar{\Omega}_1=\Omega$，此处 Ω 是网络中所有顶点的集合。S 子阵是 T 的子阵，是将 T 划去对应于 $\bar{\Omega}_1$ 中所有顶点的行与对应于 Ω_1 中所有顶点的列而得到的。

重要的是要注意在 S 子阵的元素中是不包含 d 的。例如，考虑例 12-5-2 中所给的端限容量矩阵，$\Omega=(1,2,3,4)$。设 $\Omega_1=(1,2)$，则 $\bar{\Omega}_1=(3,4)$，关于这两个集合的 S 子阵为

$$\begin{array}{c|cc} & 3 & 4\\ \hline 1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 3\end{array}$$

如果取 $\Omega_1=(3,4)$，$\bar{\Omega}_1=(1,2)$，则我们有

$$\begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \end{array}$$

另一方面，如果选择 $\Omega_1=(2,3,4)$，则 $\bar{\Omega}_1=(1)$，并且 S 子阵为

$$\begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} 1 \\ \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

设 S 是有向E WC 网中的一个割集。于是利用 $S=\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)\cup\mathscr{E}(\bar{\Omega}_1\times\Omega_1)$ 之中的 Ω_1 和 $\bar{\Omega}_1$，就可以得到 T 的一个 S 子阵。因此，在 T 的端限容量及其 S 子阵之间有一定的关系，这由下面的定理给出。

定理12-5-4 对于 T 除 d 外的每个元素，至少存在一个 S 子阵，使这个元素成为该 S 子阵中最大的元素。

证明： 设 t_{pq} 是端限容量，显然它是端限容量矩阵 T 中的一个元素。又设 $S_{pq}=\mathscr{E}(\Omega_p\times\bar{\Omega}_p)\cup\mathscr{E}(\bar{\Omega}_p\times\Omega_p)$ 是 t_{pq} 的对应割集，其中 $p\in\Omega_p$，$q\in\bar{\Omega}_p$。很明显，从 T 中划去对应于 $\bar{\Omega}_p$ 中所有顶点的行和对应于 Ω_p 中所有顶点的列，所得到的 S 子阵必包含 t_{pq}。假定在此 S 子阵中存在一个比 t_{pq} 大的元素 t_{ru}。而要使 t_{ru} 在此 S 子阵中，r 一定在 Ω_p 中，u 一定在 $\bar{\Omega}_p$ 中，因此割集 S_{pq} 分离 r 和 u。这就意味着半割 s_{pq} 在式（12-5-4）中是确定 t_{ru} 的半割之一，因而不可能有 $t_{ru}>t_{pq}$ （证毕）

定理12-5-5 设 t_{pq} 是端限容量。如果对于 $k\geqslant1$，存在 k 个包含 t_{pq} 的 S 子阵，并且 t_{pq} 在这 k 个 S 子阵的每一个子阵中都是最大元素，那么在这 k 个 S 子阵中，至少有一个确定 t_{pq} 的对应

割集．〔一个S子阵确定一个割集，如果$\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)\cup\mathscr{E}(\bar{\Omega}_1\times\Omega_1)$是一个割集，其中$\Omega_1$是与$S$子阵的行对应的所有顶点的集合，$\bar{\Omega}_1$是与$S$子阵的列对应的所有顶点的集合．〕

这个定理的证明是明显的，因为我们知道，存在一个子阵，它是由t_{pq}的对应割集

$$S_{pq}=\mathscr{E}(\Omega_p\times\bar{\Omega}_p)\cup\mathscr{E}(\bar{\Omega}_p\times\Omega_p)$$

中的Ω_p和$\bar{\Omega}_p$所得到的。

根据定理12-5-4和定理12-5-5所给出的S子阵的性质，我们可以证明，定理12-3-1所给的关于无向 EWC 网的端限容量矩阵的必要充分条件，对于有向 EWC 网并不正确。首先，我们注意到，在定理12-3-1中，对于任意三个顶点i，j，k所满足的

$$t_{ij}\geqslant\min(t_{ik},\ t_{kj})\tag{12-5-9}$$

对于有向 EWC 网是适用的。可以用与定理12-3-1几乎相同的方法来证明这一点。但是，式(12-5-9)给出的关系对于有向EWC网的端限容量矩阵的可实现性却不是充分的，这可以由证明下述矩阵不能实现为端限容量矩阵来阐明。

$$R=\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\\ d\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}a & b & c & d\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc}d & 3 & 1 & 1\\ t_2 & d & 1 & 1\\ t_3 & t_1 & d & 2\\ t_4 & t_0+\varepsilon & t_0 & d\end{array}\right]\end{array}\tag{12-5-10}$$

在矩阵R中，$t_4>t_3>t_2>t_1>t_0+\varepsilon>t_0>3$，且$0<\varepsilon<1$．可以看出，$R$满足定理12-5-4和式(12-5-9)给出的关系．以1为最大元素的S子阵只有一个，即

$$R_1=\begin{array}{c} \\ a\\ b\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}c & d\end{array}\\ \left[\begin{array}{cc}1 & 1\\ 1 & 1\end{array}\right]\end{array}\tag{12-5-11}$$

与R_1对应的顶点集Ω_1和$\bar{\Omega}_1$是

$$\Omega_1 = (a,\ b) \qquad (12\text{-}5\text{-}12)$$

$$\bar{\Omega}_1 = (c,\ d) \qquad (12\text{-}5\text{-}13)$$

它们给出对应的割集 $S_{ac} = \mathscr{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1) \cup \mathscr{E}(\bar{\Omega}_1 \times \Omega_1)$，如图12-5-6所示。注意 $s_{ac} = \mathscr{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$是半割，它的值等于$t_{ac}$,$t_{bc}$,$t_{ad}$和$t_{bd}$。

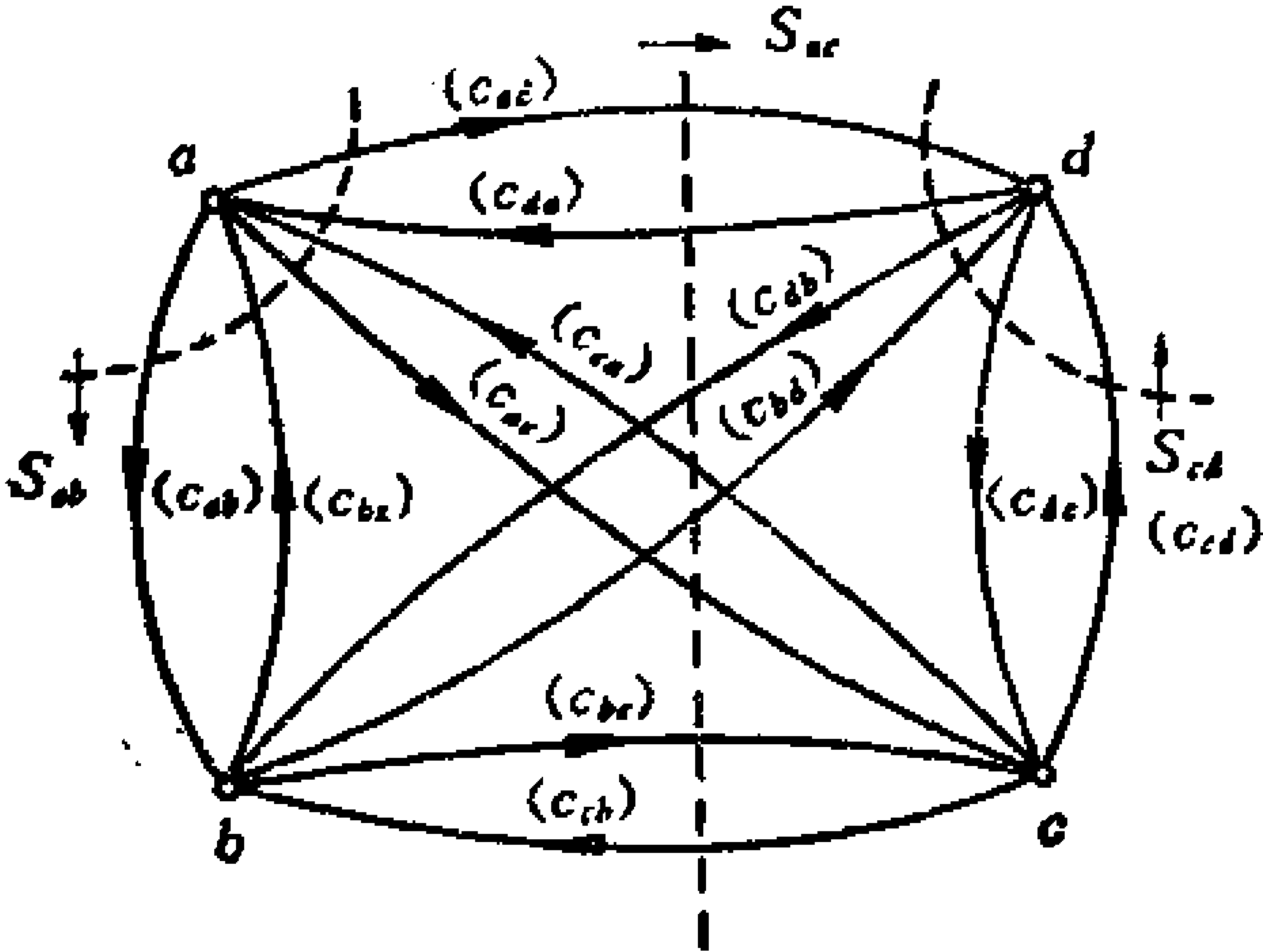


图12-5-6　与R对应的有向EWC网

同样，以 2 为最大元素的S子阵只有一个，即R_2；以 3 为最大元素的S子阵也只有一个，即R_3，它们分别为

$$R_2 = \begin{matrix} & d \\ a & 1 \\ b & 1 \\ c & 2 \end{matrix} \qquad (12\text{-}5\text{-}14)$$

和

$$R_3 = \begin{matrix} & b & c & d \\ a & [3 & 1 & 1] \end{matrix} \qquad (12\text{-}5\text{-}15)$$

这两个S子阵给出割集S_{cd}和S_{ab}，如图12-5-6所示，其中$V[s_{cd}] = 2$，$V[s_{ab}] = 3$。因此

$$t_{ac}=1=c_{ad}+c_{ac}+c_{bc}+c_{bd} \tag{12-5-16}$$

$$t_{ab}=3=c_{ab}+c_{ad}+c_{ac} \tag{12-5-17}$$

由于下面的S子阵R_4是R中唯一的以t_0为最大元素的S子阵，因此t_0的对应割集必定是$S_{dc}=\mathscr{S}(\Omega_d\times\bar{\Omega}_d)$，其中$\Omega_d=(a,b,d)$，$\bar{\Omega}_d=(c)$，如图12-5-7所示。

$$R_4=\begin{matrix} & c \\ \begin{matrix}a\\b\\d\end{matrix} & \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\end{matrix} \tag{12-5-18}$$

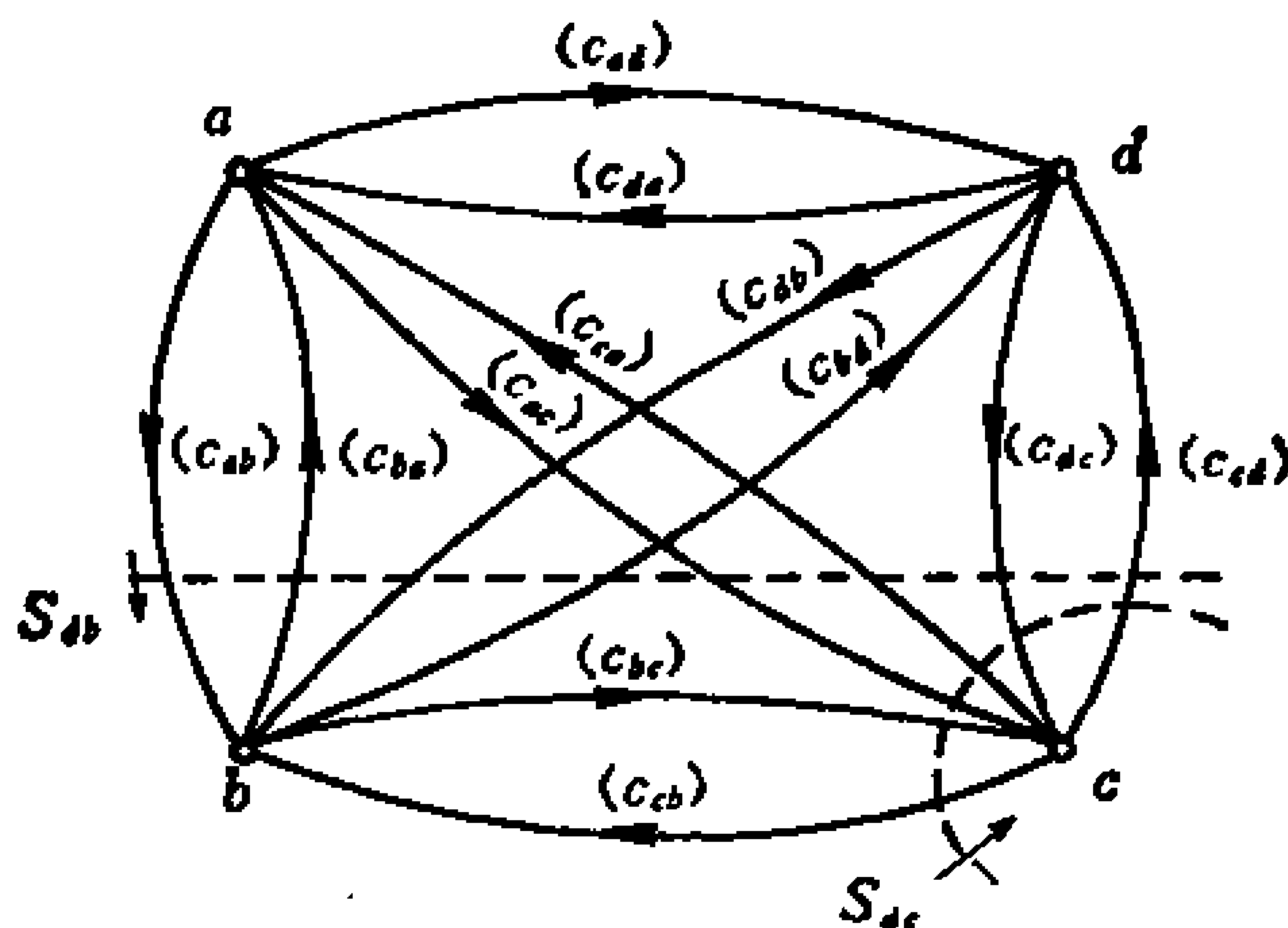


图12-5-7　EWC网以及S_{dc}，S_{db}

因此
$$t_0=c_{ac}+c_{bc}+c_{dc} \tag{12-5-19}$$

又由于只有一个S子阵R_6以t_0+e为其最大元，

$$R_6=\begin{matrix} & \begin{matrix}b & \quad c\end{matrix} \\ \begin{matrix}a\\d\end{matrix} & \begin{bmatrix}3 & 1\\ t_0+e & t_0\end{bmatrix}\end{matrix} \tag{12-5-20}$$

于是图12-5-7中的S_{db}是t_0+e的对应割集。因此

$$t_0+e=c_{ab}+c_{ac}+c_{db}+c_{dc} \tag{12-5-21}$$

由式(12-5-19)和式(12-5-21)，我们有

$$\varepsilon=c_{ab}+c_{db}-c_{bc} \tag{12-5-22}$$

因为每一个边容量都是非负的，故由式(12-5-16)得

$$c_{ad}+c_{ac}\leqslant 1 \tag{12-5-23}$$

于是由式(12-5-17)和式(12-5-23)，得

$$3\geqslant c_{ab}\geqslant 2 \tag{12-5-24}$$

由式(12-5-16)得

$$c_{bc}\leqslant 1 \tag{12-5-25}$$

因此，由式(12-5-24)，(12-5-25)和(12-5-22)，我们有

$$\varepsilon\geqslant c_{db}+1 \tag{12-5-26}$$

因为 c_{db} 是非负的，故 $\varepsilon\geqslant 1$，这与 $0<\varepsilon<1$ 的假设矛盾，所以 R 不能实现成为有向EWC网的端限容量矩阵。因此，式(12-5-9)给出的端限容量之间的关系对于有向 EWC 网的端限容量矩阵并不是可实现性的充分条件。

为了得到有向EWC网的端限容量矩阵的可实现性条件，我们介绍一种修改 EWC 网的特殊方法，称为移量算法。为了便于说明这种算法，我们规定用符号 $\Omega(g)$ 表示线图 g 中作为边的端点的所有点的集合。例如，考虑图 12-5-7 所示的有向EWC网，设 g 是由边容量分别为 c_{cb}，c_{bd} 和 c_{dc} 的那些边组成的子图，则

$$\Omega(g)=(b,c,d)。$$

为了看出怎样用移量算法来修改一个 EWC 网，我们设 $C=(e_1,e_2,\cdots,e_p)$ 是有向 EWC 网的一个有向回路，又设 $C'=(e'_1,e'_2,\cdots,e'_p)$ 是另一个有向回路，使得对于 $r=1,2,\cdots,p$，边 e_r 和 e'_r 是相互平行且反向的，如图 12-5-8 所示。可以看出，有向回路C和C'的性质是：(1) $\Omega(C)=\Omega(C')$；(2) C和 C' 的定向相反。现在，从有向回路 C 的每一条边的边容量减去容量 δ，在有向回路C'的每一条边的边容量中加上 δ，就得到一个新的EWC网G'，如图12-5-9所示，其中，c_r 和c'_r分别为边 e_r 和e'_r的

边容量，$r=1,2,\cdots,p$. 这种改变边容量的算法称为移置算法. 利用这种算法，可以证明，G和G'的任意两顶点间的端限容量均相同.

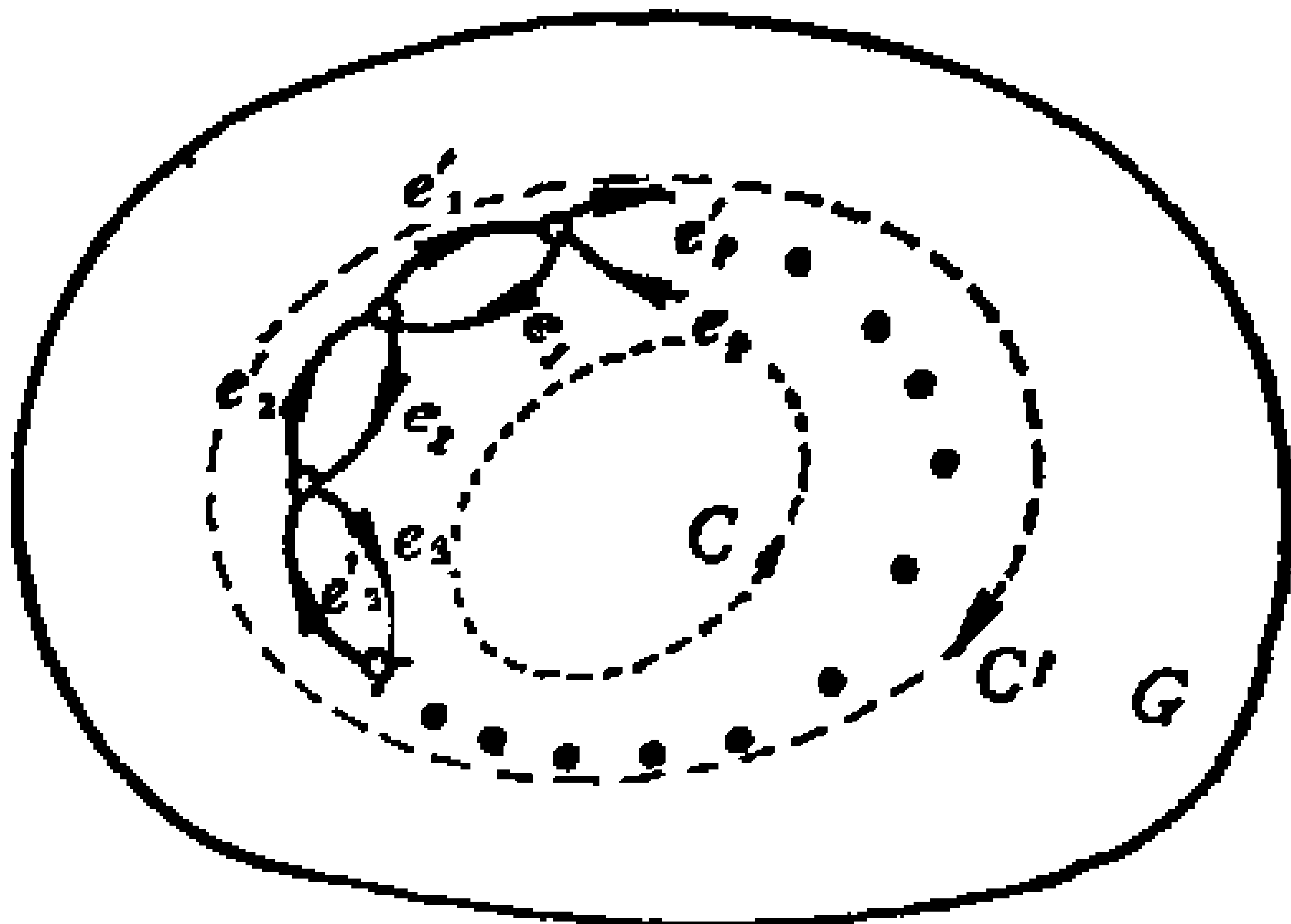


图12-5-8 有向EWC网 G

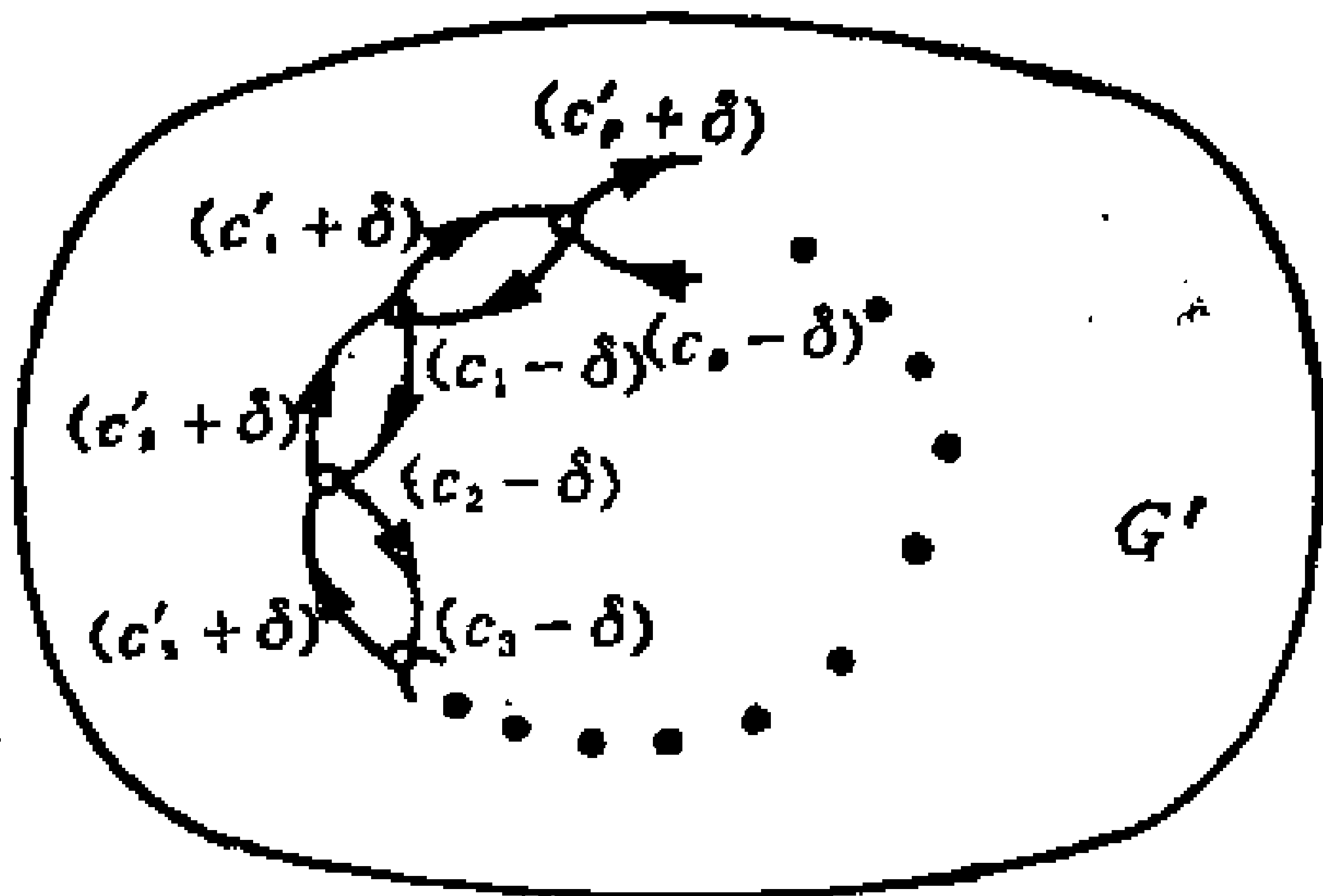


图12-5-9 有向EWC网G'

根据式(12-5-4)，如果我们能证明G中每一个半割的值等于G'中对应半割的值，那么就可以保证，G和G'中任意两顶点间的端限容量都是相同的. 任取一个半割s，若C中的边都不在s中，则G和G'中半割的值$V(s)$显然是相同的. 现在，设S是割

集，s 是 S 的两个半割之一。因为 C 是一个回路，故 C 中有偶数 $(2k)$ 条边在 S 中，又因 C 是一个有向回路，故这些边有一半在半割 s 中，即 C 有 k 条边在 s 中。同样，C' 中有 $2k$ 条边在 S 中，有 k 条边在 s 中。因此，s 中容量增加 δ 的边的数目与容量减少 δ 的边的数目相等。这就说明，G 和 G' 中半割 s 的值 $V(s)$ 相等。

定理12-5-6 移量算法保持端限容量不变。

可以看出，运用移量算法可以把一个 EWC 网的边容量变为负数。然而根据定义，任何以负数为边容量的网络都不能称为 EWC 网，因此我们引入伪 EWC 网的概念。

定义12-5-4 一个线图 G 是伪 EWC 网，如果：（1）在 G 中每条边（被称为边容量）的权都是实数；（2）缺少一条边就相当于该边的权为零；（3）对于 G 中每对顶点 i 和 j，从 i 到 j 的端限容量 t_{ij} 非负，其中 t_{ij} 定义为

$$t_{ij}=\min\{V(s_{p_{ij}});\ 对于所有分离\ i\ 和\ j\ 的割集 S_{ij} 的半割\} \tag{12-5-27}$$

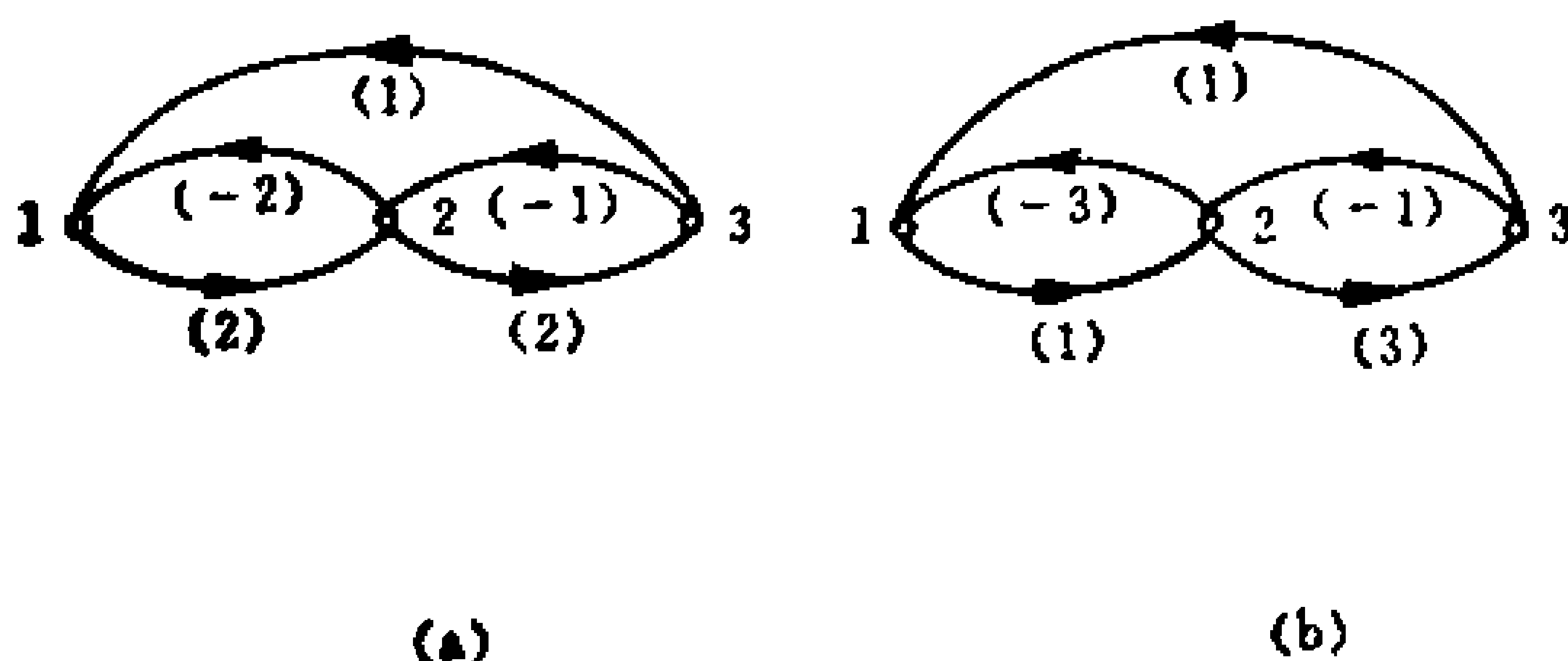


图 12-5-10
(a) 伪EWC网；(b) 非伪EWC网

例如，图12-5-10(a)中的线图是一个伪EWC网；图12-5-10(b)中的线图不是伪EWC网，因为有一个半割 s_{21} 的值是负数。

伪 EWC 网的性质将导出端限容量矩阵的可实现性条件。在

研究该性质之前，我们来看看，是否可以通过逐次运用移量算法来使任一伪 EWC 网变成传输网络。换句话说，能用移量算法使一个伪 EWC 网中负的边容量变成非负数吗？答案是否定的，因为如图 12-5-11 所示的伪 EWC 网便不能用移量算法变成 EWC 网。但是，下面的定理说明，任何一个满足一简单约束条件的伪 EWC网，可以用对移量算法作简单限制的方法来变成传输网络。

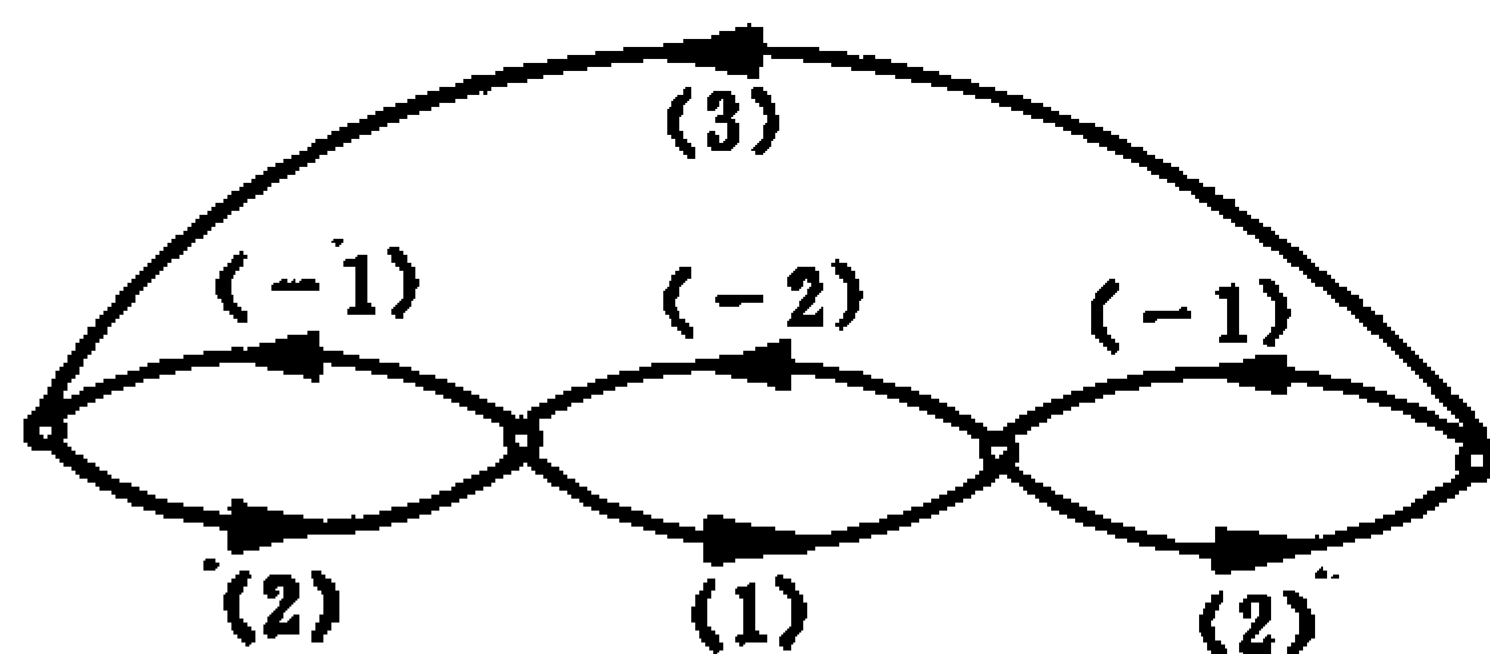


图12-5-11　伪 EWC 网

定理12-5-7　当且仅当伪 EWC 网G满足

$$c_{pq}+c_{qp}\geqslant 0 \quad \text{对所有的顶点 } p \text{ 和 } q \qquad (12\text{-}5\text{-}28)$$

则G就可以用移量算法变成EWC网。

证明：　根据移量算法的定义，必要性是显然的，也就是说，从一个 EWC 网出发，经过移量算法得到的任何伪 EWC 网都满足上述条件。

为证明充分性，我们定义伪EWC网的伪指标I为

$$I=-\left(\sum_{(r)}c_r\right) \qquad (12\text{-}5\text{-}29)$$

其中c_r是负的边容量，$\sum_{(r)}$表示“对所有的可能性求和”。换句话说，$-I$是所有负边容量之和。采用这个定义，若能证明，用移量算法由任一具有非零伪指标I的伪EWC网G产生伪 EWC 网G'，并使得G'的伪指标I'小于I，那么就能证明定理。

设e_{pq}是一条边容量为负数的边。则存在一条从顶点p到顶

点 q 的有向路径 P，使每条边的边容量都为正数。如若不然，就会有一个半割 s_{pq}，其值为负数。设 $P=(e_{p1}, e_{12}, \cdots, e_{kp})$，如图12-5-12所示。又设 $c_{p1}, c_{12}, \cdots, c_{kp}$ 分别为边 $e_{p1}, e_{12}, \cdots, e_{kp}$ 的边容量。注意据假设 c_{qp} 是正的。由于 $c_{p1}, c_{12}, \cdots, c_{kp}$ 和 c_{qp} 都是正的，于是存在正数 δ，使得

$$\delta=\min(c_{p1}, c_{12}, \cdots, c_{kq}, c_{pq})>0 \qquad (12\text{-}5\text{-}30)$$

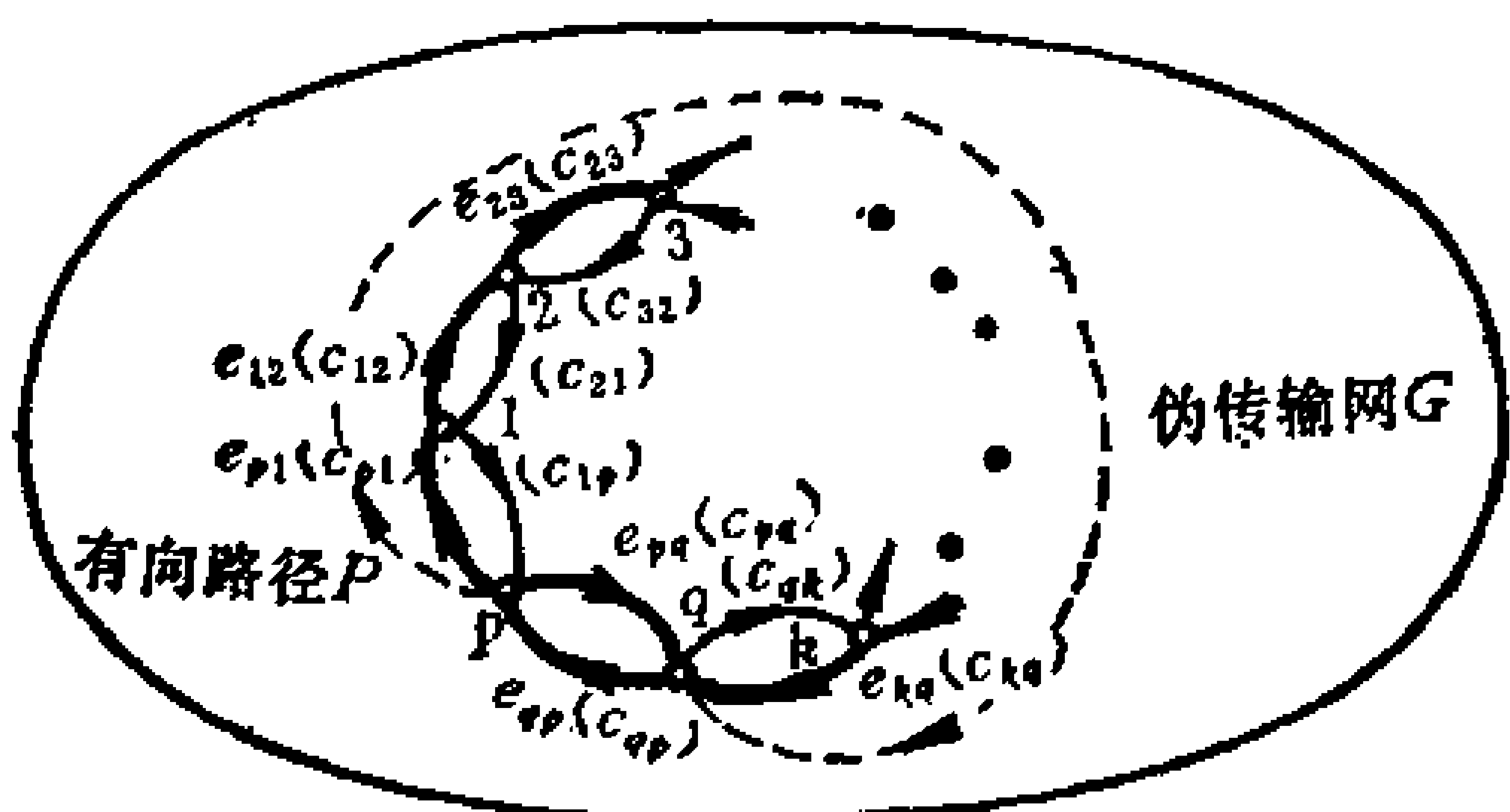


图12-5-12　伪 EWC 网和路径P

现在，我们可以把各边$e_{qp}, e_{p1}, e_{12}, \cdots, e_{kp}$（它们组成一个有向回路）的所有边容量都减去 δ，而将各边 $e_{pq}, e_{qk}, \cdots, e_{21}, e_{1p}$（它们组成对应的有向回路）的所有边容量都加上 δ，如图12-5-13所示。以上的步骤就是移量算法，而所得网络的伪指标显然小于原网络的伪指标. 注意我们所考虑的伪 EWC 网的边数是有限的，因而有向回路的数目也是有限的。因此，若逐次将移量算法应用有限次，就可以把伪指标减到零。　　　　（证毕）

由定理12-5-7，我们就可叙述定理12-5-8。

定理12-5-8　如果存在一个满足式(12-5-28)的伪EWC网，其端限容量矩阵为T，则T可以实现为有向 EWC 网的端限容量矩阵。

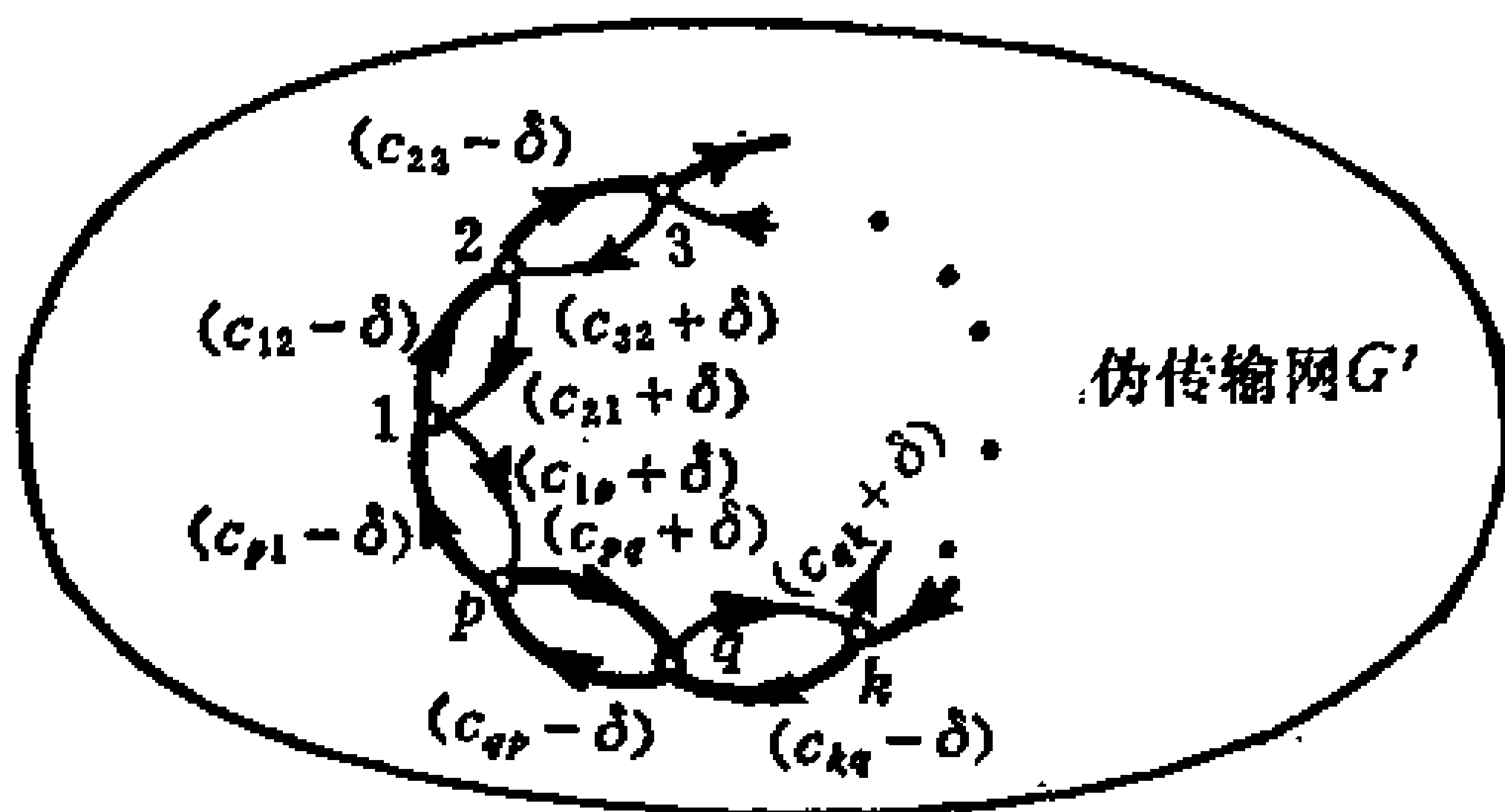


图12-5-13　用移量算法所得的网络

为了证明定理12-5-8的逆也是正确的，我们采用一种特殊的伪EWC网，称为基本结构网络（fundamental structure）。为定义这种网络，我们用符号 e_{pq} 表示从顶点 p 到顶点 q 的边（注意边的定向是从 p 到 q）。同样地，符号 c_{pq} 用来表示边 e_{pq} 的边容量。我们说顶点为 1，2，···，n 的伪 EWC 网 G 是基本结构网络（或基本伪 EWC 网），如果 G 满足以下条件：

1.对于 $p<q$，不存在从 p 到 q $(q>p+1)$ 的边。

2.除了边 $e_{p+1\ p}(p=1, 2, \cdots, n-1)$ 外，所有的边容量都是正的。

3.对于 $p=1, 2, \cdots, n-1$，$c_{p+1\ p}+c_{p\ p+1}\geqslant 0$。例如，图12-5-14(a)的网络是基本结构网络，而图 12-5-14(b) 和 (c) 的网络却不是。这是因为，对于 (b) 中的网络，$c_{21}+c_{12}<0$，这就违反了条件 3；对于 (c) 中的网络，存在一条边 e_{13}，这违反了条件 1，而 e_{31} 的边容量是负的，违反了条件 2。注意一个有向EWC网同时也是伪EWC网。

根据上面的定义，一个有 n 个顶点的基本伪 EWC 网必定有图 12-5-15 所示的结构。注意这个结构正好与图12-5-5中的有向

EWC网相同。

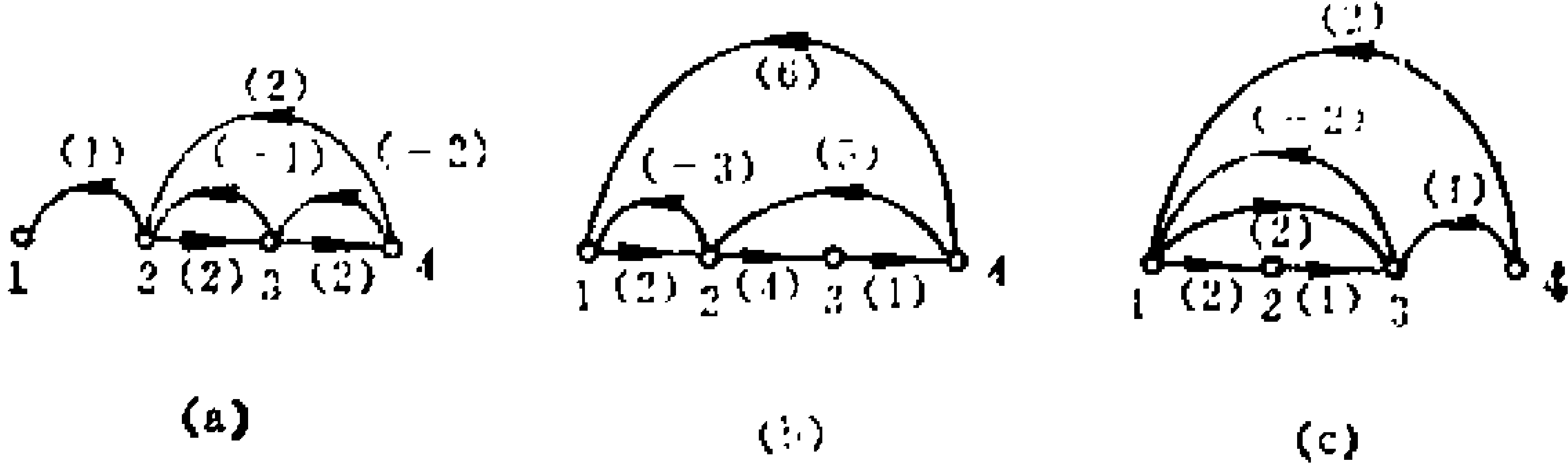


图12-5-14 伪传输网的例子

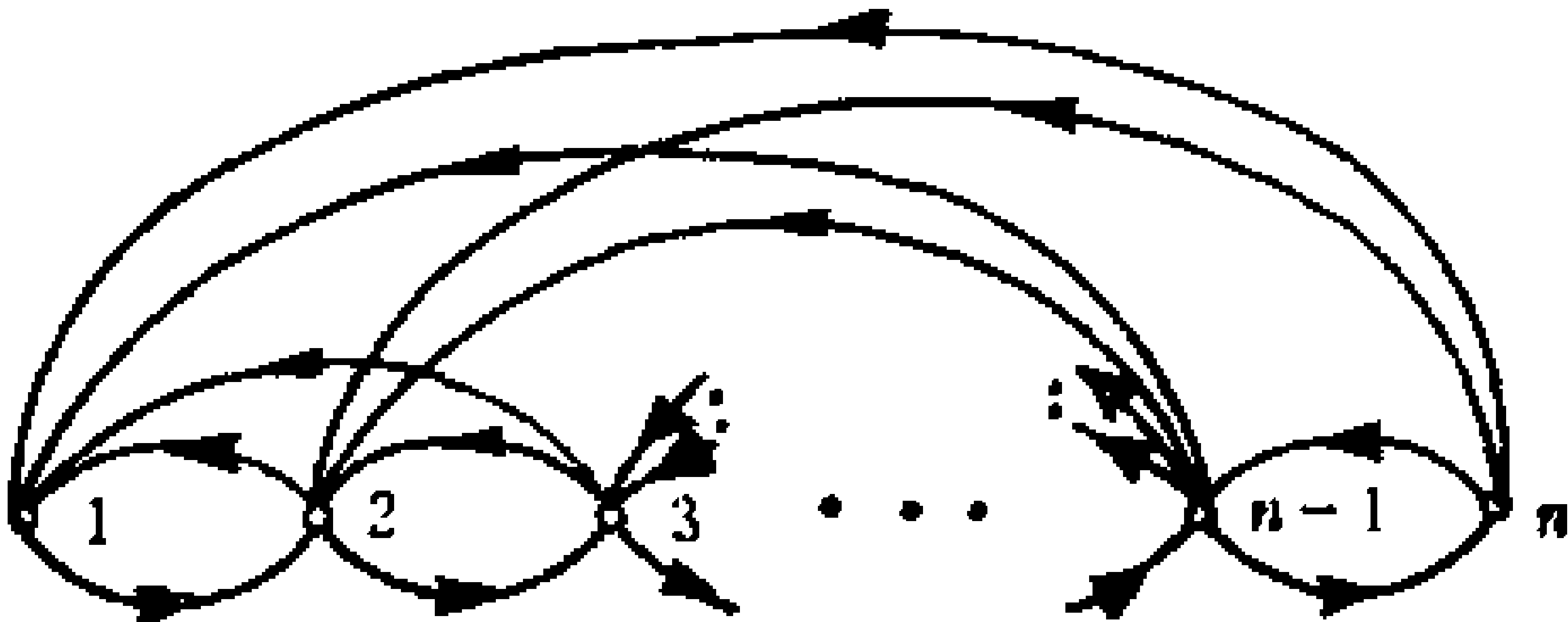


图12-5-15 基本结构网络

为了说明任何一个有向EWC网都可以用移量算法变成基本伪EWC网，首先回忆一下，我们可以对端限容量矩阵T和所有结果主子阵施行主分块划分。假定有向EWC网G的端限容量矩阵T已被主分块划分为

$$
T = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{array}
\overset{\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{array}}{\begin{bmatrix} d & & & & & \\ & d & & & & \\ & & d & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & d \\ & & & & & & d \\ & & & & & & & d \end{bmatrix}}
$$

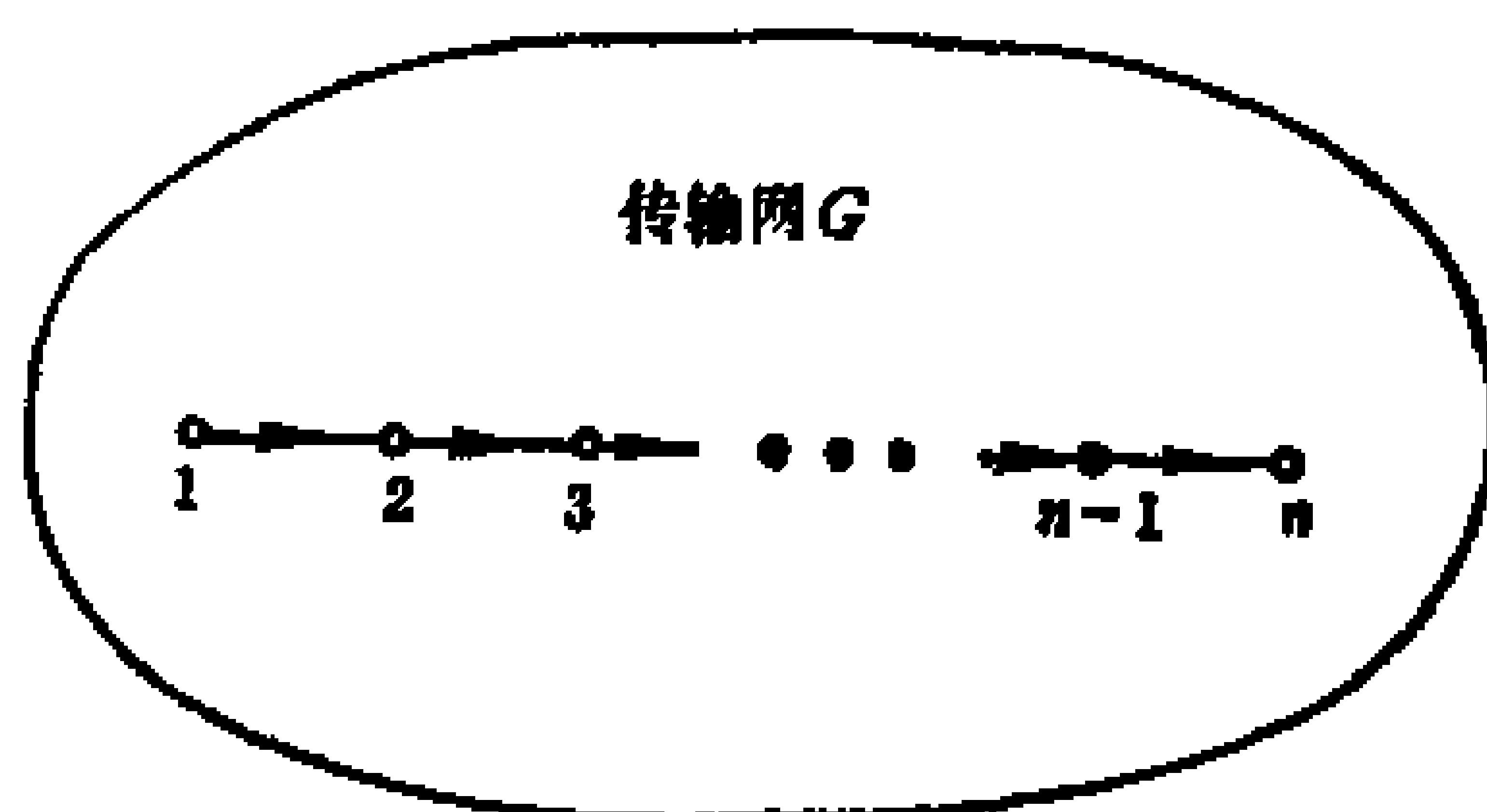


图12-5-16　一种画出G的特殊方法

我们这样来画出EWC网G，将其所有顶点画在一条直线上，顶点排列顺序与上面矩阵的列序一致，如图12-5-16所示。

例12-5-3　考虑图12-5-17中的有向EWC网G。G的端限容量矩阵划分的主分块为

$$T=\begin{array}{c} \\ i \\ j \\ k \\ p \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} i & j & k & p \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c} d & 5 & 4 & 2 \\ 7 & d & 4 & 2 \\ 6 & 6 & d & 2 \\ 5 & 5 & 5 & d \end{array}\right] \end{array}$$

若按照端限容量矩阵的列序把网络重画出，则上面的EWC网就变成图12-5-18所示的样子。

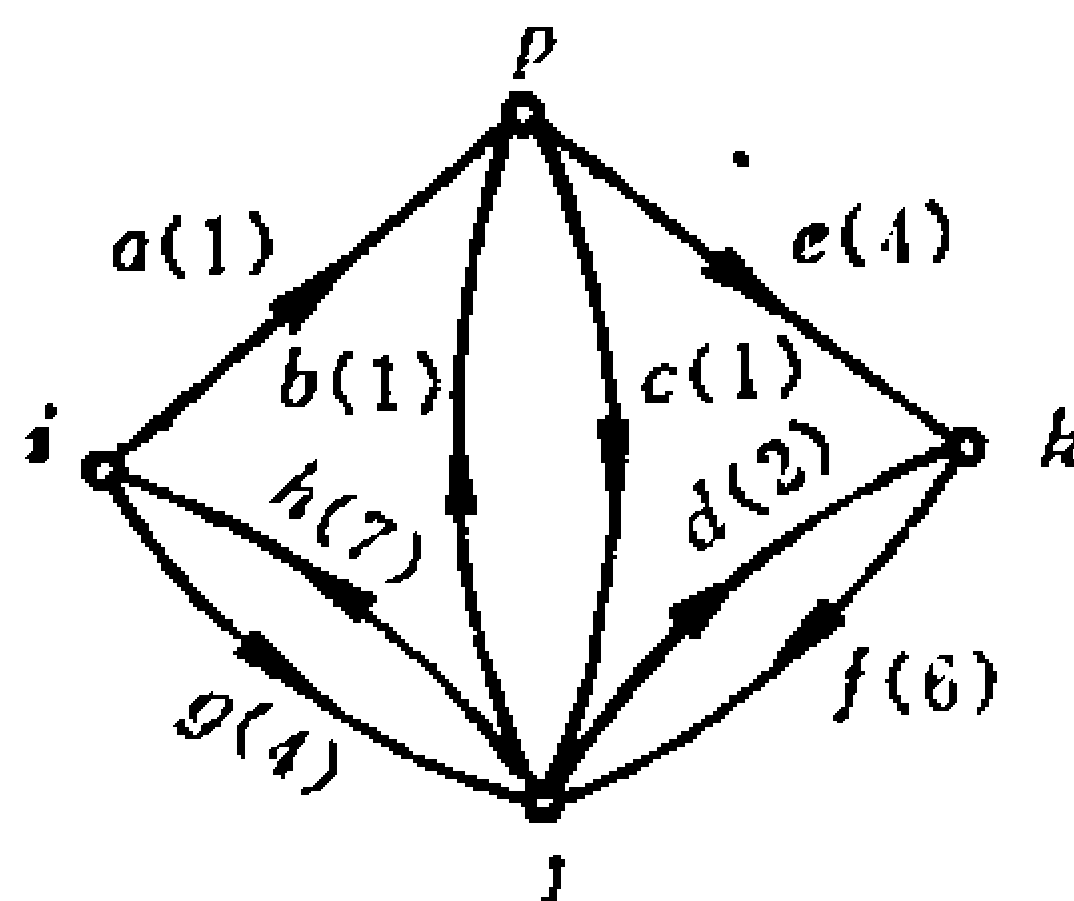


图12-5-17　一个有向EWC网

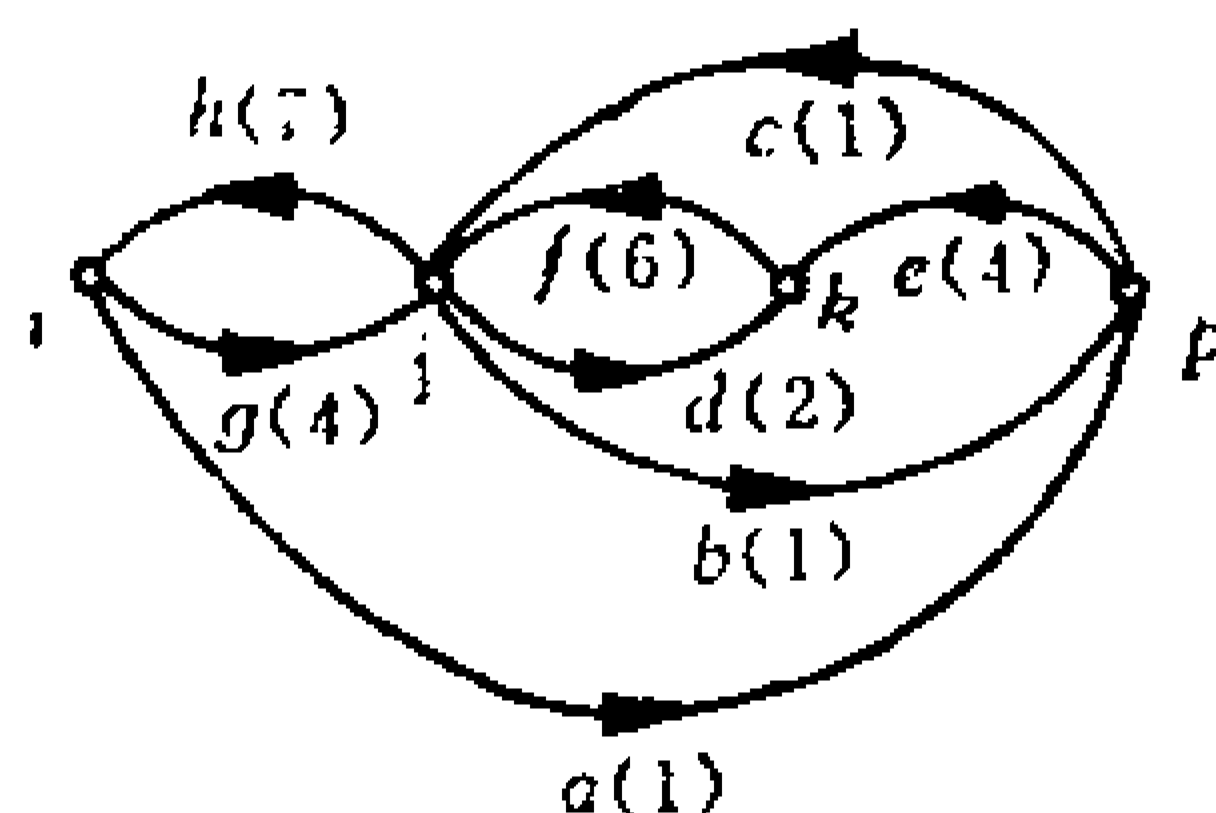


图12-5-18　G的一种画法，其顶点顺序由T的列序给出

在图 12-5-16 的 EWC 网 G 中，我们任取一条边 e_{pq}，其中 $q>p+1$，该边的边容量大于零。为了进行移量算法，我们选择回路C为 $(e_{pq}, e_{q\,q-1}, e_{q-1\,q-2}, \cdots, e_{p+1\,p})$，如图 12-5-19 所示。

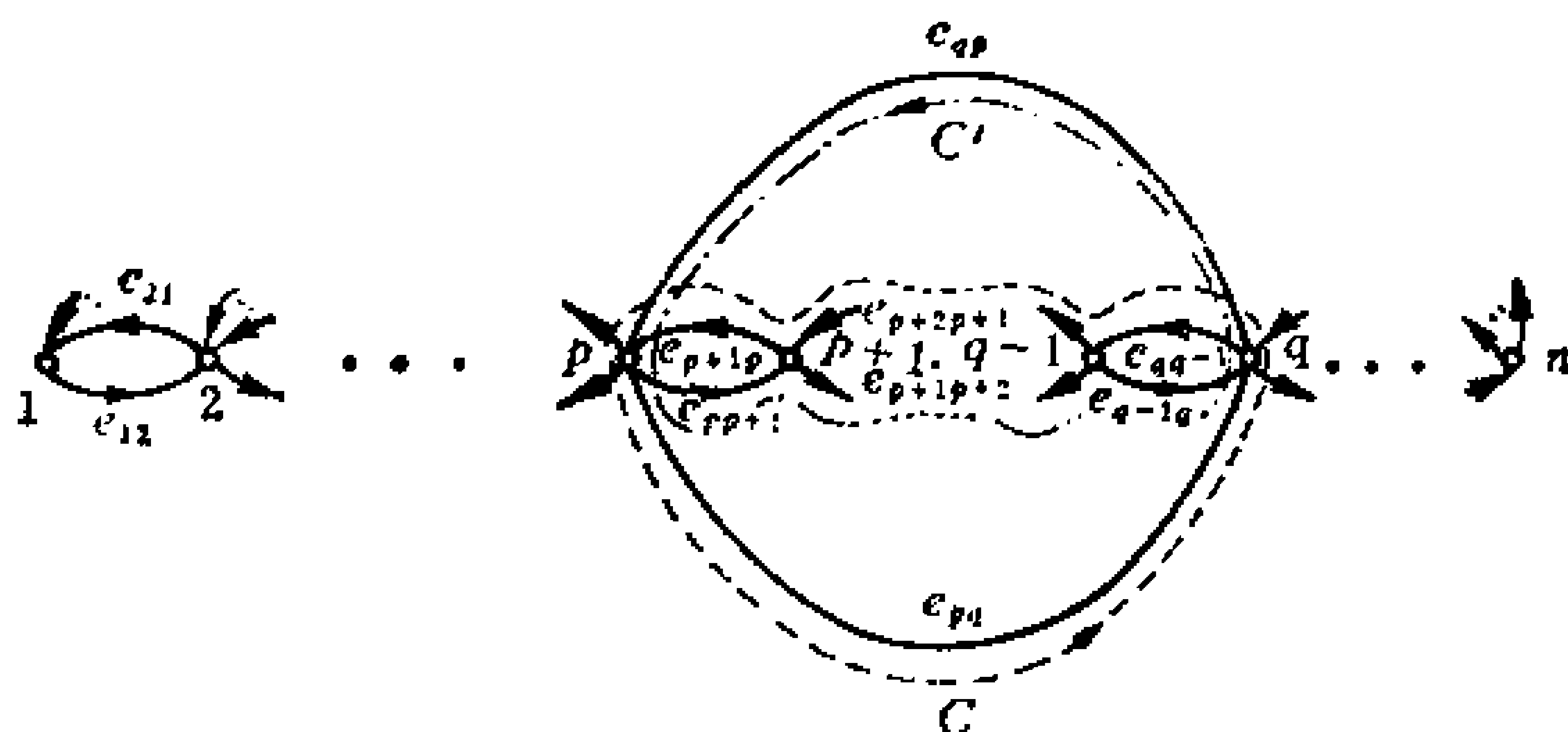


图12-5-19　有向回路C和对应有向回路C'

对应的有向回路C'也示于图中。现在我们运用移量算法，从C的每条边的边容量中减去 c_{pq}，使边 e_{pq} 的边容量变为零，如图 12-5-19所示。注意，我们同时在C'的每条边的边容量上加 c_{pq}。按照这个步骤，我们可以从网络中删去任意的边 e_{pq}，$q>p+1$。反复运用上述步骤，我们就可以删去所有边 e_{pq}，$(q>p+1)$，从而得到一个伪 EWC 网。注意，在运用该步骤时，网络中有可能产生负的边容量。然而，容量为负数的边仅是从顶点 p 连接到顶点 p-1 的边，$p=2, 3, \cdots, n$。并且，在一个有向 EWC 网中，边 e_{pp-1} 和 $e_{p-1\,p}$ 的边容量之和 $S=c_{pp-1}+c_{p-1\,p}$是非负的。而且，按照上述步骤，当 e_{pp-1} 的边容量减去 δ (>0) 时，边 $e_{p-1\,p}$ 的边容量就要增加 δ，因此总和 S 不变，而所得的伪 EWC 网就是基本结构网络了。

定理12-5-9　任何一个有向 EWC 网G都可以变成基本伪 EWC网G'，并且G和G'中边 e_{pq} 和 e_{qp} 的边容量之和相等。

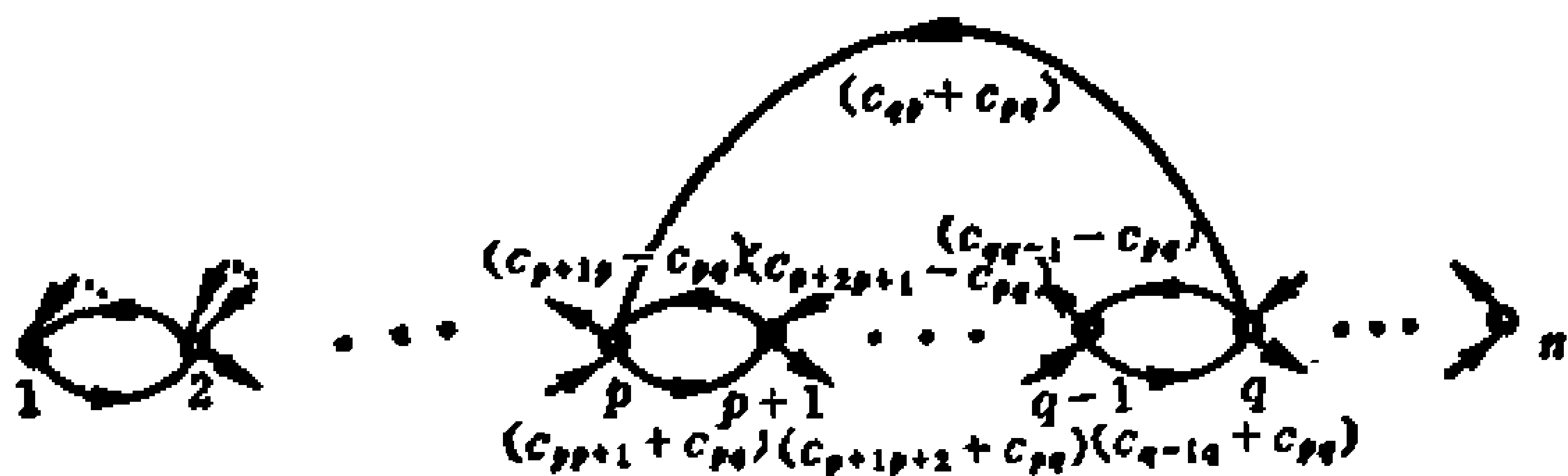


图12-5-20 移量算法的结果

例12-5-4 考虑图12-5-18中的EWC网（例12-5-3）．取有向回路C和C'如图12-5-21所示，我们可以用移量算法删去边b，如图12-5-22所示（注意图中边容量的变化）．现在利用如图所示的有向回路C_1和C_1'，就可以通过移量算法删去边a，得到如图12-5-23所示的基本伪EWC网。

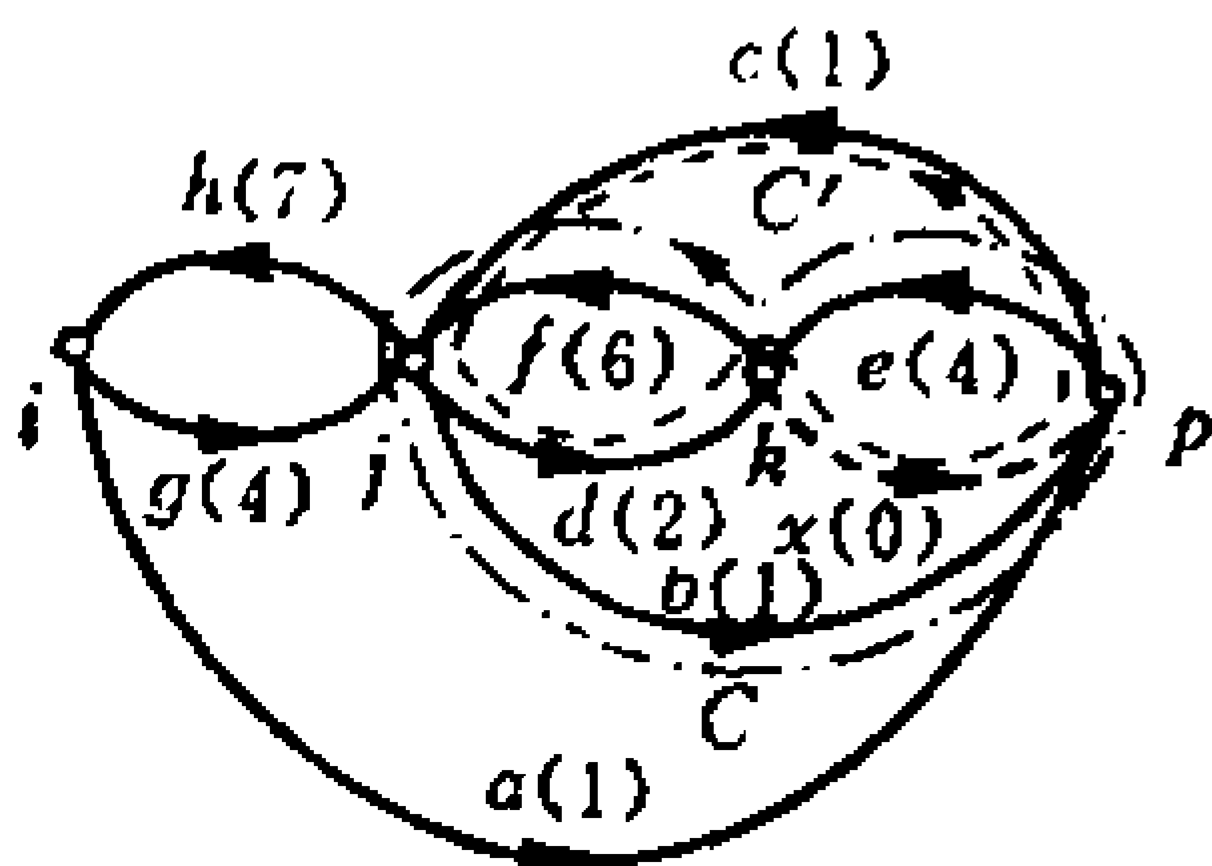


图12-5-21 有向回路C和C'

我们知道，任何一个有向EWC网都可以变成基本

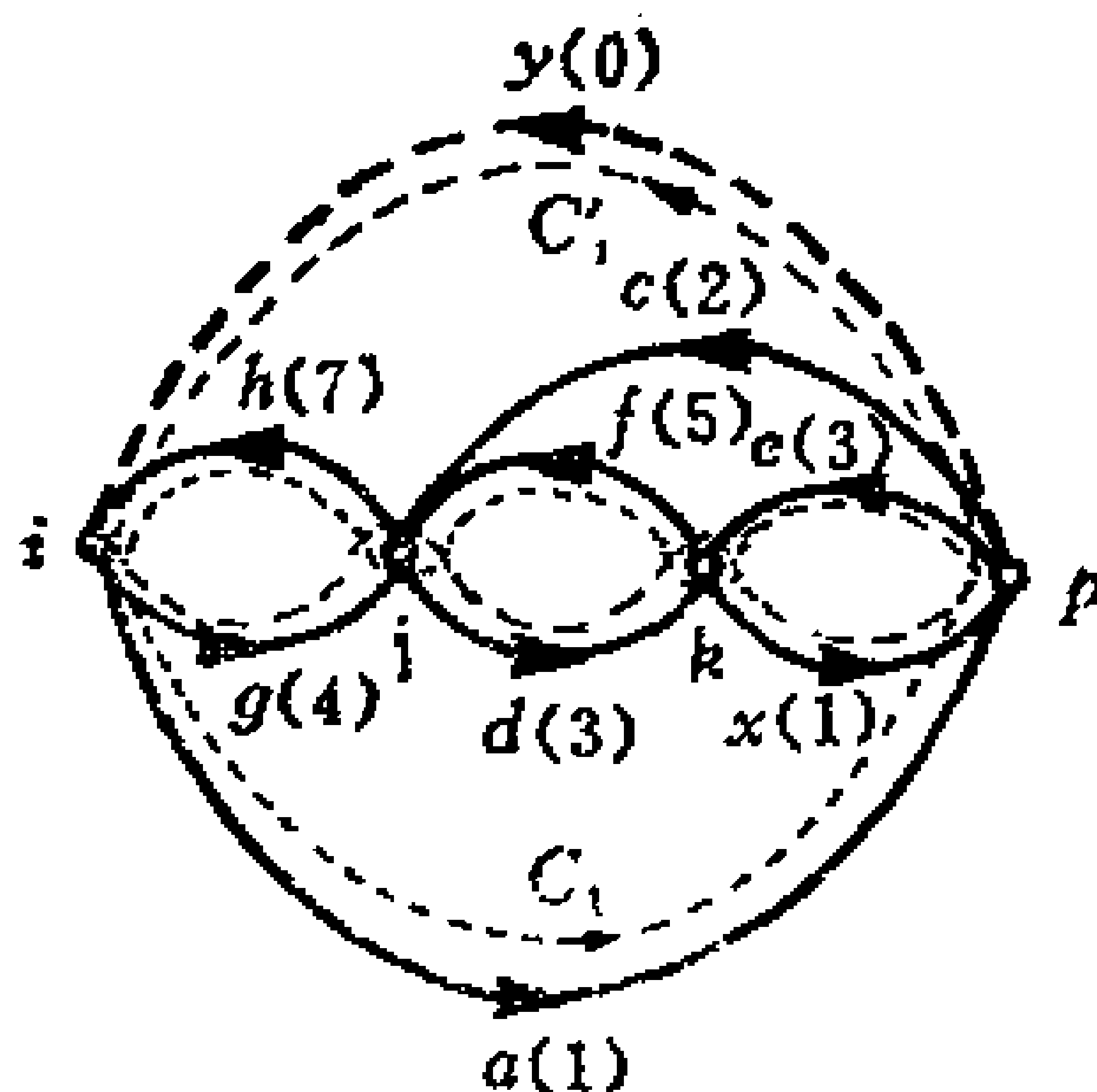


图12-5-22 有向回路C_1和C_1'

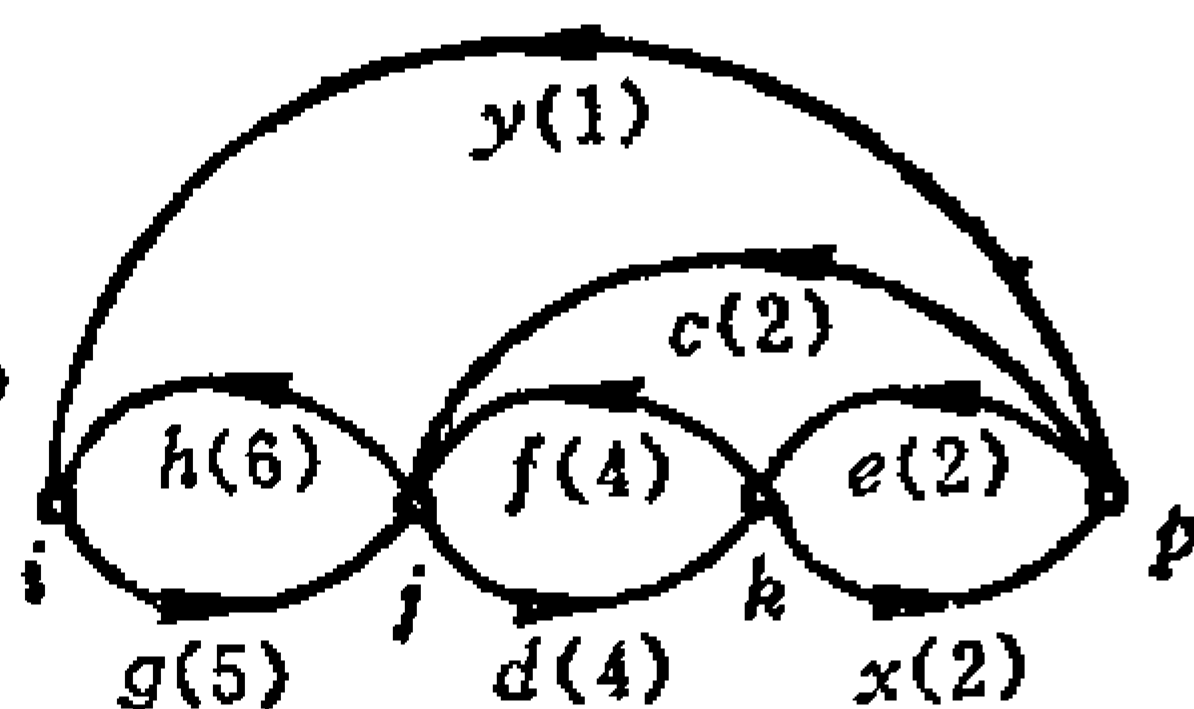


图12-5-23 一个基本伪EWC网

伪EWC网，因此可以将定理12-5-8修改为以下定理。

定理12-5-10 当且仅当存在一个满足式（12-5-28）的伪EWC网，其端限容量矩阵为给定矩阵T时，则T可实现为有向EWC网的端限容量矩阵。

12-6 损耗EWC网

在某些物理系统中，并非所有的流都能到达其终点。一个原因是，在系统中可能有亏损存在，例如管道的泄漏。为了表示这样的系统，我们来定义损耗有向EWC网，网络的每一条边赋以边效率α_p（$0\leqslant\alpha_p\leqslant 1$）。为理解边效率$\alpha_p$的含义，我们假设边$e_p$是连接在顶点$k$和$m$之间的，其定向是由$k$到$m$。若流$\psi$由顶点$k$进入$e_p$，那么流$\alpha_p\psi$经过边$e_p$后到达顶点$m$。因此，流$(1-\alpha_p)\psi$就可以看成边$e_p$所损耗的流。

为讨论损耗EWC网的性质，我们定义半割s的值$V[s(c)]$和$V[s(\alpha c)]$如下：

$$V[s(c)]=\sum_{e_p\in s}c_p \tag{12-6-1}$$

$$V[s(\alpha c)]=\sum_{e_p\in s}\alpha_p c_p \tag{12-6-2}$$

其中α_p和c_p分别为边e_p的边效率和边容量。

由于流的损耗是在边中发生的，于是可对损耗EWC网G分配流如下，设$P_{r_{ij}}$是G中一条从顶点i和顶点j的有向路径，其边列为（$e_1,e_2,\cdots,e_n$），则分配一个流$\psi_{r_{ij}}$给路径$P_{r_{ij}}$就意味着对边$e_p(p=1,2,\cdots,n)$增加的边流$\psi'(e_p)$为

$$\psi'(e_1)=\psi_{r_{ij}},\psi'(e_2)=\alpha_1\psi'(e_1),\ \cdots,\ \psi'(e_n)=\alpha_{n-1}\psi'(e_{n-1}) \tag{12-6-3}$$

这里$\psi'(e_p)$必须满足以下条件：

$$\psi'(e_p)\leqslant c_p-\psi_0(e_p) \quad p=1,2,\cdots,n \qquad (12\text{-}6\text{-}4)$$

其中$\psi_0(e_p)$是原来已分配给边e_p的流。因此，分配给边e_p的全部流变成$\psi'(e_p)+\psi_0(e_p)$。

设P_{1ij}, P_{2ij}, $\cdots$, P_{mij}是G中从顶点i到顶点j的所有可能有向路径，那么为分配总流$\psi_{ij}=\sum_{p=1}^{m}\psi_{pij}$，就可以将流$\psi_{1ij}$, ψ_{2ij}, $\cdots$, ψ_{mij}分别分配给P_{1ij}, P_{2ij}, $\cdots$, P_{mij}。显然，分配给G的任何流ψ_{ij}都可以分解为分别分配给有向路径P_{1ij}, P_{2ij}, $\cdots$, P_{mij}的流ψ_{1ij}, ψ_{2ij}, $\cdots$, ψ_{mij}。

因为若设一个损耗有向EWC网的所有边效率$a_p=1$，它就变成（无损耗）有向EWC网，所以损耗EWC网的任何依赖于a的性质，都与无损耗网络的性质密切相关。我们将要说明，和无损耗网络一样，在损耗EWC网中，存在一个确定最大流的割集。在损耗EWC网中，饱和边，饱和割集和基本饱和割集的定义与无损耗EWC网的相应定义是一样的。也就是说，若进入边e的总边流$\psi(e)$等于该边的边容量，则说这条边是饱和的。如果分离i和j的割S_{ij}的半割s_{ij}中每条边都是饱和的，则说S_{ij}是饱和的。并且，如果饱和割集S_{ij}的半割s_{ji}的各条边上所通过的流为零，则说S_{ij}是基本饱和割集。利用这些定义，我们就可以讨论损耗EWC网了。

定理12-6-1 假定已将从顶点i到顶点j的流ψ_{ij}分配给损耗EWC网G.如果不存在分离i和j的饱和割集,那么必存在一条从i到j的有向路径，使得可以将一个附加流$\psi>0$分配给这条路径。

这个定理的证明与引理12-1-1的证明正好相同。从该证明可清楚地知道，当我们分配一个流ψ_{ij}时，如果存在一个分离i和j的饱和割集，那么就不能再分配任一从i到j的附加非零流。

定理12-6-2 存在一个从 i 到 j 的流 ψ_{ij}，如果将它分配给一个损耗有向 EWC 网，那么至少会产生一个基本饱和割集。

证明： 假定把一个流 ψ_{ij} 分配给一个损耗有向 EWC 网 G，得到一些饱和割集 S_{ij}，但这些割集都不是基本饱和割集。那么，采用与定理 12-1-1 的证明相同的步骤，就可以修改分配流 ψ_{ij} 的方式，使我们能够分配从 i 到 j 的附加流。可以证明，我们能够增加从 i 到 j 的流，直到出现一个分离顶点 i 和 j 的基本饱和割集为止。（证毕）

对于无损耗 EWC 网的情况，若我们得到一个基本饱和割集 S_{ij}，那么流 ψ_{ij} 就是最大流。另一方面，如果 EWC 网是有损耗的，即使分配流 ψ_{ij} 产生了一个基本饱和割集，这个流也不一定就是最大流。这一点容易从下面的例子看出。考虑图12-6-1所示的损耗 EWC 网，图中每条边的旁边括弧中的第一个数字是边容量，而第二个数字是边效率。通过分配一个如图所示的流，使割集 $S_{ij}=(c)$ 成为基本饱和割集。但是，无论是进入顶点 i 的流还是离开顶点 j 的流，都不是最大流，因此我们可以分配一个从 i 到 j 的更大的流，如图12-6-2所示。

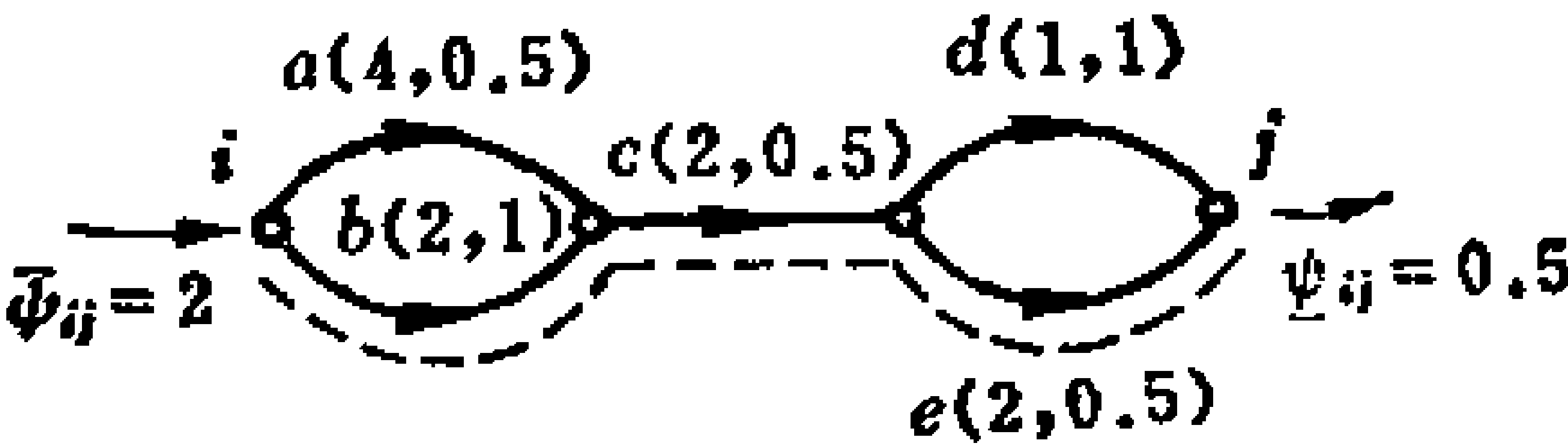


图12-6-1 损耗EWC网

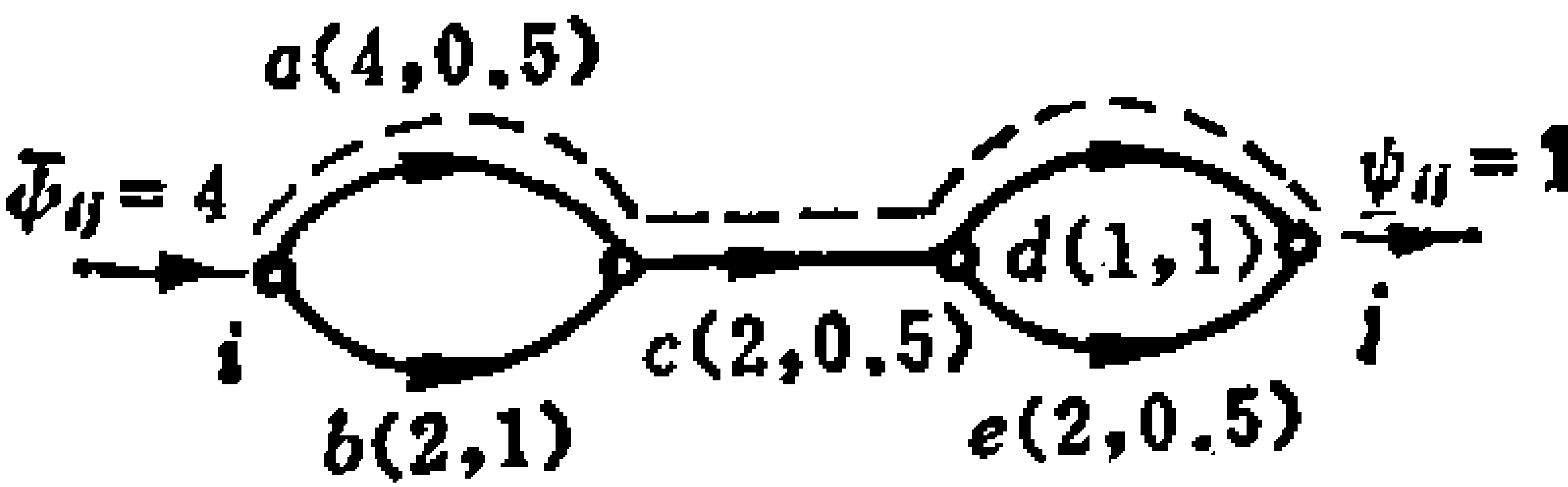


图12-6-2 分配给损耗EWC网的流ψ_{ij}

这个例子表明，可以有许多种流 ψ_{ij} 可供分配，使我们都能得到基本饱和割集 S_{ij}，并且，在分配流 ψ_{ij} 时，从顶点 i 进入的流 ψ_{ij} 与从顶点 j 出来的流不同。因此我们定义损耗EWC网的端限容量如下，它与无损耗 EWC 网的端限容量的定义稍有不同。

定义12-6-1 为了在顶点 j 接收到最大流，对网络 G 所能分配的从 i 到 j 的最大流 ψ_{ij} 称为源端限容量，记为 $\bar{t}_{ij}$。当分配了一个最大流时，在顶点 j 所能接收到的最大流量称为汇端限容量，记为 $\underline{t}_{ij}$。

必须注意，若网络中存在一个割集 S_{ij}，以致在分配任何至少能产生一个基本饱和割集的流 ψ_{ij} 时，就可以使 S_{ij} 变成基本饱和割集，那么这个割集称为流 ψ_{ij} 的对应割集。因为在分配最大流 ψ_{ij} 时，S_{ij} 显然是一个基本饱和割集，所以我们说，S_{ij} 是源端限容量 $\bar{t}_{ij}$ 和汇端限容量 $\underline{t}_{ij}$ 的对应割集。根据这个定义，我们有另一个定理。

定理12-6-3 对于一个损耗有向 EWC 网的任意三顶点 i，j，k：

有

$$\underline{t}_{ij} \geqslant \underline{t}_{kj} \qquad (12\text{-}6\text{-}5)$$

或有

$$\bar{t}_{ij} \geqslant \bar{t}_{ik} \qquad (12\text{-}6\text{-}6)$$

证明： 设 $S_{ij} = \mathscr{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1) \cup \mathscr{E}(\bar{\Omega}_1 \times \Omega_1)$ 是 $\bar{t}_{ij}$ 和 $\underline{t}_{ij}$ 的对应割集，其中 $i \in \Omega_1$，$j \in \bar{\Omega}_1$。设 $S_{ik} = \mathscr{E}(\Omega_2 \times \bar{\Omega}_2) \cup \mathscr{E}(\bar{\Omega}_2 \times \Omega_2)$ 是 $\bar{t}_{ik}$ 的对应割集，其中 $i \in \Omega_2$，$k \in \bar{\Omega}_2$。又设 $S_{kj} = \mathscr{E}(\Omega_3 \times \bar{\Omega}_3) \cup \mathscr{E}(\bar{\Omega}_3 \times \Omega_3)$ 是 t_{kj} 的对应割集，其中 $k \in \Omega_3$，$j \in \bar{\Omega}_3$。

情形 1 顶点 k 在 Ω_1 中。这里又分两种情况，取决于 $j \in \bar{\Omega}_2$ 或 $j \in \Omega_2$。

a．当 $j \in \bar{\Omega}_2$ 时，有 $i \in \Omega_3$ 或 $i \in \bar{\Omega}_3$，如图 12-6-3所示。对于

$i\in\Omega_3$，S_{ki} 和 S_{ij} 都必定是最大流 ψ_{ij} 的基本饱和割集，因此

$$\underline{t}_{ij}=\underline{t}_{ki} \tag{12-6-7}$$

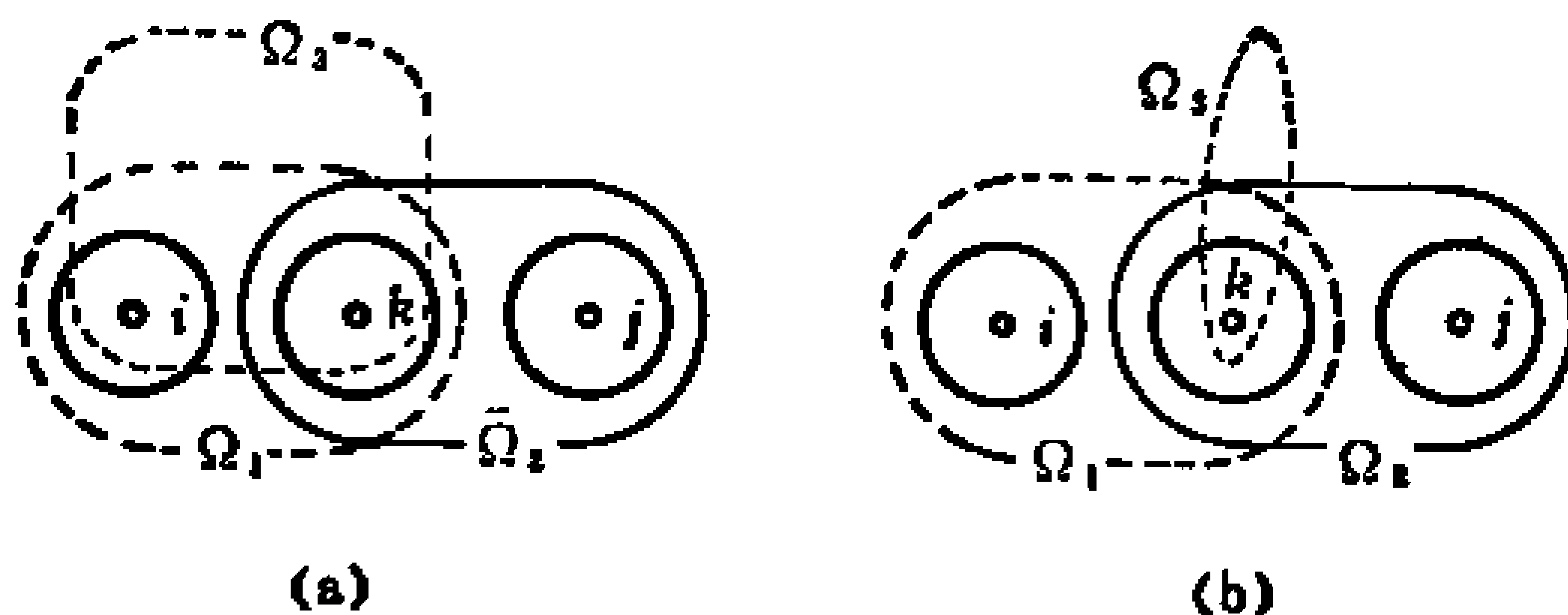


图12-6-3 饱和割集的位置

对于 $i\in\bar{\Omega}_3$，S_{ij} 可能是最大流 ψ_{ki} 的基本饱和割集，但也可能不是。因此

$$\underline{t}_{ij}\geqslant\underline{t}_{ki} \tag{12-6-8}$$

b．当 $j\in\Omega_2$ 时，情况取决于 $i\in\Omega_3$ 或 $i\in\bar{\Omega}_3$，如图12-6-4所示。对于 $i\in\Omega_3$，S_{ij} 必定也是最大流 ψ_{kj} 的基本饱和割集，于是就有

$$\underline{t}_{ij}=\underline{t}_{kj} \tag{12-6-9}$$

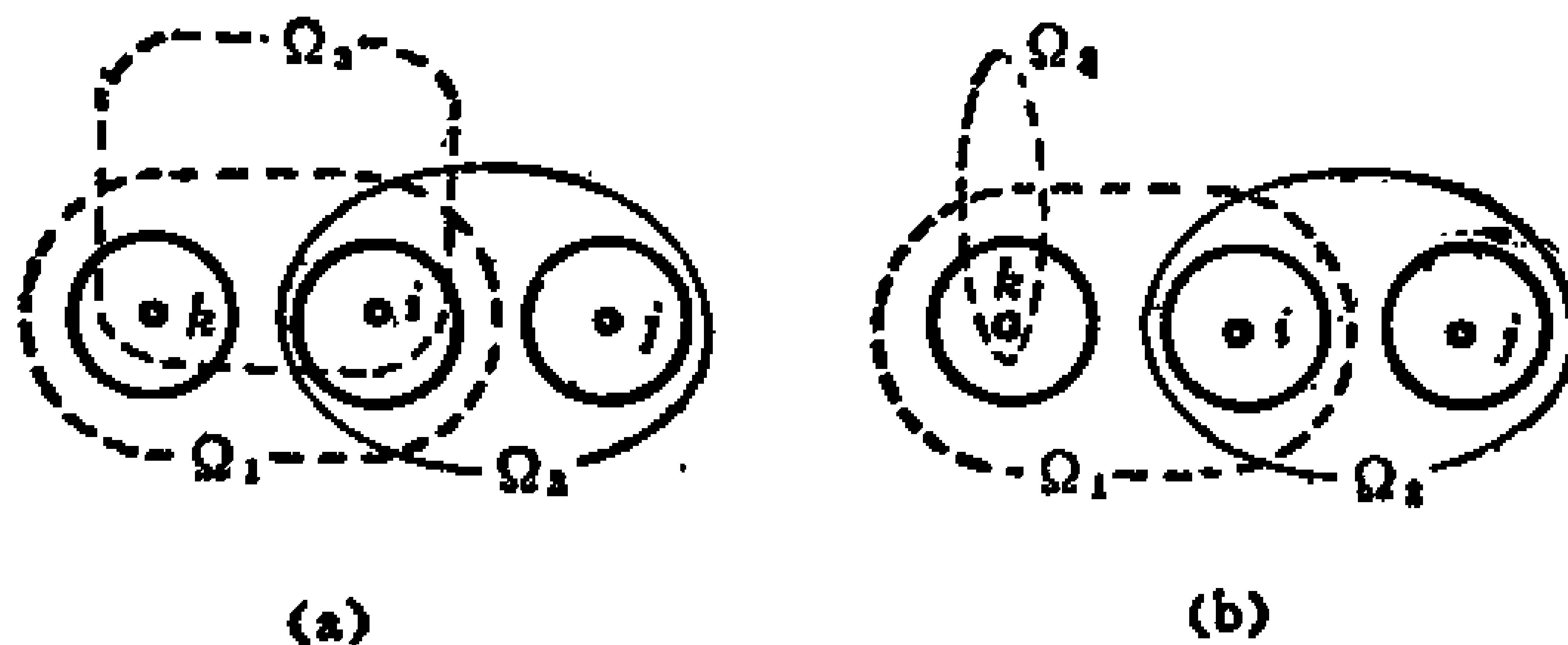


图12-6-4 饱和割集的位置

对于 $i\in\bar{\Omega}_3$，S_{ij} 不一定是 ψ_{kj} 的基本饱和割集，因此

$$\underline{t}_{ij}\geqslant\underline{t}_{kj} \tag{12-6-10}$$

情形 2　顶点 k 在$\bar{\Omega}_1$中。我们只需考虑$\bar{\Omega}_2\subset\bar{\Omega}_1$的情形，这样或有 $j\in\Omega_2$，或有 $j\in\bar{\Omega}_2$。假定 $j\in\Omega_2$，如图 12-6-5 所示，则 S_{ij}不须是 ψ_{ik} 的基本饱和割集，因此

$$\bar{t}_{ij}\geqslant\bar{t}_{ik} \tag{12-6-11}$$

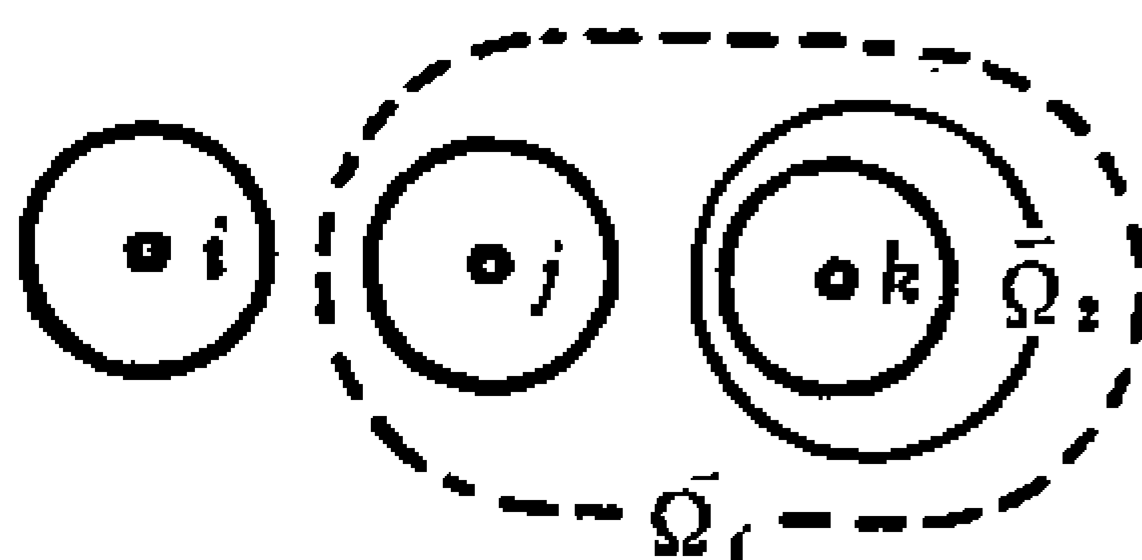


图12-6-5　基本饱和割集的位置

如果 $j\in\bar{\Omega}_2$，S_{ij} 也必定是对于 ψ_{ik} 的基本饱和割集，因此

$$\bar{t}_{ij}=\bar{t}_{ik} \tag{12-6-12}$$

（证毕）

下面，我们来定义与无损耗 EWC 网的端限容量矩阵类似的矩阵。

定义12-6-2　源端限容量矩阵$\bar{T}$定义为

$$\bar{T}=[\bar{t}_{ij}] \tag{12-6-13}$$

而汇端限容量矩阵 $\underline{T}$定义为

$$\underline{T}=[\underline{t}_{ij}] \tag{12-6-14}$$

其中 $\bar{t}_{ii}=\underline{t}_{ii}=d$。注意，即使损耗 EWC 网是无向的，$\bar{T}$和$\underline{T}$一般也不是对称的。

正如在无损耗EWC网中所定义的一样，我们定义$\bar{T}$的S子阵$\bar{M}$为：对所有的 i，划去$\bar{T}$的 i 行或 i 列得到的子阵。对$\underline{T}$的S子阵$\underline{M}$也可用同样的方法下定义。我们把 S 子阵$\bar{M}$和$\underline{M}$称为 $\bar{T}$ 和 $\underline{T}$

的"S子阵对"，如果它们满足：(1)若$\overline{T}$的i行在$\overline{M}$中，则$\underline{T}$的i行也在$\underline{M}$中；(2)若$\overline{T}$的j列在$\overline{M}$中，则$\underline{T}$的j列也在$\underline{M}$中。根据这些定义，我们可以得到源端限容量矩阵与汇端限容量矩阵的性质如下。

定理12-6-4 对于$\underline{T}$和$\overline{T}$的任何元素$\underline{t}_{rs}$和$\overline{t}_{rs}$，存在$\underline{T}$和$\overline{T}$的一对S子阵$\underline{M}$和$\overline{M}$，使得$\underline{t}_{rp}$是$\underline{M}$中p列（对所有的p）的最大元素，$\overline{t}_{qs}$是$\overline{M}$中q行（对所有的q）的最大元素。

证明：设$S_{rs}=\mathscr{S}(\Omega_r\times\overline{\Omega}_r)\cup\mathscr{S}(\overline{\Omega}_r\times\Omega_r)$是$\overline{t}_{rs}$的对应割集，其中$r\in\Omega_r$，$s\in\overline{\Omega}_r$。设$\underline{M}$和$\overline{M}$是$\underline{T}$和$\overline{T}$的$S$子阵对，它们的行对应于$\Omega_r$中的顶点，它们的列对应于$\overline{\Omega}_r$中的顶点。那么，由定理12-6-3的证明，我们有

$$\underline{t}_{rs}\geqslant\underline{t}_{ks}\qquad 对所有\ k\in\Omega_r \tag{12-6-15}$$

以及

$$\overline{t}_{rs}\geqslant\overline{t}_{rk}\qquad 对所有k\in\overline{\Omega}_r \tag{12-6-16}$$

因此，对$\underline{M}$的列s和$\overline{M}$的行r，定理是正确的。

考虑$\underline{t}_{rp}$，其中$p\in\overline{\Omega}_r$。设$S_{rp}=\mathscr{S}(\Omega_{r'}\times\overline{\Omega}_{r'})\cup\mathscr{S}(\overline{\Omega}_{r'}\times\Omega_{r'})$是$\underline{t}_{rp}$的对应割集，其中$r\in\Omega_{r'}$，$p\in\overline{\Omega}_{r'}$。如果$S_{rs}$不是对于$\underline{t}_{rp}$的基本饱和割集，那么$\overline{\Omega}_{r'}$是$\overline{\Omega}_r$的子集。因而对所有$k\in\Omega_r\subset\Omega_{r'}$，$\underline{t}_{rp}\geqslant\underline{t}_{kp}$。另一方面，如果$S_{rs}$是在$\underline{t}_{rp}$下的基本饱和割集，我们将$S_{rs}$（而不是将$S_{rp}$）看作是$\underline{t}_{rp}$的对应割集，因此

$$\underline{t}_{rp}\geqslant\underline{t}_{kp}\qquad 对所有\ k\in\Omega_r \tag{12-6-17}$$

所以$\underline{t}_{rp}$是$\underline{M}$中p列（对所有p）的最大元素。对于$\overline{t}_{qs}\geqslant\overline{t}_{qk}$（对所有$k\in\overline{\Omega}_r$）的证明与上面的证明几乎是相同的。（证毕）

注意，对于无损耗情况，定理12-6-4变为在定理12-5-4中所给出的端限容量矩阵的S子阵条件。

现在，我们已经介绍了损耗EWC网的一些基本性质。然而

还有许多问题尚待解决。其中最重要的问题之一是确定一个矩阵实现为损耗EWC网的$\underline{T}$ 或$\bar{T}$的可实现性条件。要计算 $\underline{t}_{ij}$ 和 $\bar{t}_{ij}$ 的值，还没有简单的方法。在某些损耗 EWC 网中，一个从 i 进入的，比 $\bar{t}_{ij}$ 小的流，到达 j 时有可能变成与$\underline{t}_{ij}$相等的流。因此，我们可以定义$\bar{\bar{t}}_{ij}$为要使 j 点接收到的流等于 $\underline{t}_{ij}$，在 i 点需进入的最小流。那么容易看出，定理12-6-3对$\bar{\bar{t}}_{ij}$ 和$\underline{t}_{ij}$ 也是成立的。如果我们定义$\bar{\bar{T}} = [\bar{\bar{t}}_{ij}]$，则定理 12-6-4 对于$\bar{\bar{T}}$ 和 $\underline{\underline{T}}$都将成立。

显然，本节给出的每个定理都可应用于无向损耗 EWC 网。但是，在定义上必须作某些修改。例如，基本饱和割集的定义就应修改。

12-7 EWC网的流可靠度

当一个 EWC 网的边在传输中可能失效时，就不能指望一个给定的流总能全部到达终点。但是，在大部分时间里，这个流中的一部分有可能到达终点。在网络可能失效的情况下，一个给定流可以期望它到达终点的部分所占的百分比叫做流可靠度，它依赖于 EWC 网的（拓扑）结构，边可靠度，流量以及所给流的起点和终点等因素。为了得到流可靠度的表达式，考虑一个代表实际系统的 EWC 网G，例如数据传输系统。在这样的系统中，流 ψ_{ij} 表示单位时间内从 i 到 j 的数据传输量。假定 ψ_{ij}是由 G 在时期T内传输的流，则G在T时期内所处理的总流应为

$$\Phi_{ij} = T\psi_{ij} \tag{12-7-1}$$

如果 ψ_{ij} 等于G中从 i 到 j 的最大流（即端限容量 t_{ij}），则总流为

$$\Phi_{ij} = Tt_{ij} \tag{12-7-2}$$

显然，这就是T时期内从 i 到 j 的最大流量。

假定在T时期内，有ΔT时段，边 e 因失效不能传输数据了，

而在同一时期T内其他所有边都工作正常。那么，在连续传输最大流的情况下，总流$\Phi_{ij}(\bar{e})$为

$$\Phi_{ij}(\bar{e}) = Tt_{ij} - \Delta T[t_{ij} - t_{ij}(\bar{e})] \qquad (12\text{-}7\text{-}3)$$

其中$t_{ij}(\bar{e})$是从G中去掉边e后由i到j的最大流。在ΔT时段内边e失效时的总流$\Phi_{ij}(\bar{e})$与无失效的总流Φ_{ij}之比$R(t_{ij})$为

$$R(t_{ij}) = 1 - \frac{\Delta T}{T}\left[1 - \frac{t_{ij}(\bar{e})}{t_{ij}}\right] \qquad (12\text{-}7\text{-}4)$$

例12-7-1 考虑图12-7-1的EWC网，假定在$T=10$的时间内传输的流$\psi_{ij}=t_{ij}=3$，则总流$\Phi_{ij}=30$。假定边a在T时期内失效的时间$\Delta T=3$，则总流$\Phi_{ij}(\bar{a})=27$，这种情况的$R(t_{ij})$就是0.9。

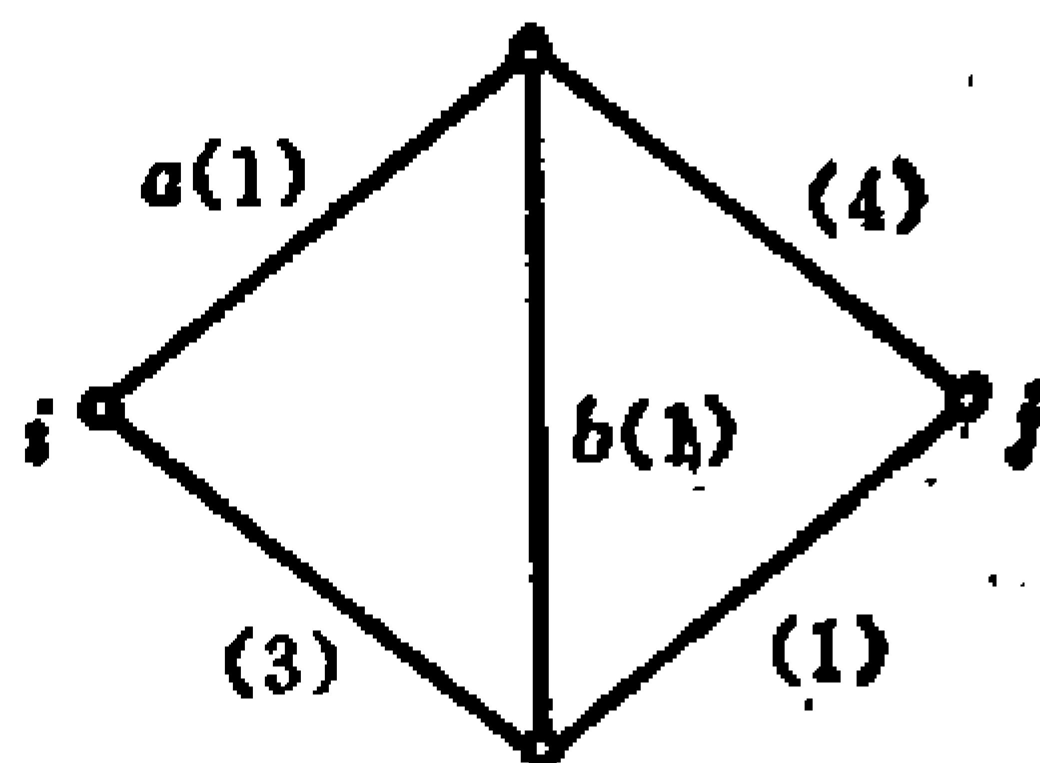


图12-7-1 EWC网

若用边e的失效概率$f(e)$代替$\Delta T/T$，式(12-7-4)就变为

$$R(t_{ij}) = 1 - f(e)[1 - T(\bar{e})] \qquad (12\text{-}7\text{-}5)$$

其中

$$T(\bar{e}) = \frac{t_{ij}(\bar{e})}{t_{ij}} \qquad (12\text{-}7\text{-}6)$$

这里$T(\bar{e})$称为边e失效时的阈级。为了求出在若干条边都可能失效的情况下的$R(t_{ij})$，我们定义符号$T(\overline{e_{p_1}, e_{p_2} \cdots e_{p_k}})$如下。

定义12-7-1 符号$T(\overline{e_{p_1} e_{p_2} \cdots e_{p_k}})$表示边$e_{p_1}, e_{p_2}, \cdots, e_{p_k}$失效时的阈级，它等于

$$T(\overline{e_{p_1} e_{p_2} \cdots e_{p_k}}) = \frac{t_{ij}(\overline{e_{p_1} e_{p_2} \cdots e_{p_k}})}{t_{ij}} \qquad (12\text{-}7\text{-}7)$$

其中$t_{ij}(\overline{e_{p_1} e_{p_2} \cdots e_{p_k}})$是在删去边$e_{p_1}, e_{p_2}, \cdots, e_{p_k}$时从$i$到$j$的最大流。

例如，在图12-7-1中，边 a 失效时的阈级为 $T(\bar{a})=\frac{2}{3}$。在同一图中，边 a 和 b 都失效时的阈级为 $T(\overline{ab})=\frac{1}{3}$。

当网络 G 中每条边的失效概率为 $f(e_p)$（或可靠度 $r(e_p)=1-f(e_p)$）时，传输最大流时的 $R(t_{ij})$ 为

$$R(t_{ij})=1-\sum F(e_{p_1}e_{p_2}\cdots e_{p_k})\left[1-T(\overline{e_{p_1}e_{p_2}\cdots e_{p_k}})\right] \tag{12-7-8}$$

其中 $F(e_{p_1}e_{p_2}\cdots e_{p_k})$ 是恰有边 $e_{p_1}, e_{p_2}, \cdots, e_{p_k}$ 失效的概率，$\sum$ 表示对边失效的所有可能情况求和。式(12-7-8)称为“传输最大流下的流可靠度”。

例12-7-2 考虑图 12-7-2 中的EWC网，设输入点为 i，输出点为 j，阈级为

$$T(\bar{a})=\frac{1}{5},\quad T(\bar{b})=\frac{4}{5},\quad T(\bar{c})=0,\quad T(\overline{ab})=0,$$

$$T(\overline{ac})=0,\quad T(\overline{bc})=0,\quad T(\overline{abc})=0$$

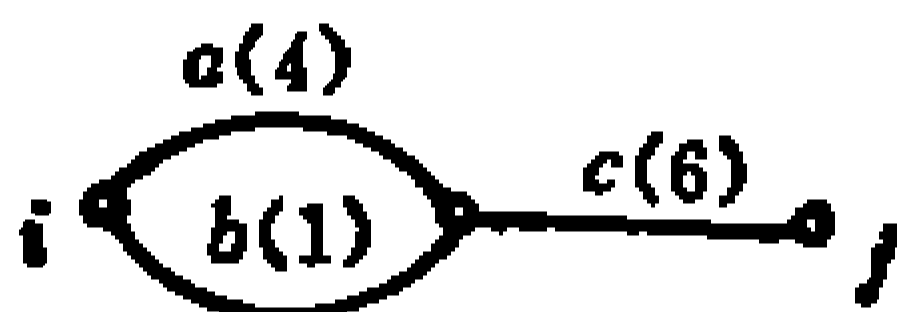


图12-7-2 EWC网

设每一条边的失效概率为

$$f(a)=0.1,\quad f(b)=0.2,\quad f(c)=0.3$$

则在式(12-7-8)中用到的失效概率为

$$F(a)=0.056,\quad F(b)=0.126,\quad F(c)=0.216$$

$$F(ab)=0.014,\quad F(ac)=0.024,\quad F(bc)=0.054$$

$$F(abc)=0.006$$

因此传输最大流 $t_{ij}=5$ 下的流可靠度为

$$R(t_{ij})=0.616$$

假定我们不是传输最大流而是传输流 $\psi_{ij} \leqslant t_{ij}$. 又假定只有一条边 e 在ΔT内失效。则式(12-7-3)变为

$$\Phi_{ij}(\bar{e}) = T\psi_{ij} - \Delta T[\psi_{ij} - \psi_{ij}(\bar{e})] \qquad (12\text{-}7\text{-}9)$$

其中

$$\psi_{ij}(\bar{e}) = \min\{\psi_{ij}, t_{ij}(\bar{e})\} \qquad (12\text{-}7\text{-}10)$$

此式之所以正确是因为若 $\psi_{ij} \leqslant t_{ij}(\bar{e})$，则再分配一个给定流时，边 e 的失效不会影响 ψ_{ij} 的传输。另一方面，若 $\psi_{ij} > t_{ij}(\bar{e})$，则网络除 e 外的剩余部分所能负荷的最大流显然就不是ψ_{ij}，而是$t_{ij}(\bar{e})$ 这个结果是假设网络中没有储存流的地方而得到的。换句话说，如果有储存流的地方，就可以把因边失效而不能传输的那一部分流储存起来，直到边 e 修复，那么只要 $\psi_{ij} < t_{ij}$，在修复边 e 后传输这些储存的流还是有可能的。因此，带有储存点的总流 $\Phi_{ij}(\bar{e})$ 比式(12-7-9)所给出的流要大些。但是在实际情况中，要储存的流量 $\Delta T[\psi_{ij} - \psi_{ij}(\bar{e})]$ 可能太大而处理不了。如果 $t_{ij} - \psi_{ij}$ 很小，在修复边 e 后，可能要用很长的时间传输 $\Delta T[\psi_{ij} - \psi_{ij}(\bar{e})]$.因此在本节中，我们假定没有储存的地方。根据这一假设，在传输给定流 ψ_{ij} 下，式(12-7-4) 中的 $R(\psi_{ij})$ 为

$$R(\psi_{ij}) = 1 - \frac{\Delta T}{T}\left[1 - \min\left\{1, \frac{t_{ij}(\bar{e})}{\psi_{ij}}\right\}\right] \qquad (12\text{-}7\text{-}11)$$

用边的失效概率来代替 $\Delta T/T$，上式变为

$$R(\psi_{ij}) = 1 - \sum F(e_{p_1} e_{p_2} \cdots e_{p_k}) \times \left[1 - \min\left\{1, \frac{t_{ij}}{\psi_{ij}} T(\overline{e_{p_1} e_{p_2} \cdots e_{p_k}})\right\}\right] \qquad (12\text{-}7\text{-}12)$$

这是在传输流 ψ_{ij} 下的流可靠度。例如，若 $\psi_{ij} = 4$，则图12-7-2中EWC网的流可靠度$R(\psi_{ij} = 4)$为

$$R(\psi_{ij} = 4) = 0.644$$

它比最大流下的流可靠度要大些。

从式（12-7-12）可以看出，提高流可靠度有三种不同的方法。第一种方法是在网络中采用更可靠的介质，使每条边的失效概率 $f(e)$ 较小。但是，一般地说，当一种介质的可靠度已经足够高时，随着介质可靠性 $[1-f(e)]$ 的进一步提高，其价格将按指数律增长。因此用这种方法提高流可靠性是相当昂贵的。第二种方法是，在式（12-7-12）中，用减少 ψ_{ij} 的方法来增大 $\min\{1,(t_{ij}/\psi_{ij})T(\overline{e_{p_1}e_{p_2}\cdots e_{p_k}})\}$ 的项，也就是说，减少网络传输的流量。但是，这也不是经济的办法，因为减少要传输的流就意味着提高单位流量的传输价格。

第三种方法是改变网络的配置。这里又有两种方法。一种是改变所给网络的结构，换句话说，就是重新设计一个网络，使在某一给定规范下，流可靠度变大一些。当一个网络正处于设计阶段时，这种方法可能是很有用的。然而，这对于实际改造一个现有网络来说可能是不现实的。另一种方法是保持其结构，而交换一些边上分配的失效概率 $f(e)$。这相当于交换同类介质的位置。这种作法有可能改变

$$\sum F(e_{p_1}e_{p_2}\cdots e_{p_k})[1-\min\{1,(t_{ij}/\psi_{ij})T(\overline{e_{p_1}e_{p_2}\cdots e_{p_k}})\}]$$

因而有可能利用这种方法来提高流可靠度。

例12-7-3 考虑图 12-7-3 的EWC网，阈级为：

$$T(\bar{a})=\frac{1}{4},\quad T(\bar{b})=\frac{3}{4},\quad T(\bar{c})=\frac{3}{4},\quad T(\bar{d})=\frac{2}{4}$$

$$T(\overline{ab})=0,\ T(\overline{ac})=\frac{1}{4},\ T(\overline{ad})=\frac{1}{4},\ T(\overline{bc})=\frac{3}{4}$$

$$T(\overline{bd})=\frac{2}{4},\ T(\overline{cd})=0,\ T(\overline{abc})=0,\ T(\overline{abd})=0$$

$$T(\overline{acd})=0,\ T(\overline{bcd})=0,\ \text{and}\ T(\overline{abcd})=0$$

由于各边的失效概率是

$$f(a)=0.1,\quad f(b)=0.2,$$
$$f(c)=0.3,\quad f(d)=0.4$$

故传输最大流时的流可靠度$R(t_{ij})$为

$$R(t_{ij})=0.621$$

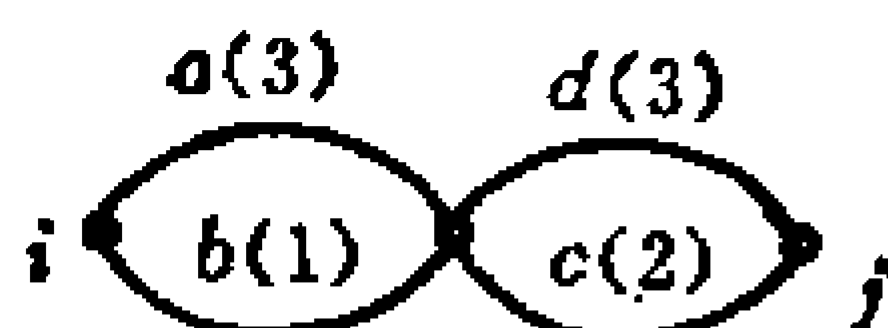


图12-7-3　EWC网

如果把流量 ψ_{ij} 减少到 3，则流可靠度提高为

$$R(\psi_{ij}=3)=0.7273$$

进一步将 ψ_{ij} 分别减少到 2 和 1，得到

$$R(\psi_{ij}=2)=0.823$$
$$R(\psi_{ij}=1)=0.8582$$

如果不是减少 ψ_{ij}，而是把边 a 换到一个新位置，如图12-7-4所示，则传输最大流时的流可靠度（各边仍有同样的失效概率）变为

新网络的 $R(t_{ij})=0.8648$

这是一个很大的改进。

如果我们不改变网络的结构，而只是交换边 a 和边 d 的失效概率，使$f(a)=0.4$，$f(d)=0.1$，则最大流下的流可靠度变为

$$R(t_{ij})=0.704$$

与0.621相比，这也是一个相当可观的改进。

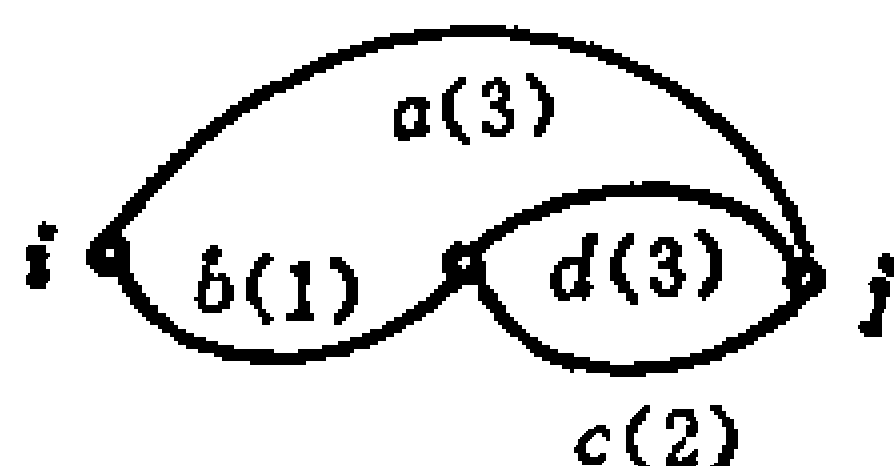


图12-7-4　调整边 a

假定允许交换任何边失效概率，那么怎样才能得到最大的流可靠度呢？这个问题的答案可能并不简单。但是，如果我们假设边的失效概率都很小，那么下面的定理所给出的答案就变得非常简单了。

定理12-7-1　设 e_r 是一个 EWC 网中的一条边，$r=1, 2, \cdots, n$。假定各边的失效概率 $f(e_r)$ 都很小。如果

$$f(e_1)\leqslant f(e_2)\leqslant\cdots\leqslant f(e_n)$$

从而

$$T(\bar{e}_1)\leqslant T(\bar{e}_2)\leqslant\cdots\leqslant T(\bar{e}_n)$$

那么流可靠度 $R(\psi_{ij})$ 是最大的。

例如，在图12-7-3所示的EWC网中，设 $f(a)=0.1$，$f(b)=0.2$，$f(c)=0.25$，$f(d)=0.15$，则 $f(a)\leqslant f(d)\leqslant f(b)\leqslant f(c)$。阈级为 $T(\bar{a})=\frac{1}{4}$，$T(\bar{b})=\frac{3}{4}$，$T(\bar{c})=\frac{3}{4}$，$T(\bar{d})=\frac{2}{4}$. 故据上述定理，交换概率 $f(a)$，$f(b)$，$f(c)$ 和 $f(d)$ 不增加流可靠度 $R(\psi_{ij})$。为了说明这一点，设 $\psi_{ij}=3$，则 $R(\psi_{ij}=3)=0.939$. 如果我们交换 a 和 d 的失效概率，使 $f(a)=0.15$，$f(d)=0.1$，那么流可靠度 $R(\psi_{ij}=3)$ 就变为 0.929.

定理12-7-1的证明：根据假设，$f(e_r)$ 都很小（对所有的r），式(12-7-12)可简化为

$$R(\psi_{ij})\approx 1-\sum F(e_p)\left[1-Q(\bar{e}_p)\right] \qquad (12\text{-}7\text{-}13)$$

其中

$$F(e_p)=f(e_p)\sum_{\substack{r=1\\r\neq p}}^{n}\left[1-f(e_r)\right] \qquad (12\text{-}7\text{-}14)$$

$$Q(\bar{e}_p)=\min\left\{1,\frac{t_{ij}}{\psi_{ij}}T(\bar{e}_p)\right\} \qquad (12\text{-}7\text{-}15)$$

从式(12-7-14)，显然由关系式

$$f(e_1)\leqslant f(e_2)\leqslant\cdots\leqslant f(e_n)$$

得到

$$F(e_1)\leqslant F(e_2)\leqslant\cdots\leqslant F(e_n)$$

由式(12-7-13)显然有，$\sum F(e_p)[1-Q(\bar{e}_p)]$ 越小，可得到的 $R(\psi_{ij})$ 越大. 因此，若我们能证明，当 $T(\bar{e}_1)\leqslant T(\bar{e}_2)\leqslant\cdots\leqslant T(\bar{e}_n)$ 的关系满足时，$\sum F(e_p)[1-Q(\bar{e}_p)]$ 最小，定理就得到了证明。

考虑两个正数的集合 $\{a_p;\ p=1,2,\cdots,n\}$ 和 $\{b_p;\ p=1,2,\cdots,n\}$。设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，$b_n\leqslant b_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant b_2\leqslant b_1$。

设总和 S_j 定义为

$$S_j=\sum_{r=1}^{n}a_{j_r}b_r \tag{12-7-16}$$

其中 $(j_1 j_2\cdots j_n)$ 是 $(1\ 2\cdots n)$ 的置换。设 $\{S_j\}$ 是用 $(1\ 2\cdots n)$ 的所有可能的置换所产生的总和 S_j 的集合。设总和 S_0 为

$$S_0=\sum_{r=1}^{n}a_r b_r \tag{12-7-17}$$

可以看出，$\{S_j\}$ 中除 S_0 外任一和 S_p 均可表为

$$S_p=\sum_{r=1}^{m}a_{j_r}b_r+\sum_{r=m+1}^{n}a_r b_r \tag{12-7-18}$$

其中 $(j_1 j_2\cdots j_m)$ 是 $(1\ 2\cdots m)$ 的置换，且 $j_m\neq m$。当 $m=n$ 时，式(12-7-18)右端第二项将不存在。设 $j_t(1\leqslant t\leqslant m)$ 为 m，则 S_p 可以改写为

$$S_p=\sum_{\substack{r=1\\ r\neq t}}^{m-1}a_{j_r}b_r+a_m a_t+a_{j_m}b_m+\sum_{r=m+1}^{n}a_r b_r \tag{12-7-19}$$

交换 a_{j_m} 和 a_m，我们得到一个新的和 S'_p：

$$S'_p=\sum_{\substack{r=1\\ r\neq t}}^{m-1}a_{j_r}b_r+a_{j_m}b_t+a_m b_m+\sum_{r=m+1}^{n}a_r b_r \tag{12-7-20}$$

因为 $a_{jm}\leqslant a_m$，$b_m\leqslant a_t$，显然 $S'_p\leqslant S_p$。同样如果 S'_p 不是 S_0，又可以得到另一个和 S''_p，使得 $S''_p\leqslant S'_p$。因此可以说，$\{S_j\}$ 中任一个和 S_j 都满足 $S_j\geqslant S_0$。换句话说，和 S_0 在 $\{S_j\}$ 中是最小的。

以 $a_r=F(e_r)$，$a_r=[1-Q(\bar{e}_r]$ 代入，我们可以说，若满足

$$[1-Q(\bar{e}_1)]\geqslant[1-Q(\bar{e}_2)]\geqslant\cdots\geqslant[1-Q(\bar{e}_n)]$$

则$\sum F(e_r)[1-Q(\bar{e}_r)]$就是最小的。因为$[1-Q(\bar{e}_r)]$是非负的，故上面结果给出

$$Q(\bar{e}_1)\leqslant Q(\bar{e}_2)\leqslant\cdots\leqslant Q(\bar{e}_n)$$

由式(12-7-15)中$Q(\bar{e}_r)$的定义，这个关系导出

$$T(\bar{e}_1)\leqslant T(\bar{e}_2)\leqslant\cdots\leqslant T(\bar{e}_n)$$

这就证明了定理。 （证毕）

根据这个定理，我们可以分配边的失效概率，使流可靠度变得最大，在实际的系统中，并不是所有的边失效概率都是可以交换的。但是，如果我们只考虑可以交换的边，这个定理就是成立的。例如，如果边$e_1, e_2, \cdots, e_k$的概率可以交换，在边$e'_1, e'_2, \cdots, e'_m$中也有一些可交换的边概率。那么，我们可以先交换$e_1, e_2, \cdots, e_k$的概率来求得此时可能达到的最大流可靠度，然后交换$e'_1, e'_2, \cdots, e'_m$的概率来得到最大流可靠度。

为增加最大流，在网络中插入一个附加介质的办法是常采用的。现在我们来研究这样的插入法对流可靠度的影响。首先看一个例子。在图12-7-2（例12-7-2）中有个EWC网，我们已算出，当$t_{ij}=5$时，这个网络的流可靠度为0.616。假定在i和j之间插入一条边d，其边容量为1，失效概率为0.4，如图12-7-5所示。于是，流可靠度就变为0.6091，说明流可靠度降低了。另一方面，要传输的流却增加到6。如果我们保持所传输的流量不变，则流可靠度$R(\psi_{ij}=5)$为

$$R(\psi_{ij}=5)=0.6713$$

这说明流可靠度因边d的插入而增加。显然，只要所传输的流不变，插入一些边不会降低流可靠度。

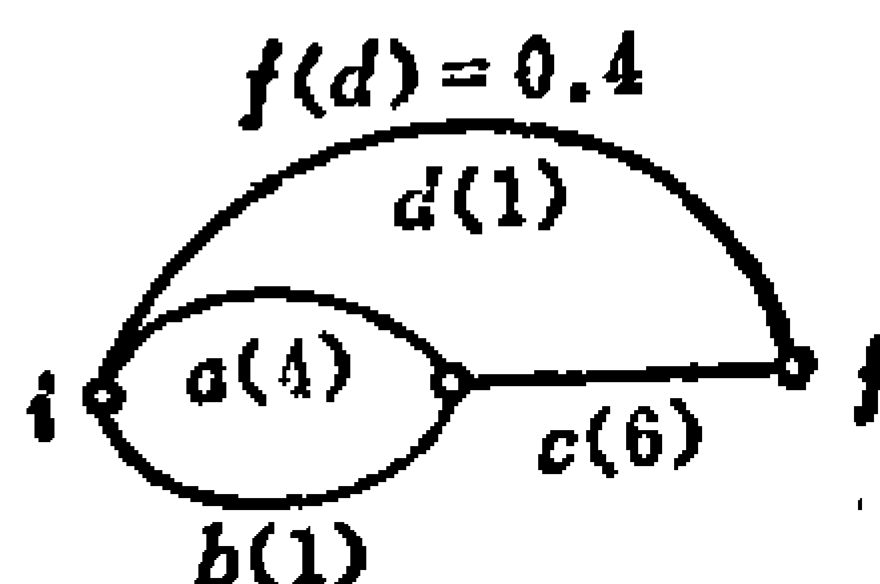


图12-7-5 插入边d

插入一些边既能提高流可靠度，又增加流量吗？为了回答这个问题，

我们来研究两个 EWC 网并联时的流可靠度。

定理12-7-2 在图12-7-6所示的并联网络中，设 R_1 和 R_2 分别为 EWC 网 G_1 和 G_2 在从 i 到 j 的最大流下的流可靠度。又设 t_1 和 t_2 分别为 G_1 和 G_2 的端限容量。则整个网络 G_0 在从 i 到 j 的最大流下的流可靠度 R_0 为

$$R_0=\frac{[t_1R_1+t_2R_2]}{t_1+t_2} \tag{12-7-21}$$

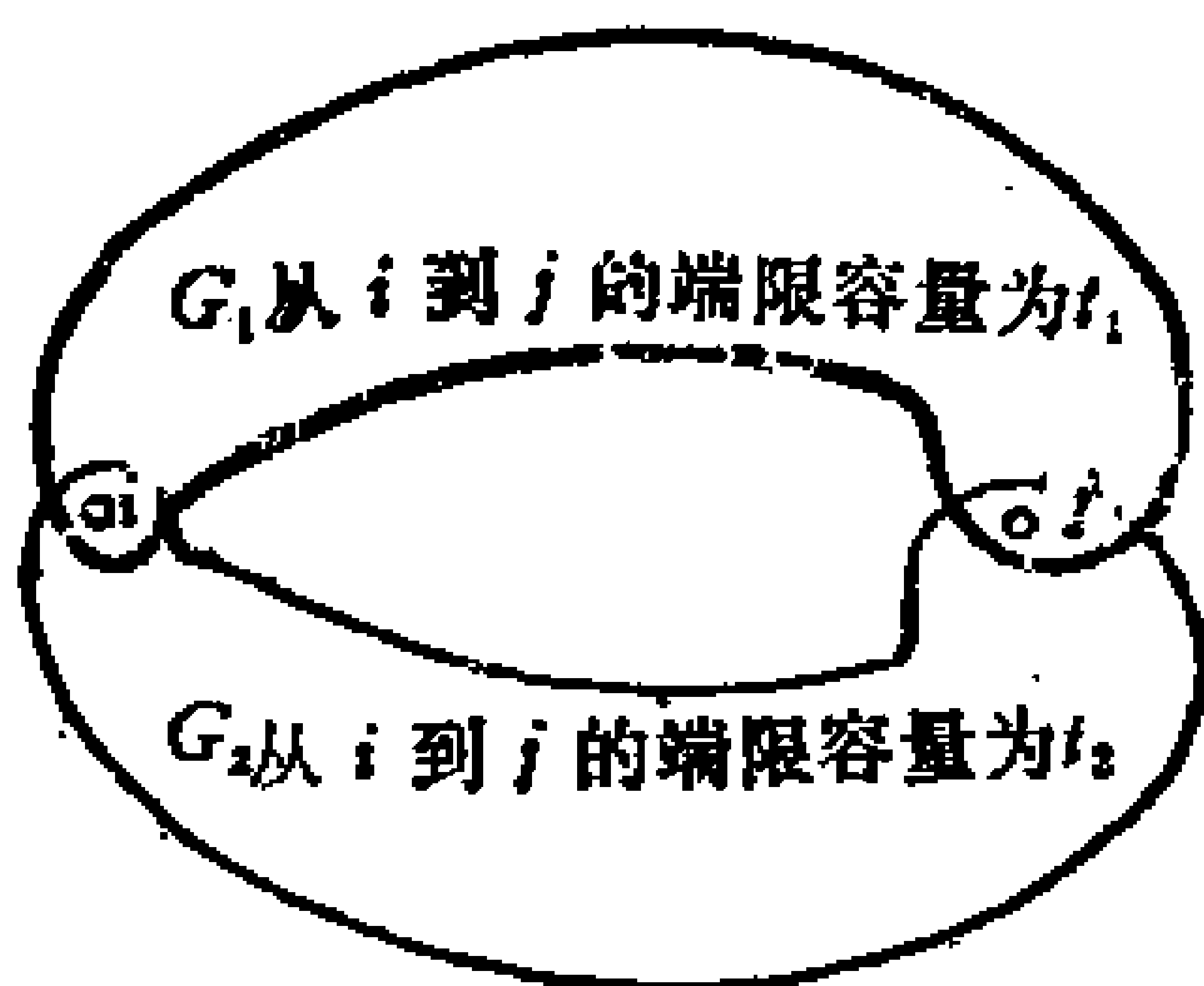


图12-7-6 两个网络并联

证明： 一个EWC网在流 ψ_{ij} 下的流可靠度由式 (12-7-12) 给出，又可以改写为

$$R(\psi_{ij})=P+\sum F(e_{p_1}e_{p_2}\cdots e_{pk})\min\left\{1,\frac{t_{ij}(\overline{e_{p_1}\ e_{p_2}\cdots e_{pk}})}{\psi_{ij}}\right\} \tag{12-7-22}$$

其中

$$P=\prod_{e_p\in G}[1-f(e_p)] \tag{12-7-23}$$

利用这个等式，G_0，G_1，G_2 在从 i 到 j 的最大流下的流可靠度 R_0，R_1，R_2 可以分别表示为

$$R_0 = P_0 + \sum \frac{F_{0u} t_{0u}}{t_0} \quad (12\text{-}7\text{-}24)$$

$$R_1 = P_1 + \sum \frac{F_{1u} t_{1u}}{t_1} \quad (12\text{-}7\text{-}25)$$

$$R_2 = P_2 + \sum \frac{F_{2u} t_{2u}}{t_2} \quad (12\text{-}7\text{-}26)$$

其中 t_0 是 G_0 的从 i 到 j 的端限容量，F_{ru} 和 t_{ru} $(r=0, 1, 2)$ 分别为以下两式的缩记表示：

$$F_{ru} = F(e_{p_1} e_{p_2} \cdots e_{pk}) \quad (12\text{-}7\text{-}27)$$

$$t_{ru} = t_{ij}(\overline{e_{p_1}\, e_{p_2} \cdots e_{pk}}) \quad (12\text{-}7\text{-}28)$$

注意，对 $r=0$，1，2，

$$P_r = \prod_{e_p \in G_r} [1 - f(e_p)] \quad (12\text{-}7\text{-}29)$$

因为

$$P_0 = P_1 P_2 \quad (12\text{-}7\text{-}30)$$

$$\sum F_{0u} = P_2 \sum F_{1u} + P_1 \sum F_{2u'} + \sum F_{1u} \sum F_{2u'} \quad (12\text{-}7\text{-}31)$$

$$t_{0u} = t_{1u} + t_{2u'} \quad (12\text{-}7\text{-}32)$$

所以流可靠度R_0可以表示为

$$R_0 = P_1 P_2 + P_2 \sum F_{1u}\left(\frac{t_{1u} + t_2}{t_0}\right) + P_1 \sum F_{2u}\left(\frac{t_{2u} + t_1}{t_0}\right)$$

$$+ \sum F_{1u} \sum F_{2u'} \left(\frac{t_{1u} + t_{2u'}}{t_0}\right) \quad (12\text{-}7\text{-}33)$$

我们可以看出，整个网络 G_0 的端限容量 t_0 可以表示为

$$t_0 = t_1 + t_2 \quad (12\text{-}7\text{-}34)$$

因此式（12-7-33）变成

$$R_0=\frac{(t_1+t_2)}{t_0}P_1P_2+P_2\sum F_{1u}\frac{t_2}{t_0}+P_2\sum F_{1u}\frac{t_{1u}}{t_0}$$

$$+P_1\sum F_{2u}\frac{t_1}{t_0}+P_1\sum F_{2u}\frac{t_{2u}}{t_0}+\sum F_{1u}\sum F_{2u'}\frac{t_{1u}}{t_0}$$

$$+\sum F_{1u'}\sum F_{2u}\frac{t_{2u'}}{t_0}$$

$$=\frac{t_1P_1P_2}{t_0}+\frac{t_2P_1P_2}{t_0}+\frac{t_1P_1\Sigma F_{2u}}{t_0}+\frac{t_2P_2\Sigma F_{1u}}{t_0}$$

$$+\frac{t_1}{t_0}\sum F_{1u}\frac{t_{1u}}{t_1}+\frac{t_2}{t_0}\sum F_{2u}\frac{t_{2u}}{t_2}$$

$$=\frac{t_1}{t_0}\left(P_1+\sum F_{1u}\frac{t_{1u}}{t_1}\right)+\frac{t_2}{t_0}\left(P_2+\sum F_{2u}\frac{t_{2u}}{t_2}\right)$$

$$=\frac{t_1R_1+t_2R_2}{t_1+t_2} \tag{12-7-35}$$

（证毕）

如果我们把 G_1 看成给定的网络，把 G_2 看成要插入的网络，那么据式(12-7-35)，适当地选择 R_2 和 t_2，就有可能在增加流的同时得到较高的流可靠度。这就回答了我们在上面提出的问题。

例12-7-4 图12-7-7(a)中的EWC网 G_0 可以看作如图12-7-7(b)所示的两个网络 G_1 和 G_2 的并联。

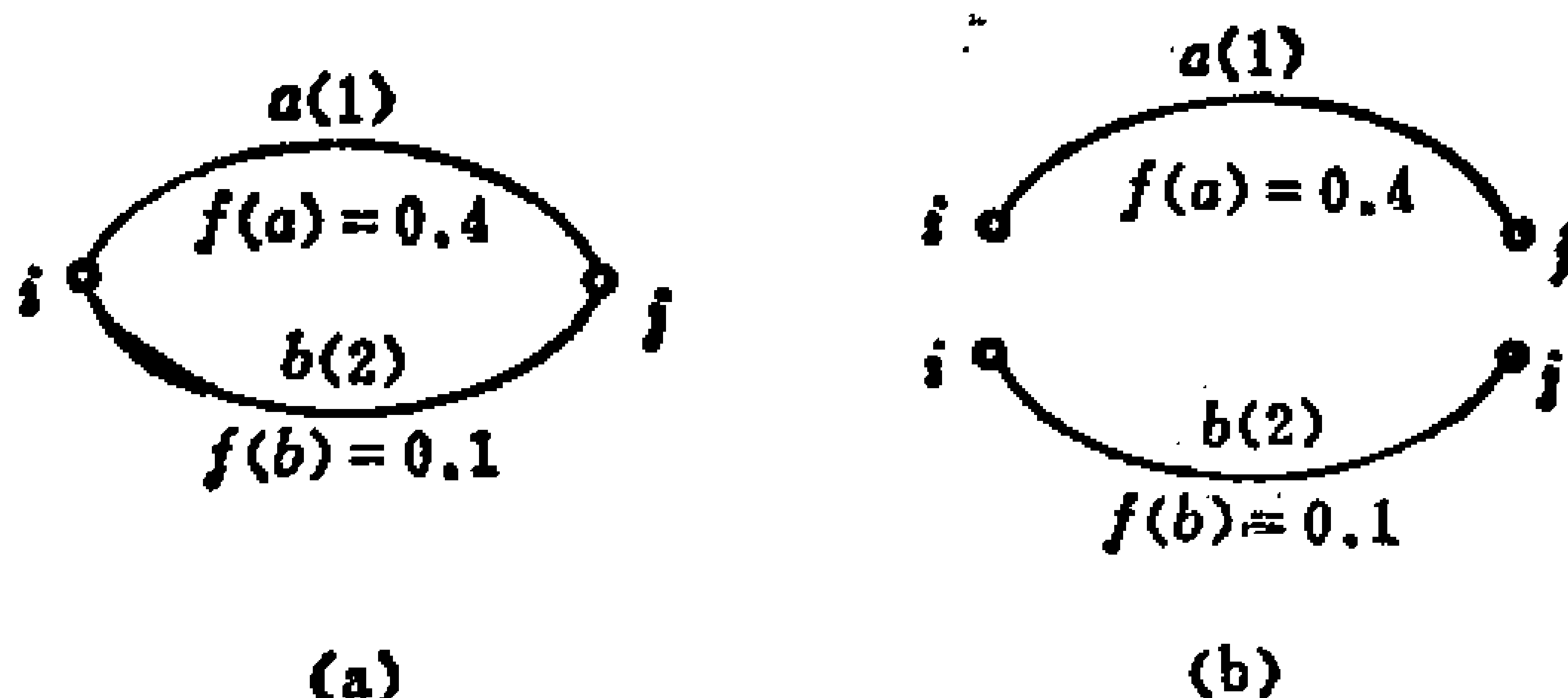


图12-7-7　由两个网络并联组成的网络

(a) 一个EWC网络；(b) 两个网络 G_1,G_2

G_1 和 G_2 在从 i 到 j 的最大流下的流可靠度 R_1 和 R_2 分别为

$$R_1 = 0.6$$

$$R_2 = 0.9$$

G_1 和 G_2 的端限容量为

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = 2$$

因此据定理 12-7-2，所给网络在从 i 到 j 的最大流 $t_0 = 3$ 下的流可靠度R_0为

$$R_0 = \frac{[0.6(1) + 0.9(2)]}{3} = 0.8$$

当两个EWC网G_1和G_2串联时，整个网络的流可靠度与G_1和G_2 的流可靠度之间的关系由以下定理给出。

定理12-7-3 在图12-7-8所示的串联网络中，设 R_1 是 G_1 在流 ψ_{ik} 下的流可靠度，R_2是G_2在流ψ_{kj}下的流可靠度，且 $\psi_{ik} = \psi_{kj}$. 则整个网络G_0在流 $\psi_{ij} = \psi_{ik}$ 下的流可靠度R_0满足下面的不等式

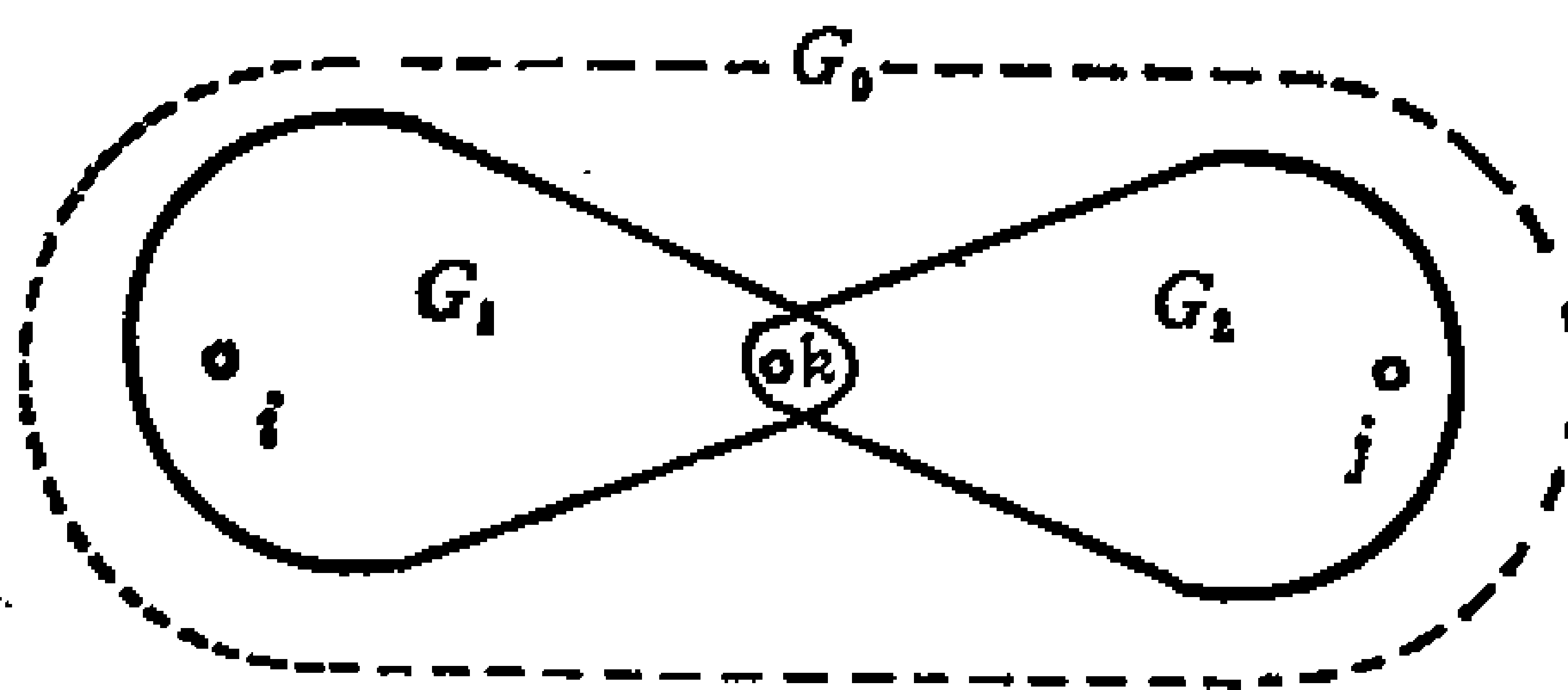


图12-7-8 两个网络串联

$$R_1R_2 \leqslant R_0 \leqslant \min\{R_1 + (R_2 - 1)P_1, R_2 + (R_1 - 1)P_2\} \tag{12-7-36}$$

其中

$$P_r = \prod_{e_p \in G_r} [1 - f(e_p)] \quad r = 1, 2 \tag{12-7-37}$$

证明： 在串联网络中，整个网络在流 ψ_{ij} 下的流可靠度 R_0 可以表示为

$$R_0 = P_1 P_2 + P_1 \sum F_{2u} \min\left(1, \frac{t_{2u}}{\psi_{kj}}\right) + P_2 \sum F_{1u} \min\left(1, \frac{t_{1u}}{\psi_{ik}}\right) + \sum F_{1u} \cdot \sum F_{2u'} \min\left(1, \frac{t_{1u}}{\psi_{ik}}, \frac{t_{2u'}}{\psi_{kj}}\right) \quad (12\text{-}7\text{-}38)$$

因为

$$\min\left(1, \frac{t_{2u}}{\psi_{kj}}\right) \cdot \min\left(1, \frac{t_{1u}}{\psi_{ik}}\right) \leqslant \min\left(1, \frac{t_{1u}}{\psi_{ik}}, \frac{t_{2u}}{\psi_{kj}}\right) \quad (12\text{-}7\text{-}39)$$

其中据假设 $\psi_{ik} = \psi_{kj} = \psi_{ij}$，所以式 (12-7-38) 可以变为

$$R_0 \geqslant P_1 P_2 + P_1 \sum F_{2u} \min\left(1, \frac{t_{2u}}{\psi_{kj}}\right) + P_2 \sum F_{1u} \min\left(1, \frac{t_{1u}}{\psi_{ik}}\right) + \left[\sum F_{1u} \min\left(1, \frac{t_{1u}}{\psi_{ik}}\right)\right] \cdot \left[\sum F_{2u} \min\left(1, \frac{t_{2u}}{\psi_{kj}}\right)\right] = R_1 R_2 \quad (12\text{-}7\text{-}40)$$

这就证明了式 (12-7-36) 的左端。

由于

$$\min\left(1, \frac{t_{1u}}{\psi_{ik}}\right) \geqslant \min\left(1, \frac{t_{1u}}{\psi_{ik}}, \frac{t_{2u}}{\psi_{kj}}\right) \quad (12\text{-}7\text{-}41)$$

式 (12-7-38) 变为

$$R_0 \leqslant P_1 P_2 + P_1 \sum F_{2u} \min\left(1, \frac{t_{2u}}{\psi_{kj}}\right) + P_2 \sum F_{1u} \min\left(1, \frac{t_{1u}}{\psi_{ik}}\right) + \sum F_{2u'} \sum F_{1u} \min\left(1, \frac{t_{1u}}{\psi_{ik}}\right)$$
$$= P_1 P_2 + P_1 \sum F_{2u} \min\left(1, \frac{t_{2u}}{\psi_{kj}}\right) + \sum F_{1u} \min\left(1, \frac{t_{1u}}{\psi_{ik}}\right) = P_1(R_2 - 1) + R_1 \quad (12\text{-}7\text{-}42)$$

交换下标，式（12-7-42）变为

$$R_0 \leqslant P_2(R_1 - 1) + R_2 \tag{12-7-43}$$

既然以上两式都必须满足，故式（12-7-36）右端是正确的，这就证明了定理。（证毕）

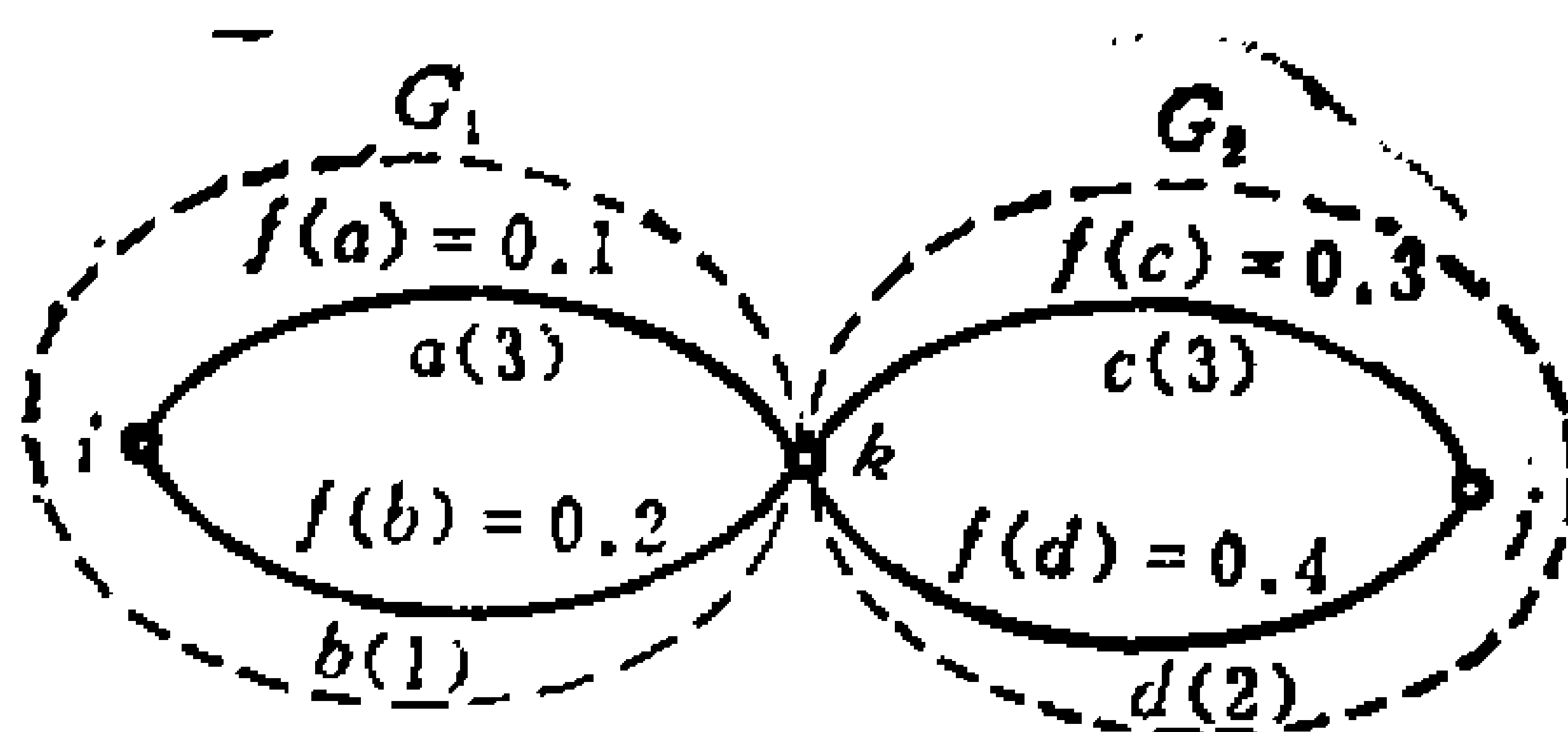


图12-7-9　两个网络G_1和G_2串联

例12-7-5　图12-7-9中的EWC网G_0由两个网络G_1和G_2串联组成。计算G_1在流$\psi_{ik}=4$下的流可靠度R_1得

$$R_1 = 0.875$$

在$\psi_{kj}=4$下的流可靠度R_2为

$$R_2 = 0.72$$

因此R_1和R_2的积为

$$R_1R_2 = 0.63$$

由于

$$P_1 = 0.72$$
$$P_2 = 0.42$$

我们有

$$P_1(R_2 - 1) + R_1 = 0.6734$$
$$P_2(R_1 - 1) + R_2 = 0.6675$$

因此所给网络G_0在$\psi_{ij}=4$下的流可靠度满足下面不等式（据定理12-7-3）：

$$0.63 \leqslant R_0 \leqslant 0.6675$$

我们从式（12-7-12）和式（12-7-22）可以看出，计算一个EWC网的流可靠度是一项非常费时的工作。定理 12-7-2 给出了可将一个网络看作两个网络并联时，求流可靠度的一种方法，而却没有给出在分配的流小于最大流时求流可靠性的方法。另一方面，定理12-7-3给出了可将一个网络看作是两个网络串联时，流可靠性的上界和下界。同样地，这个定理不一定能帮助我们得到一个足够精确的流可靠度。况且，一个网络不一定能分解为串联或并联网络。因此，这两个定理对于求网络流可靠度的近似值不一定有多少帮助。到目前为止，还没有求网络流可靠性的简单方法。但是，在某些约束条件下，我们可以如下面定理所给的那样，求得流可靠度的合理近似值。

定理12-7-4 设R是EWC网G在从i到j的流ψ_{ij}下的流可靠度。设$S=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$是$G$的端限容量$t_{ij}$的对应割集。设$(e_1, e_2, \cdots, e_m)$是$G-S$的所有边的集合（即$G$去掉$S$的边后所余边的集合）。假定以下条件满足：

1.对$r=1,2,\cdots,m$，边e_r的失效概率$f(e_r)$很小。

2.删去任何边e_r，不减少从i到j的端限容量。

那么，G在ψ_{ij}下的流可靠度非常接近于G'在ψ_{ij}下的流可靠度，其中G'是将G中边e_r的失效概率$f(e_r)$置零$(r=1, 2, \cdots, m)$后得到的网络。

除满足条件1，2外，如果对$s=1, 2, \cdots, n$，边b_s的失效概率$f(b_s)$也很小，则G在最大流下的流可靠度可近似为

$$R \approx \sum_{s=1}^{n} \frac{r(b_s)c_s}{\sum_{u=1}^{n} c_u} \tag{12-7-44}$$

其中$r(b_s)$是边b_s的可靠度，它等于$1-f(b_s)$。

例12-7-6 考虑 12-7-10 所示的 EWC 网。我们可以看出，

对于这个网络，条件 1 和条件 2 是满足的。注意端限容量 t_{ij} 的对应割集 S 由边 a, b, c 组成。因为边 a, b, c 的失效概率很小，可用式(12-7-44)作为从 i 到 j 的最大流下的流可靠度 R_0 的近似值：

$$R_0 \approx \frac{0.9(1)+0.85(2)+0.95(3)}{1+2+3}=0.909$$

用式(12-7-12)计算R_0的实际值为 0.9047。因此式 (12-7-44) 给出的近似式可求得合理的流可靠度值。

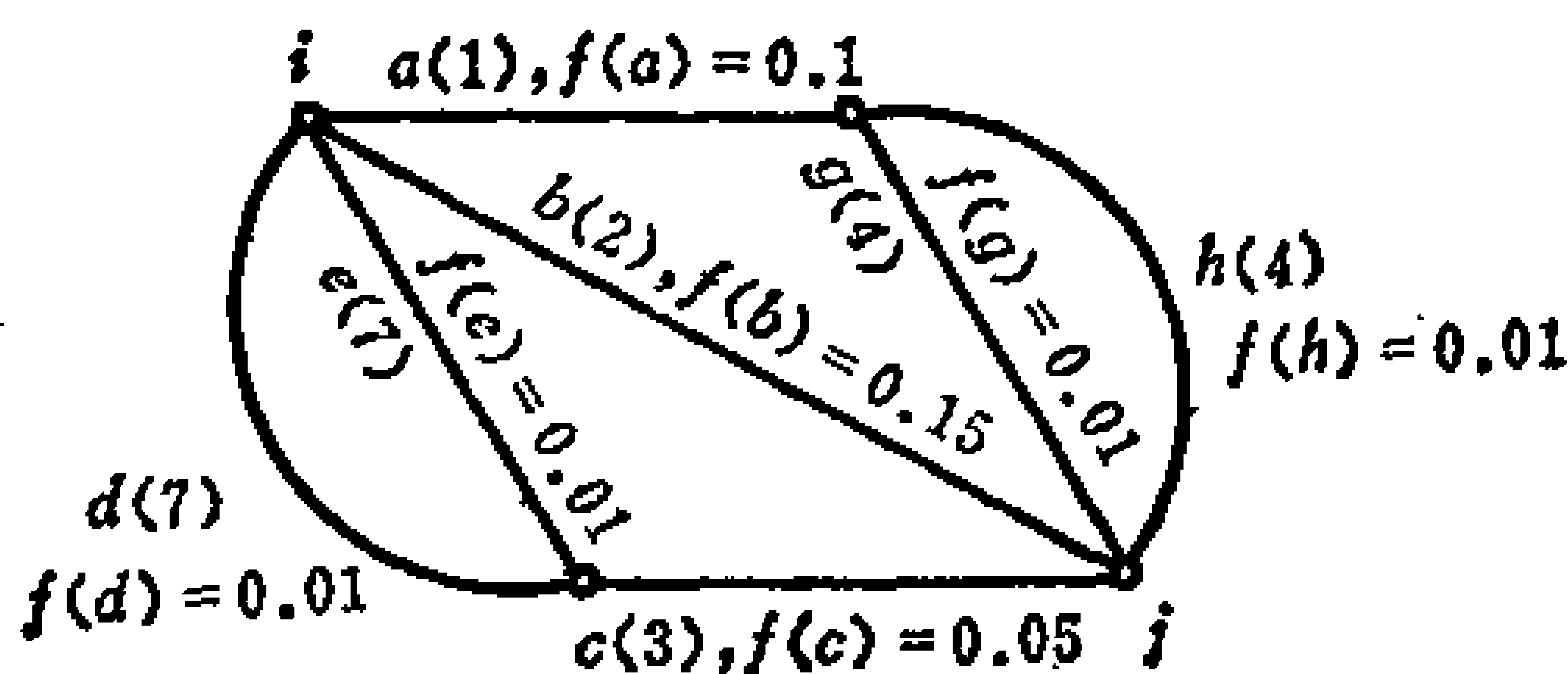


图 12-7-10 EWC 网

定理12-7-4的证明：据条件 1，我们有

$$\sum F(e_{p_1}e_{p_2}\cdots e_{pk})\left[1-\min\left\{1,\frac{t_{ij}}{\psi_{ij}}T(\overline{e_{p_1}e_{p_2}\cdots e_{pk}})\right\}\right]$$

$$\approx\sum_{b_p\in S}F(b_{p_1}b_{p_2}\cdots b_{p_w})\left[1-\min\left\{1,\frac{t_{ij}}{\psi_{ij}}T(\overline{b_{p_1}b_{p_2}\cdots b_{p_w}})\right\}\right]$$

$$+\sum_{e_u\in(G-S)}f(e_u)\left[1-\min\left\{1,\frac{t_{ij}}{\psi_{ij}}T(\bar{e}_u)\right\}\right] \qquad (12\text{-}7\text{-}45)$$

并且据条件 2，$t_{ij}(\bar{e}_u)=t_{ij}$。因此

$$f(e_u)\left[1-\min\left\{1,\frac{t_{ij}}{\psi_{ij}}T(\bar{e}_u)\right\}\right]=0 \qquad (12\text{-}7\text{-}46)$$

须注意

$$T(\bar{e}_u)=\frac{t_{ij}(\bar{e}_u)}{t_{ij}} \tag{12-7-47}$$

因而由式 (12-7-12) 给出的流可靠度 R 变为

$$R\approx 1-\sum_{b_p\in S}F_S(b_{p_1}b_{p_2}\cdots b_{p_w})\Big[1-\min\Big\{1,\frac{t_{ij}}{\psi_{ij}}T(\overline{b_{p_1}b_{p_2}\cdots b_{p_w}})\Big\}\Big] \tag{12-7-48}$$

这就是将所有 e_r 边的失效概率 $f(e_r)$ 置零后所得的网络 G 的流可靠度，于是定理第一部分得证。

当 S 中所有的边 b_s 的 $f(b_s)$ 也很小时，式 (12-7-48) 还可进一步简化为：

$$\begin{aligned}R&\approx 1-\sum F_S(b_s)\Big[1-\min\Big\{1,\frac{t_{ij}}{\psi_{ij}}T(\bar{b}_s)\Big\}\Big]\\&\approx 1-\sum f(b_s)\Big[1-\min\Big\{1,\frac{t_{ij}}{\psi_{ij}}T(\bar{b}_s)\Big\}\Big]\end{aligned} \tag{12-7-50}$$

当 $\psi_{ij}=t_{ij}$（即最大流）时，

$$T(\bar{b}_u)=1-\frac{c_u}{\sum_{r=1}^{n}c_r} \tag{12-7-51}$$

其中 c_u 和 c_r 分别为边 b_u 和 b_r 的边容量，须注意

$$t_{ij}=\sum_{r=1}^{n}c_r \tag{12-7-52}$$

因此在最大流下的流可靠度 $R(t_{ij})$ 为

$$R(t_{ij})\approx 1-\sum f(b_u)\Big[1-\Big(1-\frac{c_u}{\sum_{r=1}^{n}c_r}\Big)\Big]$$

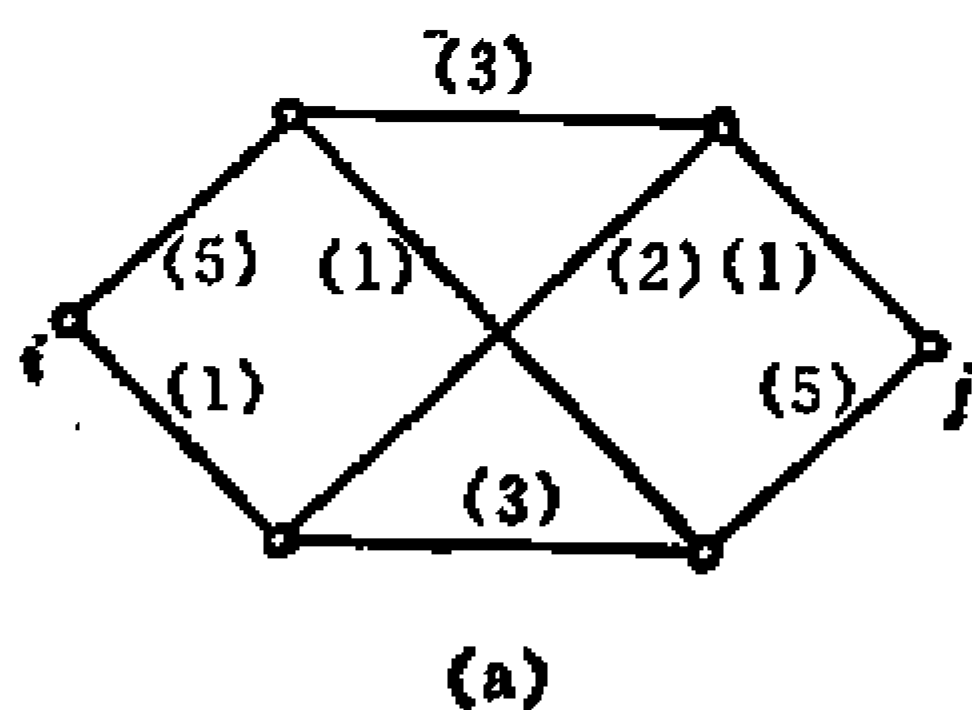
$$
=1-\frac{\sum_{u=1}^{n} f(b_u)\, c_u}{\sum_{r=1}^{n} c_r}=\frac{\sum_{u=1}^{n}[1-f(b_u)]\, c_u}{\sum_{r=1}^{n} c_r}
$$

$$
=\frac{\sum_{u=1}^{n} r(b_u)\, c_u}{\sum_{r=1}^{n} c_r} \tag{12-7-53}
$$

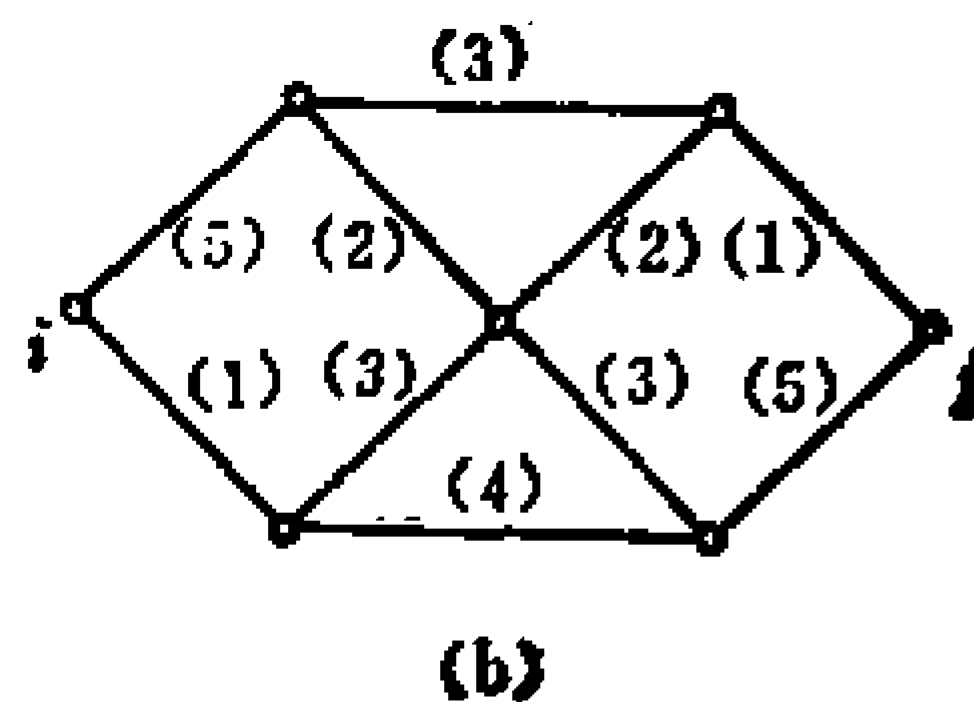
这就证明了定理。 **（证毕）**

习　题

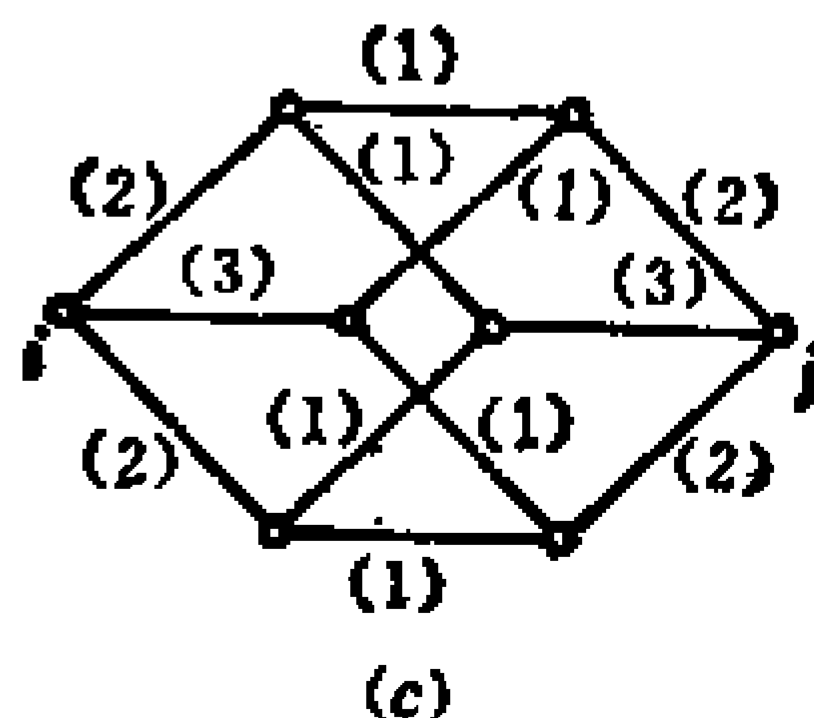
1. 对图P-12-1中的EWC网，求从 i 到 j 的流 $\psi_{ij}=6$ 的一个分配方式。



(a)



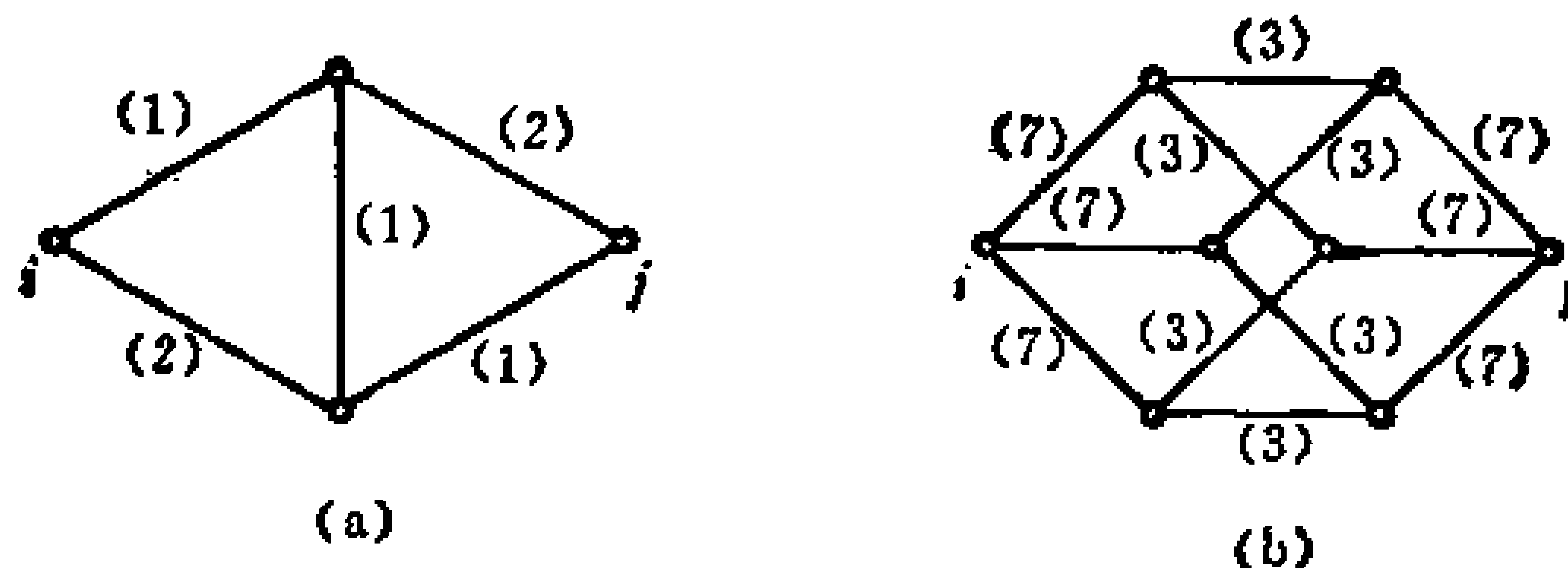
(b)



(c)

图P-12-1　EWC网
(a)G_1；(b)G_2；(c)G_3

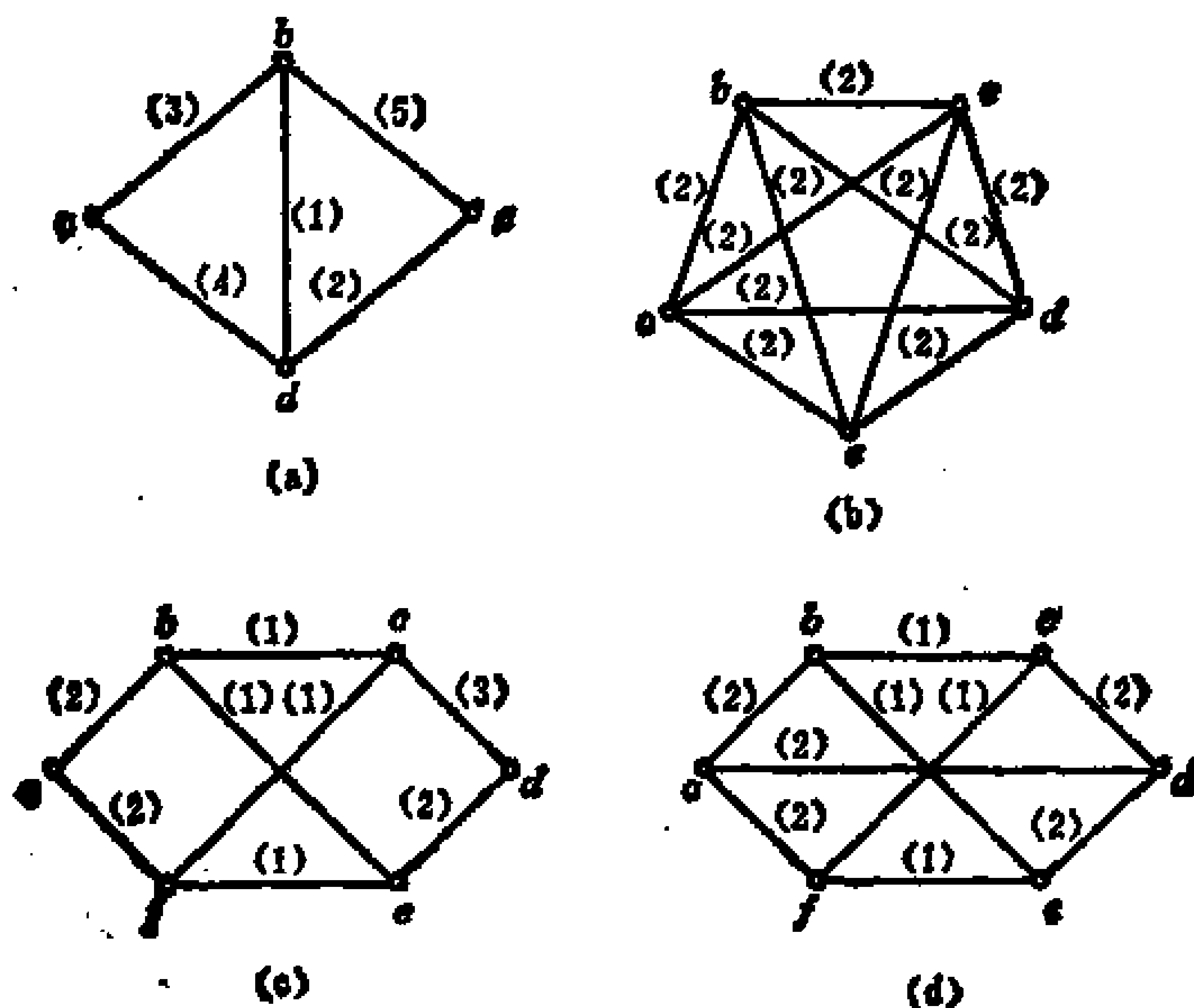
2.在图P-12-2的EWC网中，从 i 到 j 能够传送的最大流是多少？



图P-12-2 EWC网

(a)G_1; (b)G_2

3.求出图P-12-3中每个EWC网的端限容量矩阵。



图P-12-3 EWC网

(a) G_1; (b) G_2; (c) G_3; (d) G_4

4.综合无向 EWC 网，其端限容量矩阵为

(a)

$$T=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\\begin{bmatrix}d&2&1&2\\2&d&1&3\\1&1&d&1\\2&3&1&d\end{bmatrix}\end{array}$$

(b)

$$T=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\\begin{bmatrix}d&2&3&2\\2&d&2&4\\3&2&d&2\\2&4&2&d\end{bmatrix}\end{array}$$

5.在以下各端限容量矩阵的单位价格相同的条件下，由它们综合最廉价的无向 EWC 网。

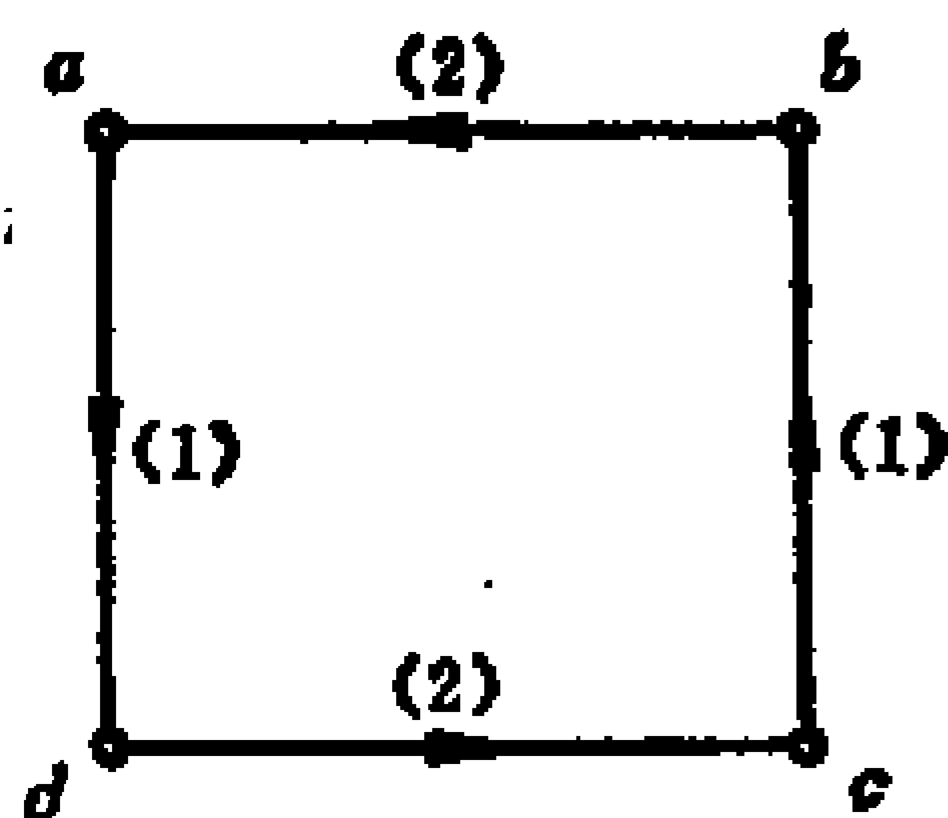
(a)

$$T=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\\begin{bmatrix}d&1&1&5\\1&d&3&1\\1&3&d&1\\5&1&1&1\end{bmatrix}\end{array}$$

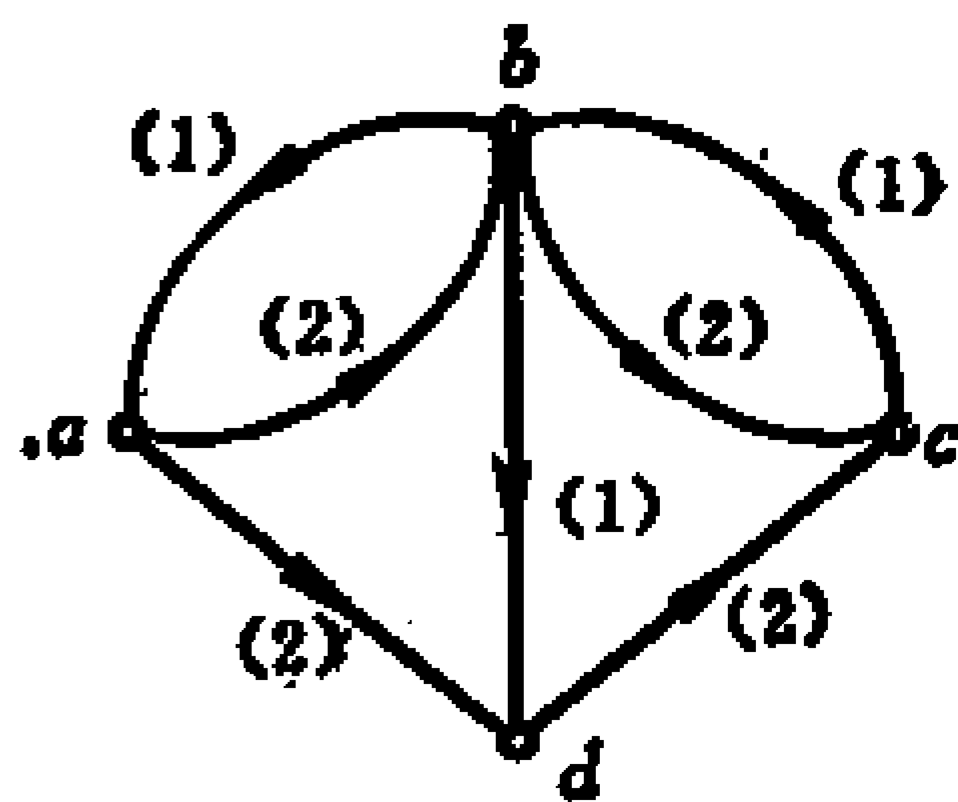
(b)

$$T=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\\5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array}\\\begin{bmatrix}d&3&2&2&3\\3&d&2&2&5\\2&2&d&3&2\\2&2&3&d&2\\3&5&2&2&d\end{bmatrix}\end{array}$$

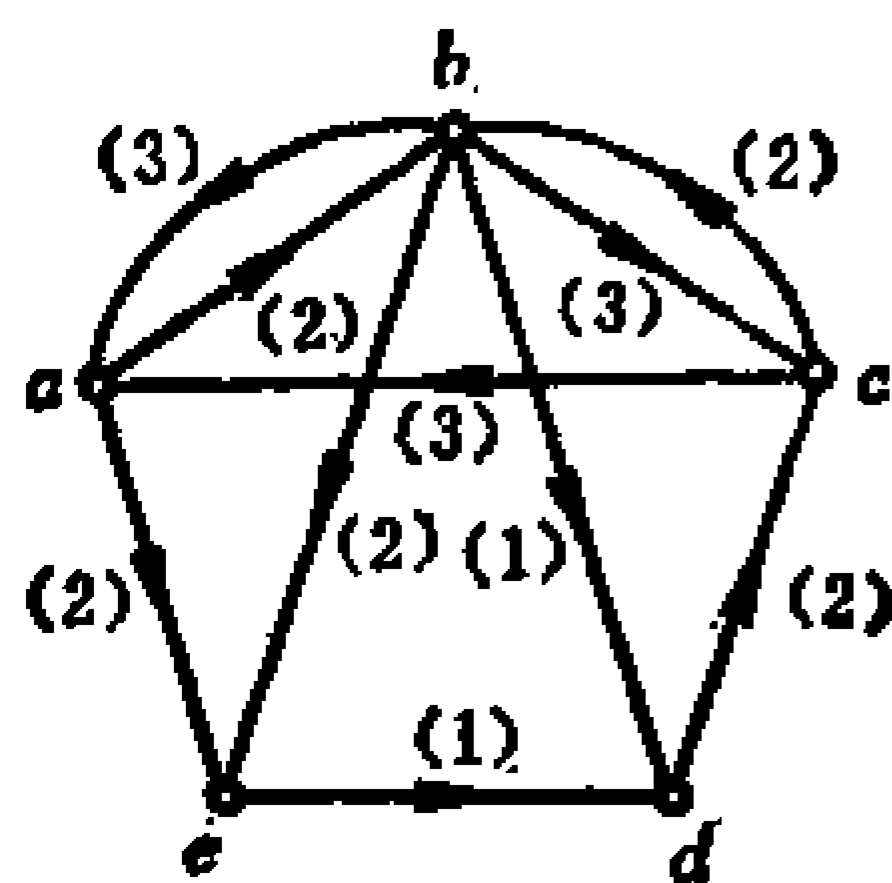
6.求出图P-12-6中每个有向EWC网的端限容量矩阵.



(a)



(b)

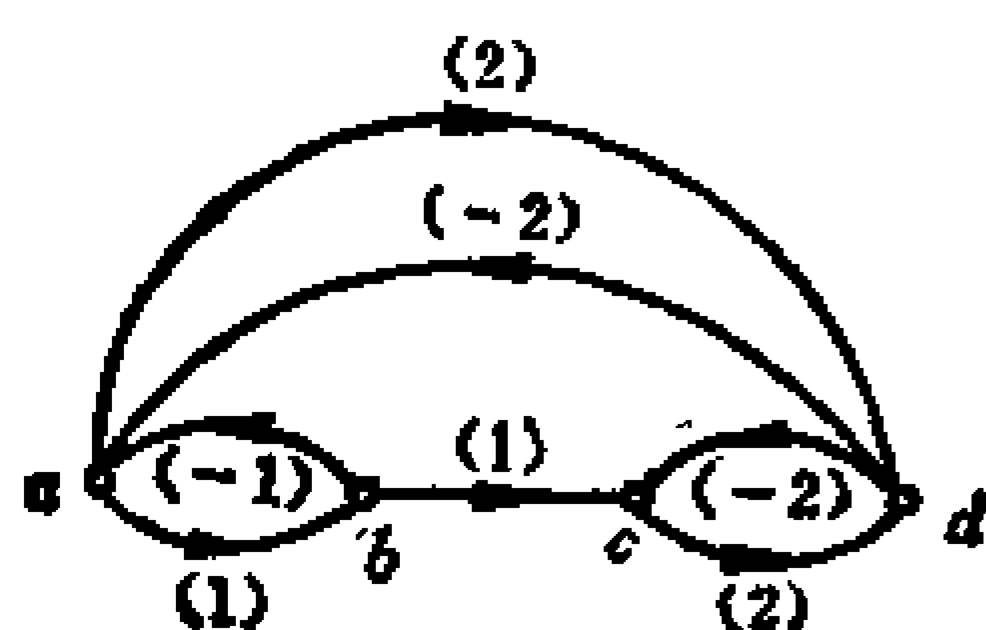


(c)

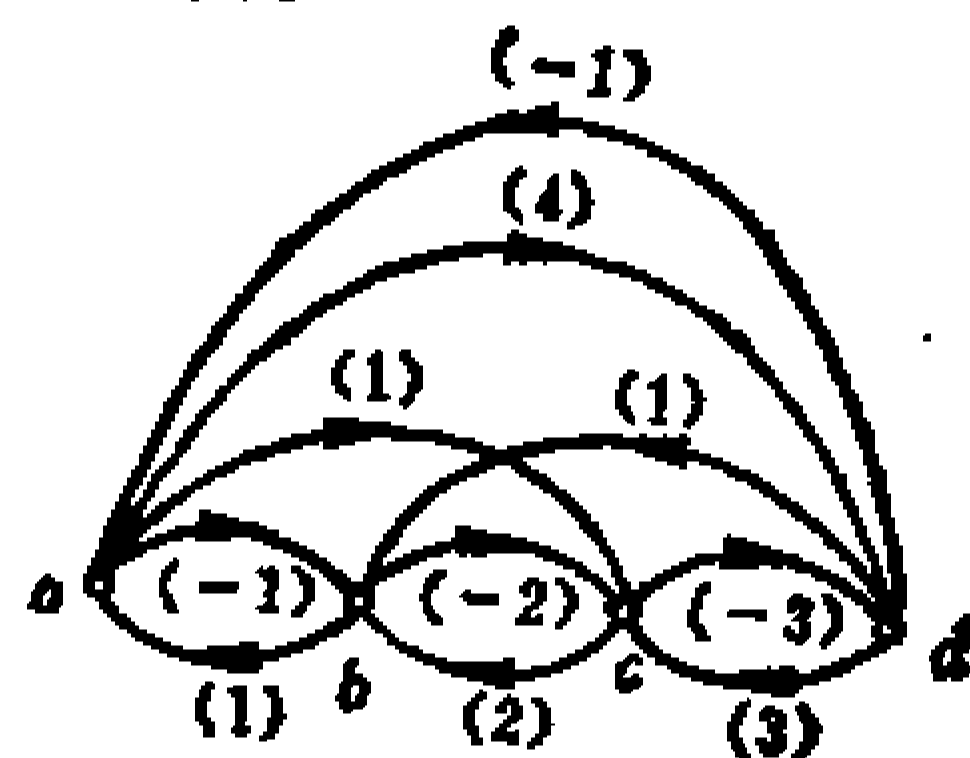
图P-12-6　有向EWC网

(a)G_1;　(b)G_2;　(c)G_3

7.图P-12-7中哪一个网络是伪EWC网?



(a)

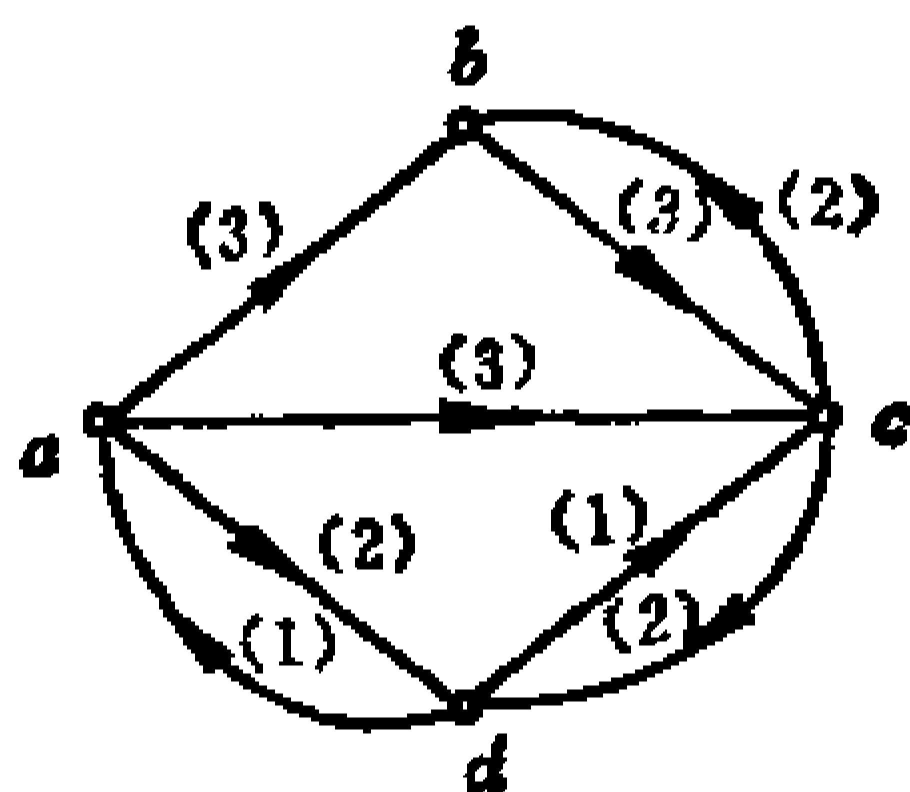


(b)

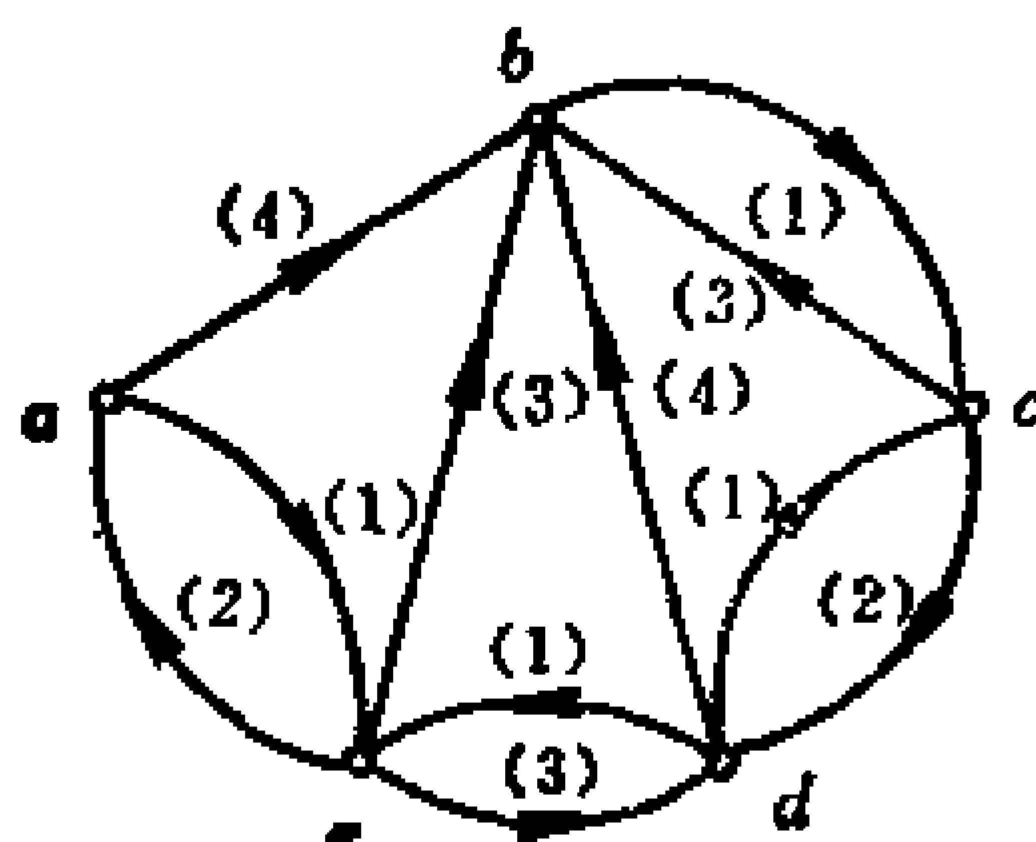
图P-12-7　网 络

(a)G_1;　(b)G_2

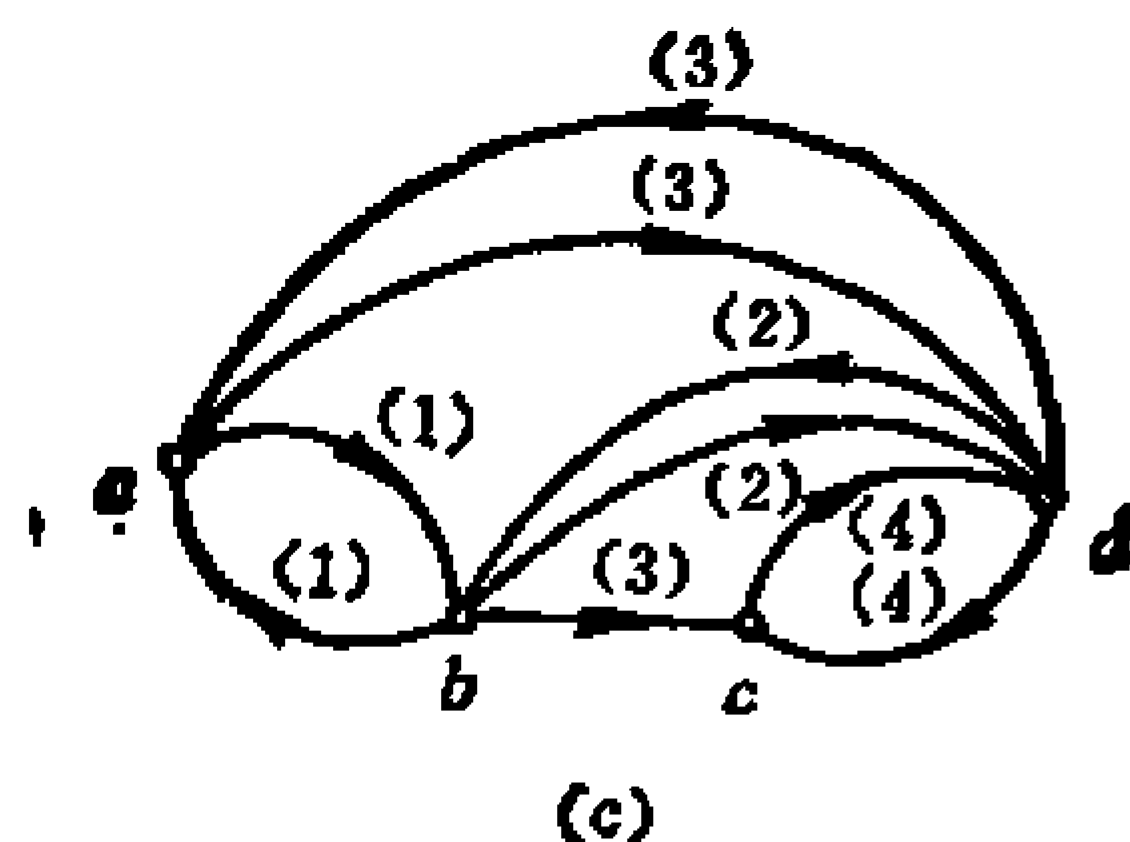
8.求出图P-12-8中每个有向EWC网的基本伪EWC网。



(a)



(b)

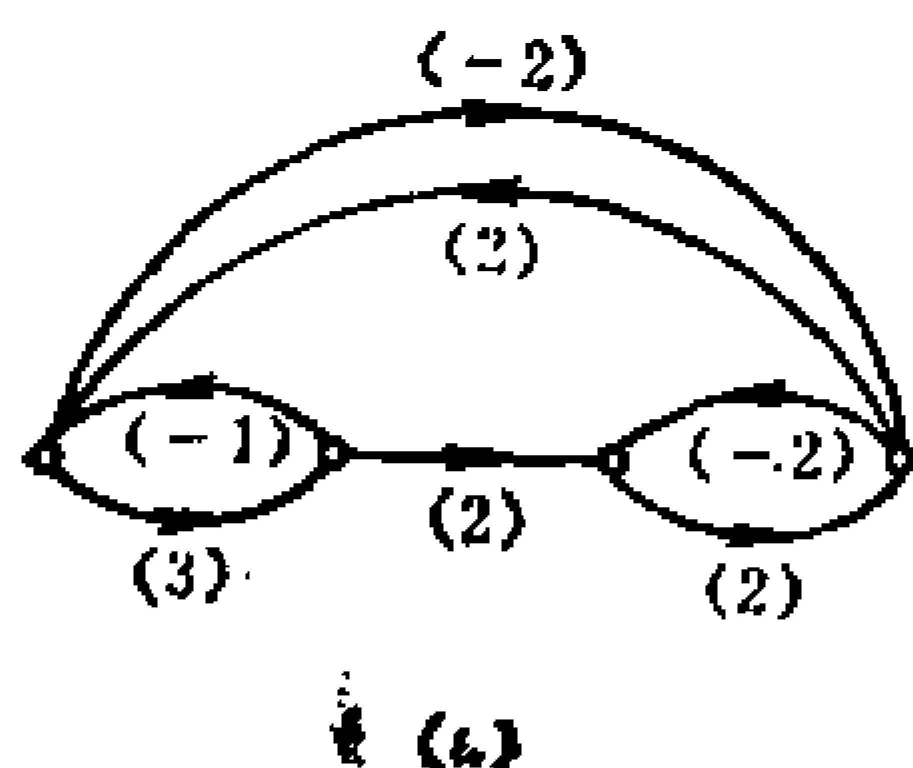


(c)

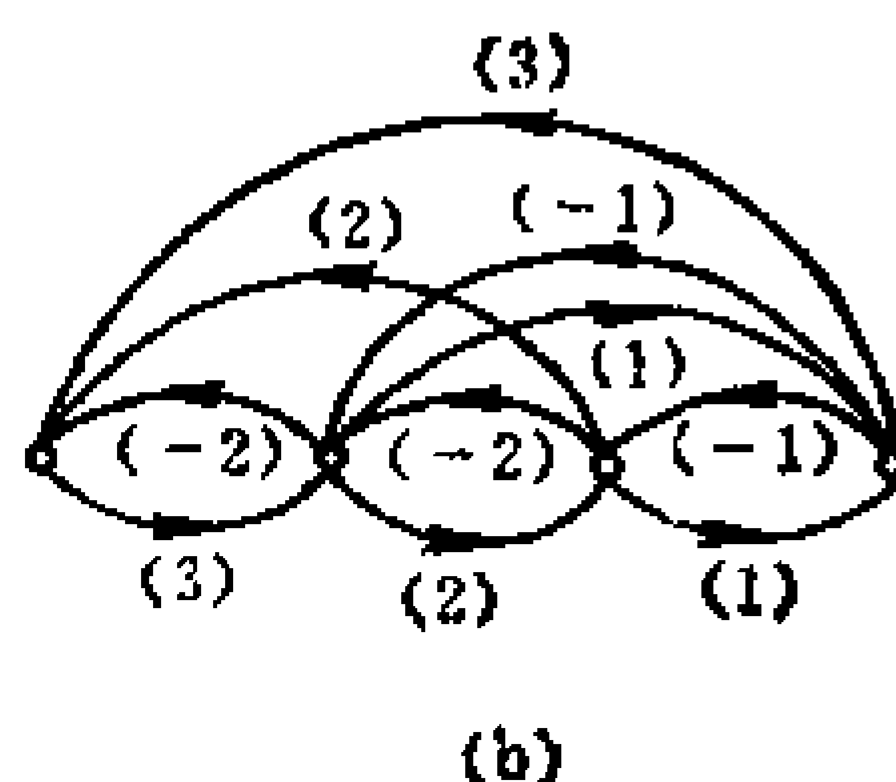
图P-12-8 有向EWC网

(a) G_1; (b) G_2; (c) G_3

9.用移量算法从图 P-12-9的各伪 EWC网，求出有向 EWC网。



(a)

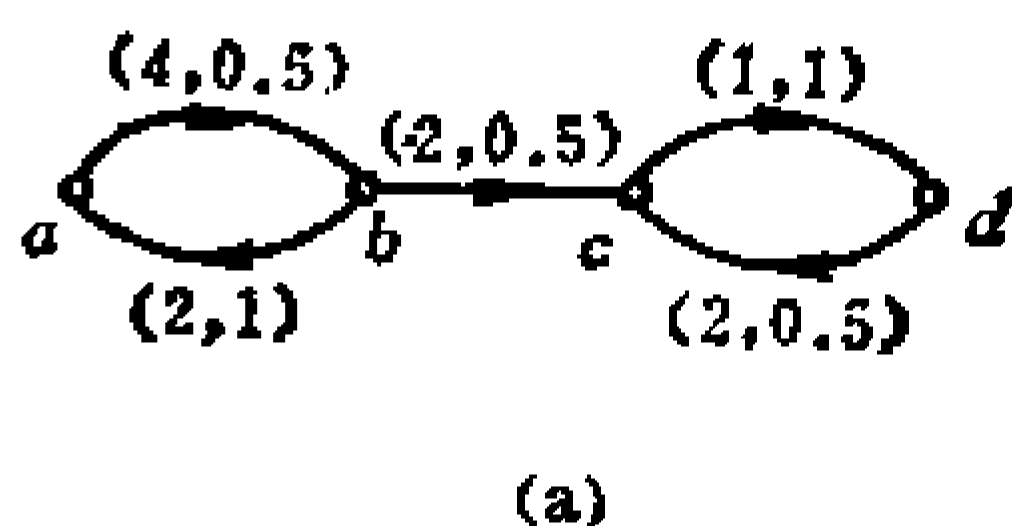


(b)

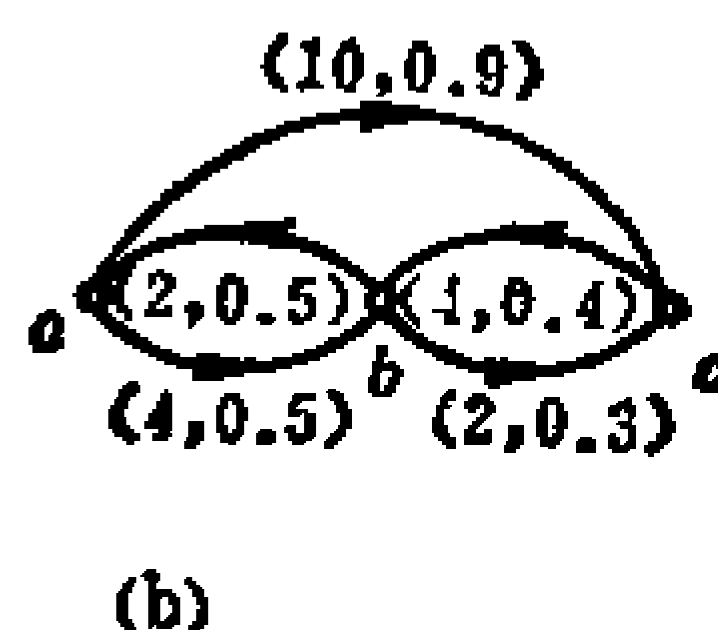
图P-12-9 伪EWC网

(a) G_1; (b) G_2

10.求出图P-12-10中损耗EWC网的端限容量矩$\overline{T}$和$\underline{T}$.



(a)



(b)

图P-12-10 损耗EWC网

(a) G_1; (b) G_2

11.设R是EWC网G在流ψ_{ij}下的流可靠度，设G'是在G中添加边e得到的EWC网。证明当边e的容量非零，且边e的失效概率$f(e)$小于1时，G'在ψ_{ij}下的流可靠度R'不小于R。

12.计算图P-12-12中EWC网在从i到j分配最大流时的流可靠度R，其中括号内第一个数字是边容量，第二个数字是边的失效概率。

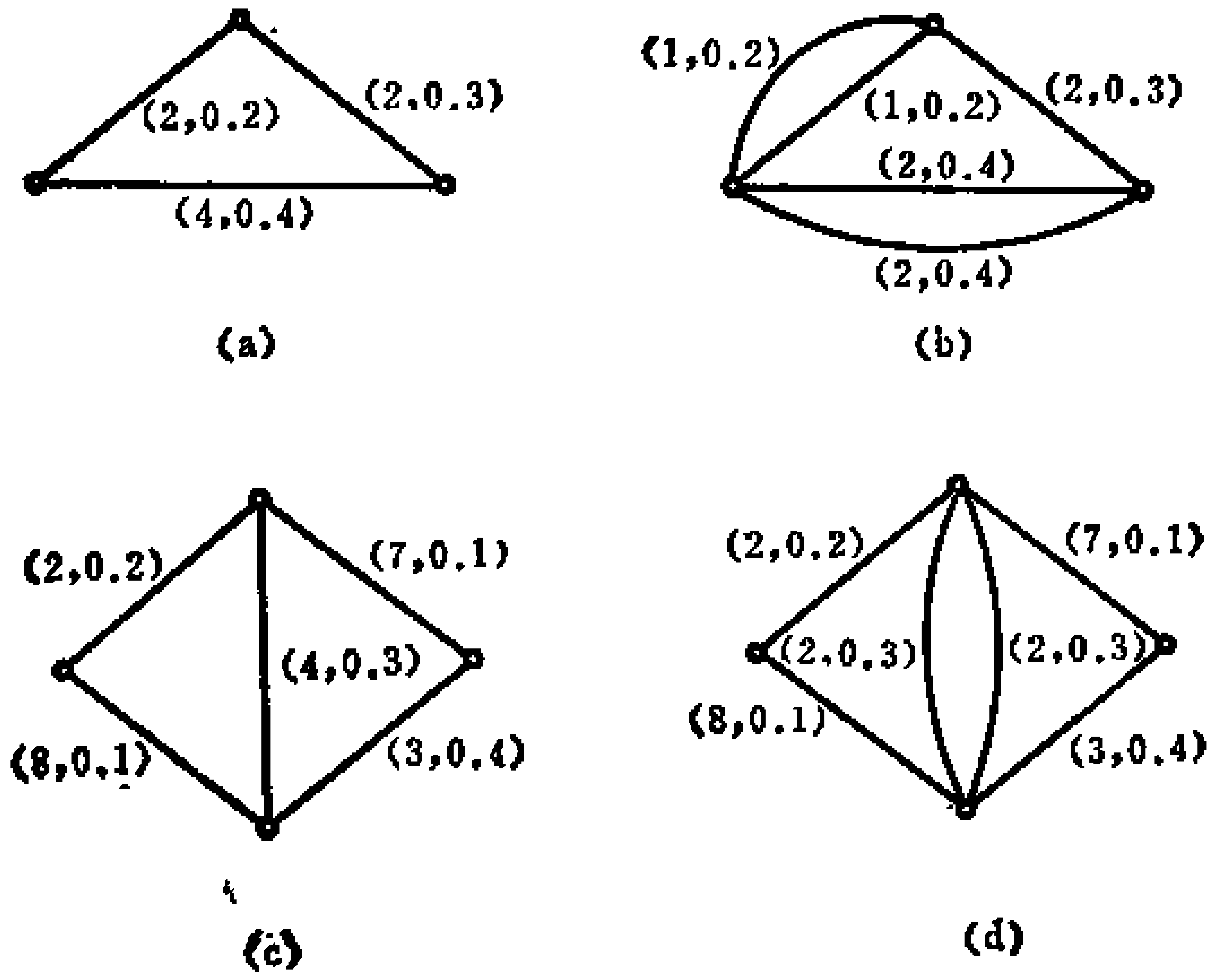


图 P-12-12

13.计算图P-12-12中EWC网在$\psi_{ij}=4$和$\psi_{ij}=2$下的流可靠度R。

14.根据定理12-7-3，求出图P-12-14中EWC网在从i到j的最大流下的流可靠度R的上界和下界。

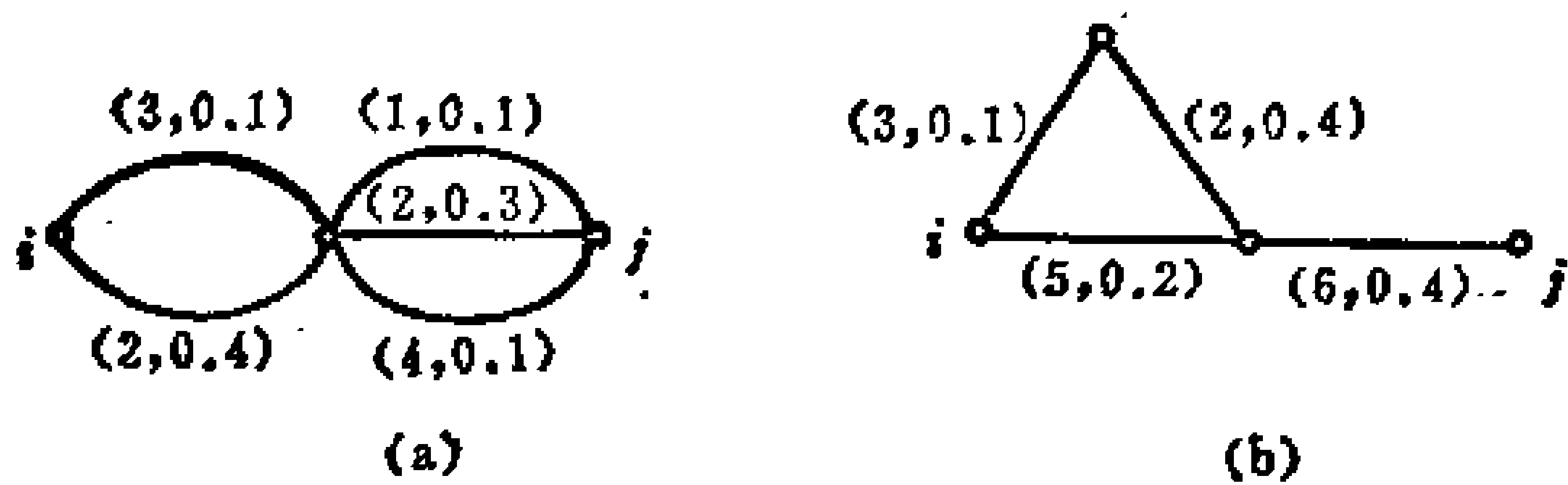


图 P-12-14

15. 利用定理12-7-2计算图P-12-15中EWC网在从 i 到 j 的最大流下的流可靠度R。

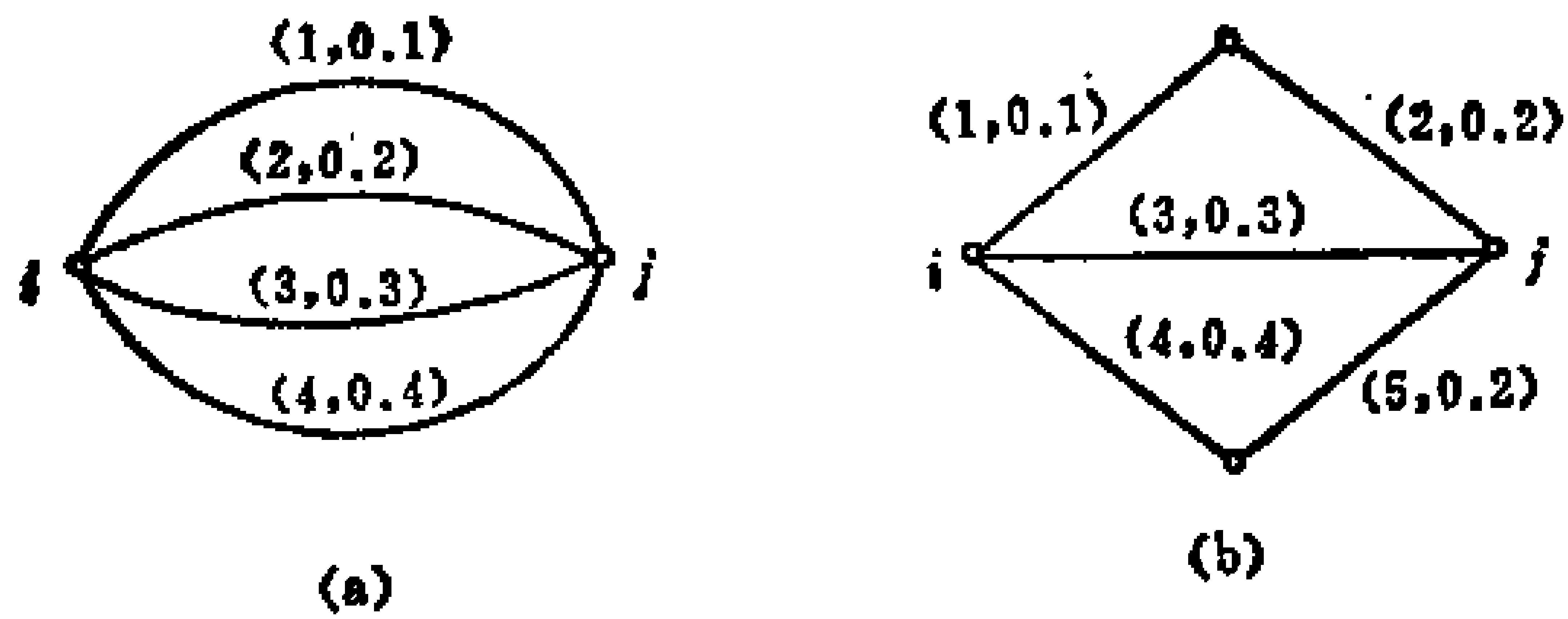


图 P-12-15

第十三章　传输网理论——点权例

13-1　无向情况下的端限容量

考虑一个典型数据传输系统中的站V，在这种系统中，每一个站都有许多输入端和输出端与别的站相连。当若干数据进入站V的输入端时，它们被全部收集起来。如果数据是编码的，可以在站V中译码。以后数据可能有修改。例如，如果站V是一个能提供附加信息的中间站，而进入此站的某一个特定数据在送到另一站去之前需要这样的附加信息，那么就将所需的信息在站V加进数据中去。若数据传输的目的地不同，就将它们分成若干组，使每一组的数据能被传送到站V的同一输出端。如有必要，这些数据被编码并储存在站V中，直到有可能传输到下一站去时才送出去。

通常每一站都由处理数据的设备所组成，而一个站在单位时间内所能处理的数据量是有上限的。但是，站与站之间的连线（传输线）却可能有传输数据的足够容量，从而使数据流不受连线的限制。也就是说，在这样的数据传输系统中，数据流仅受站的限制。要表示这样的系统自然可以利用线图，不过此处是每个顶点（而不是每条边）有一个容量，称为点容量，它表示通过这个顶点的流的上限。这样的线图叫做点权传输网(Vertex Weighted Communication 缩写为VWC网)。在VWC网中，每一条边代表两个站之间的一条连线，并且如果边是无向的，则流可以沿任何方向通过这条边。若所有的边均为无向的边，就称此网络

为无向VWC网。图 13-1-1 是无向VWC网的一个例子，其中点容量由每一个顶点旁的括弧中数字表示。

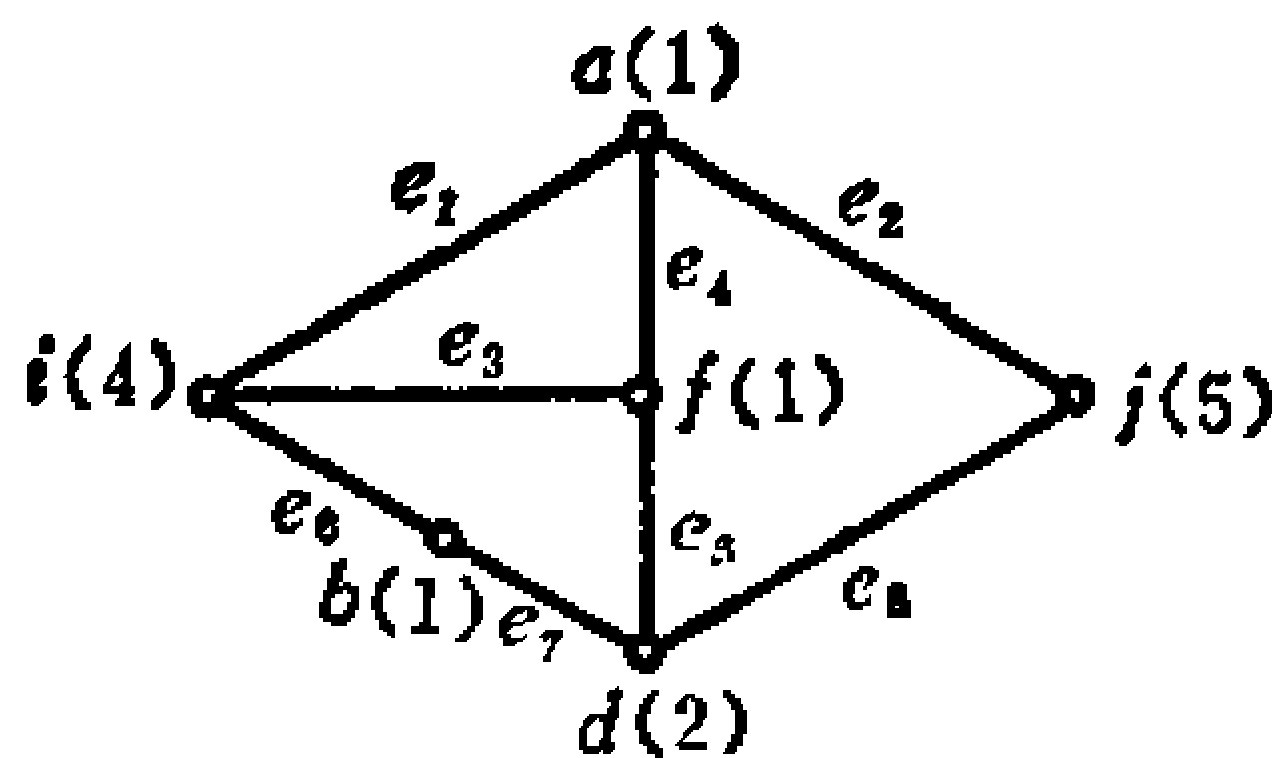


图13-1-1 无向VWC网

与第十二章中所讨论的EWC网一样，一个流是通过路径来分配的。也就是说，对于一条从 i 到 j 的路径可以分配以流ψ_{ij}，如果

$$\psi_{ij} \leqslant c_v - \psi_0(v) \quad 对于P_{ij}中所有顶点v \qquad (13\text{-}1\text{-}1)$$

其中 $\psi_0(v)$ 是原来已分配给顶点 v 的流。例如，我们可以如下面这样把流ψ_{ij}分配给图13-1-1中的VWC网。

首先，我们分配 $\psi_{1ij}=1$ 给路径 $P_{1ij}=(e_1, e_4, e_5, e_8)$，这是可行的，因为

$$1 \leqslant \min\{c_i, c_a, c_d, c_f, c_j\}$$

其中c_i是顶点 i 的点容量，c_a是顶点 a 的点容量，其余类推。在分配流ψ_{1ij}时，我们有

$$\psi_0(i)=\psi_0(a)=\psi_0(d)=\psi_0(f)=\psi_0(j)=1$$

$$\psi_0(b)=0$$

其次，分配流$\psi_{2ij}=1$给路径$P_{2ij}=(e_6, e_7, e_8)$，这也是可行的，因为

$$1 \leqslant \min\{c_i-\psi_0(i), c_b-\psi_0(b), c_d-\psi_0(d), c_j-\psi_0(j)\}$$

结果如图13-1-2所示，可以看出，以 i 到 j 不能再分配更多

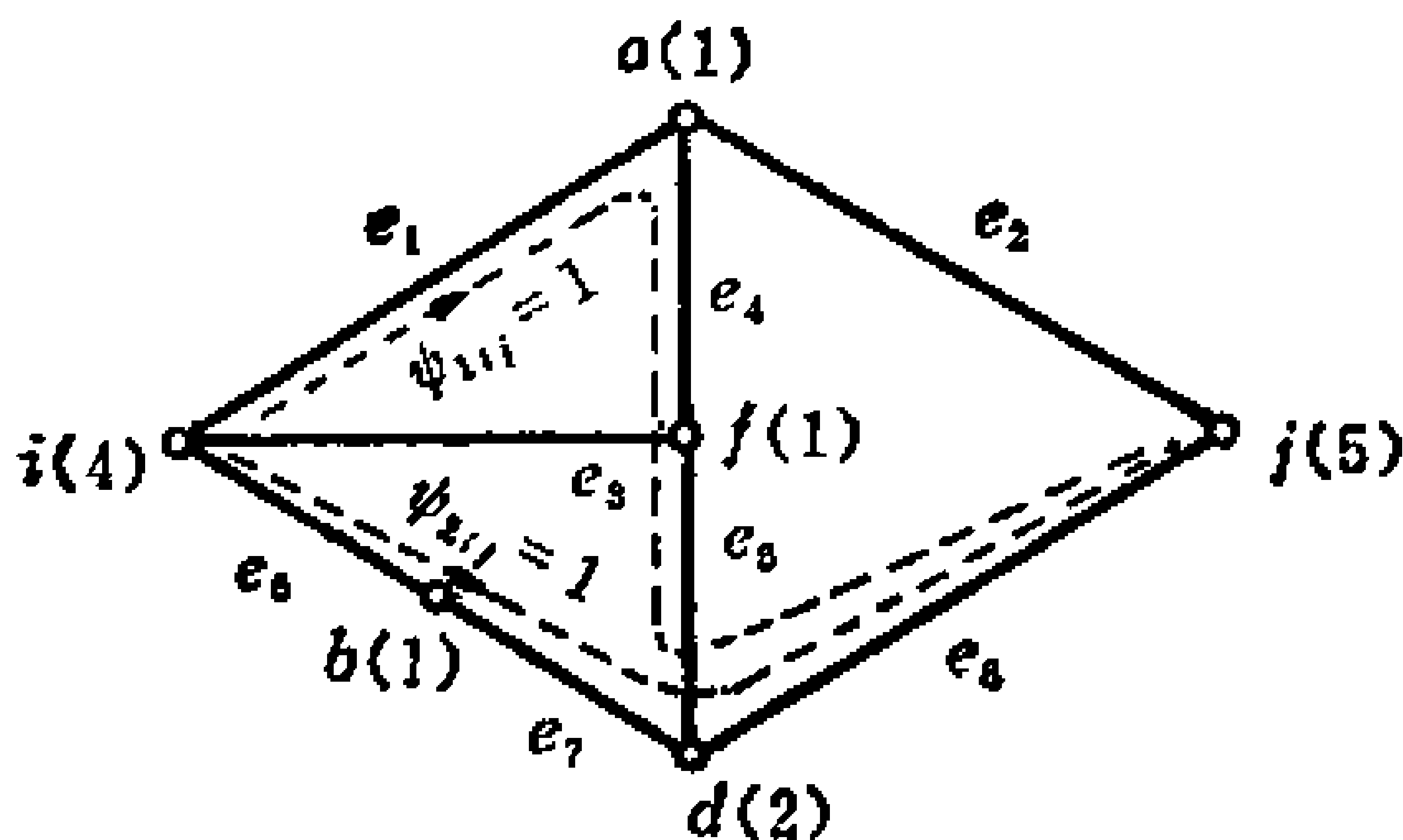


图13-1-2　$\psi_{1ij}+\psi_{2ij}$的分配

的流了。因此在这种分配方式下，总流为 2 。若我们另作不同的分配方式，总流还可以增加，如图13-1-3所示。

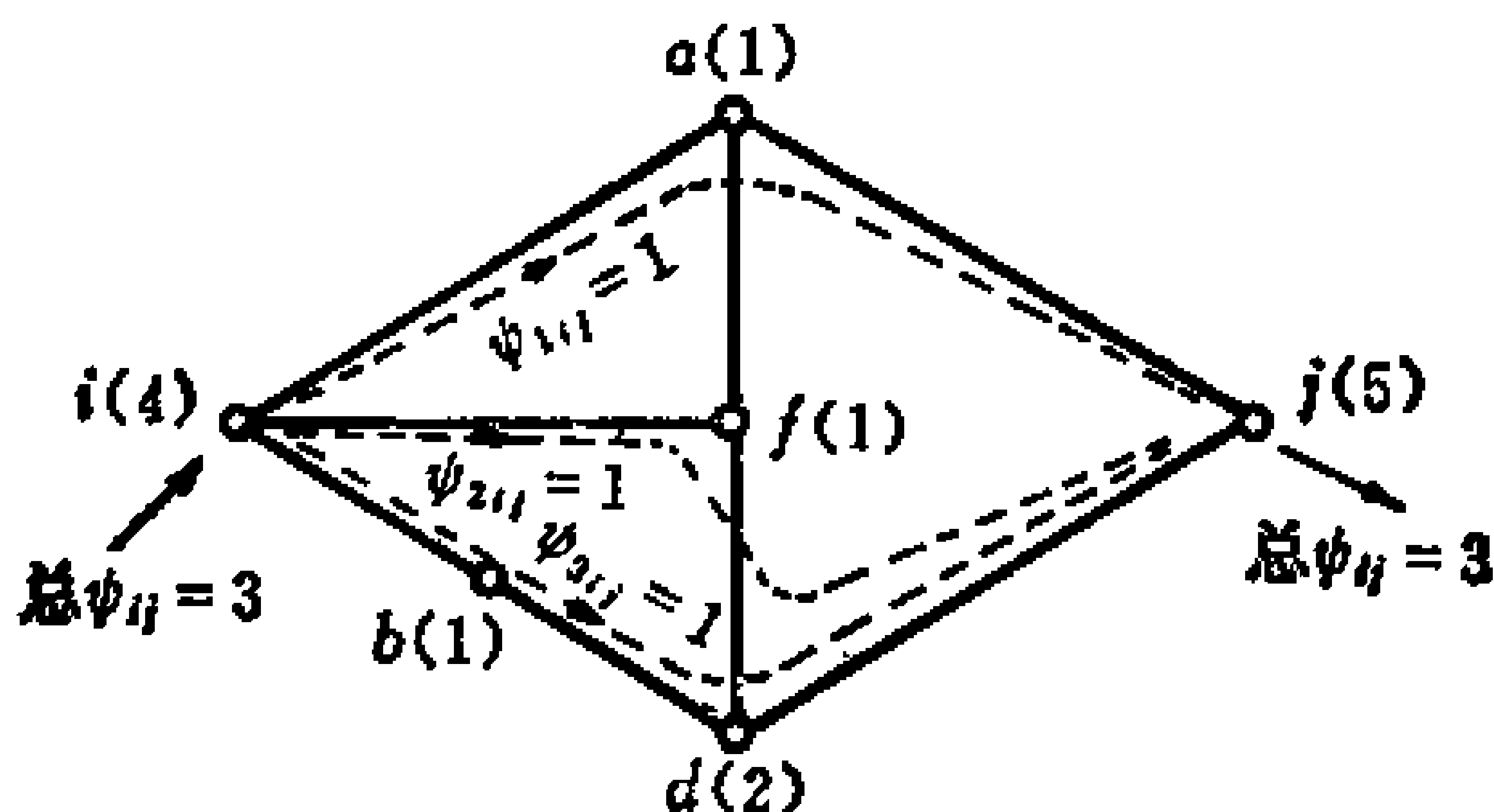


图13-1-3　流 $\psi_{ij}=3$ 的分配

在 EWC 网情况下，如果知道了割集，就可以算出最大流。同样，在 VWC 网中，如果知道了所谓点割，便可以确定最大流。为了定义点割，必须先解释一下从一个线图中删去一些顶点的含义。

定义13-1-1　设Ω是线图G中一些顶点的集合。删去Ω中所

有顶点的意思是从G中删去Ω的所有顶点，以及与这些顶点关联的边。

例如，如果我们从图13-1-1中的线图里删去顶点a和d，则所得的图不包含边e_1，e_2，e_4，e_6，e_7，e_8以及顶点a和d（见图13-1-4）。

图13-1-4　删除顶点a和d

点割的定义也是以后要用到的。

定义13-1-2　假定在一个线图中，从顶点i到顶点j至少有一条路径，则一个分离i和j的点割是这样一个最小顶点集合，只要删去这个集合的全部顶点就破坏了从i到j的所有路径。若删去一些顶点后所得的图不再包含顶点i或顶点j，那么也认为i和j之间的路径被破坏了。

考虑图13-1-1所示的线图，集合(a，d，f)不是分离i和j的点割，因为只要删去顶点a和d就能破坏i和j之间的所有路径。然而，只删去a或d(而不是a与d)，却不能破坏i和j之间的所有路径。所以(a，d)才是分离i和j的点割（见图13-1-4）.在图13-1-1的线图中，分离i和j的所有点割是(i)，(j)，(a，b，f)和(a，d)。

为了研究VWC网中的最大流，我们接着就定义饱和点割。

定义13-1-3　若分配给一个顶点的流等于该顶点的容量，我们就说这个顶点是饱和的。若一个点割中所有顶点都是饱和的，我们就说这个点割是饱和的（或称之为饱和点割）.

作为饱和顶点的一个例子，考虑图13-1-2中所分配的流。顶点a是饱和的，因为分配给顶点a的流为1，并且顶点a的容量

也是1。注意如果一个顶点是饱和的，我们就不能再分配任一更大的流通过这个顶点了。在同一图中。点割(a，d)和(a，b，f)都是饱和的。但是，可以看出在一种流的分配方式下存在一个饱和点割，并不表明我们就得到了最大流。另一方面，我们可以说，如果存在一个分离i和j的饱和点割，就不能从i到j再分配附加的流了。

定理13-1-1 当分配一个从i到j的流ψ_{ij}时，如果存在一个分离顶点i和j的饱和点割，那么从i到j就不能再分配任何附加的（非零）流。

证明： 因为从i到j的任一路径都要经过分离i和j的点割中的顶点，又因为这个点割中所有的顶点都是饱和的，显然不可能再从i到j分配另外的流。（证毕）

与EWC网的基本饱和割集相似，我们定义基本饱和点割如下。

定义13-1-4 当分离i和j的点割按一种分配方式变为饱和点割时，若从i到j分配了非零流的每一路径刚好通过该点割的一个顶点，则称此饱和点割在此分配方式下是基本的，或称为基本饱和点割。

考虑图13-1-2中流的分配方式。集合(a，d)不是基本饱和点割，因为分配了非零流ψ_{1ij}的路径(e_1,e_4,e_6,e_8)通过a，d两个顶点。在图13-1-3中流的分配方式下，集合(a，d)是基本饱和点割，集合(a，b，f)也是基本饱和点割。根据这个定义，我们有以下的重要定理。

定理13-1-2 对于一个无向VWC网，以i到j的流是最大流，当且仅当存在一个分离i和j的基本饱和点割。

在证明这个定理之前，我们先研究一下有关的引理。

引理13-1-1 设W_1和W_2都是分离顶点i和j的点割。在删去W_1的所有顶点后所得的图中，设G_2是包含顶点j的最大连通

子图，G_1是余下的子图，注意G_1和G_2都可能只由顶点构成．如果W_2同时包含G_1和G_2中的顶点，那么存在一个分离i和j的点割W，使得$W \subset W_1 \cup W_2$，且W不包含G_1中任何顶点．

证明： 考虑图13-1-5的线图，这个线图的所有顶点都是在不相交的集合$\Omega_{11}, \Omega_{12}, \Omega_{21}, \Omega_{22}, \Omega_A, \Omega_I, \Omega_B, U_A$和$U_B$之中，点割$W_1 = \Omega_A \cup \Omega_I \cup \Omega_B$，点割$W_2 = U_A \cup \Omega_I \cup U_B$，$i \in \Omega_{11}$．注意$G_1$由$\Omega_{11}, \Omega_{12}$和$U_A$中所有的顶点及连接这些顶点的所有边组成，$G_2$由$\Omega_{21}$，$\Omega_{22}$和$U_B$中所有顶点及连接这些顶点的所有边组成。还要注意，图中的线图是一般情况，足以用来证明这个引理。

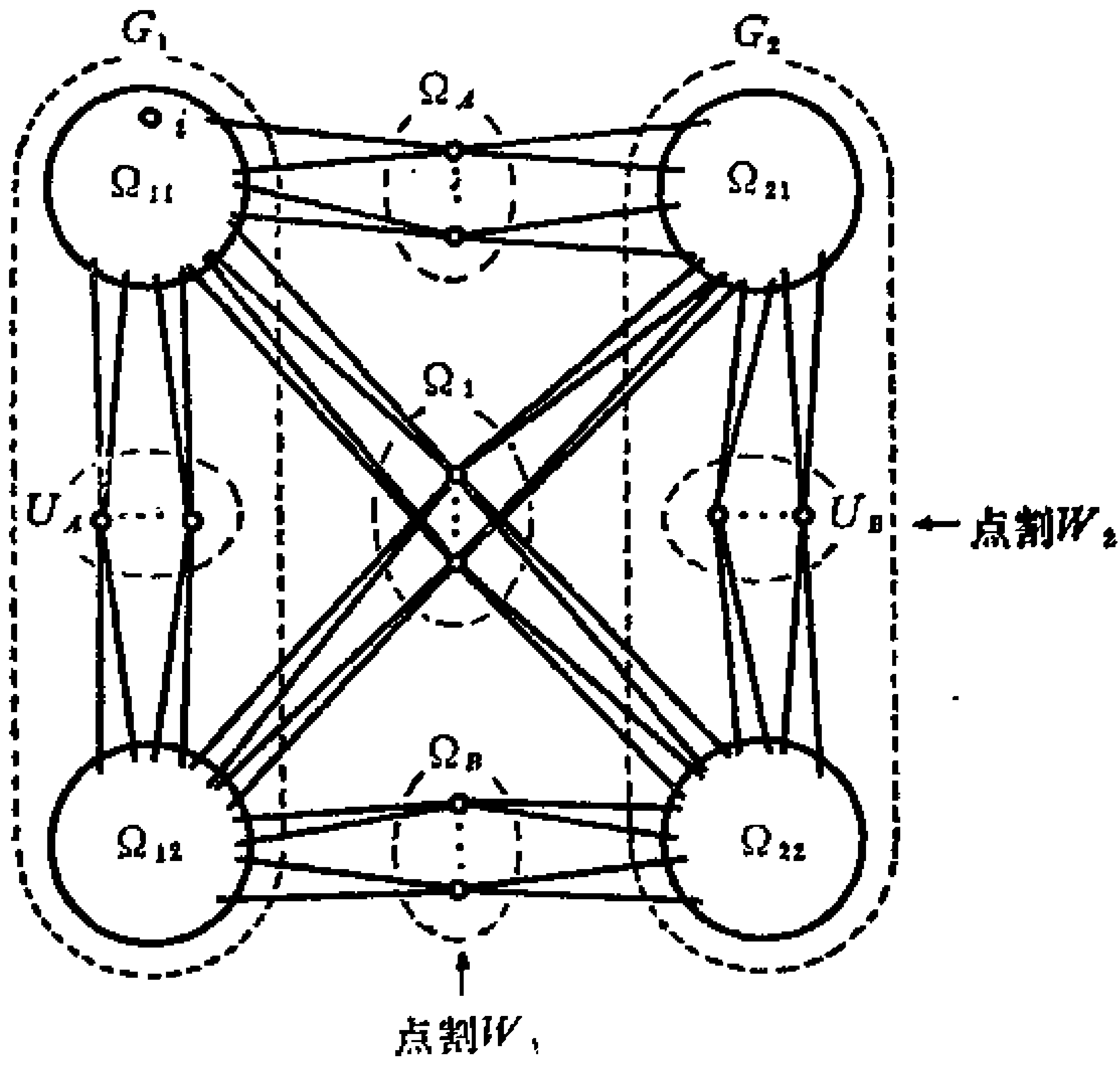


图13-1-5　点割W_1和W_2

因为$j\in G_2$，所以 j 既可能在Ω_{21}中，也可能在Ω_{22}中，当$j\in\Omega_{21}$时，显然集合 $\Omega_A\cup U_B\cup\Omega_I$ 包含所求分离 i 和 j 的点割的集合。同样，当$\in j\Omega_{22}$时，集合$U_B\cup\Omega_I\cap\Omega_B$包含所求分离 i 和 j 的点割的集合。 (证毕)

定义13-1-5 设 W_0 是一个分离 i 和 j 的饱和点割，在删去 W_0 的所有顶点得到的图中，G_2是包含顶点 j 的最大连通子图，G_1是余下的子图。如果不存在其他分离 i 和 j 并包含 G_2 的顶点的饱和点割，那么就称W_0为最接近顶点 j 的饱和点割。

图13-1-2中的点割（a，d）是最接近 j 的饱和点割，因为不存在其他分离 i 和 j 并包含顶点 j 的饱和点割．注意在这里G_2只由一个顶点组成，即顶点 j 。还要注意，这样的点割的存在是由引理13-1-1所保证的。

利用这个定义，我们可以证明定理13-1-2如下。如果不存在分离 i 和 j 的饱和点割，我们就可以分配一个从 i 到 j 的附加流。因此，如果已对一个无向 VWC 网G分配了一个从 i 到 j 的最大流，那么我们可以假设，至少存在一个分离 i 和 j 的饱和点割。

假定存在 k 个分离 i 和 j 的饱和点割，但它们都不是基本饱和点割。设W_0是最接近 j 的饱和点割，如图 13-1-6 所示。因为

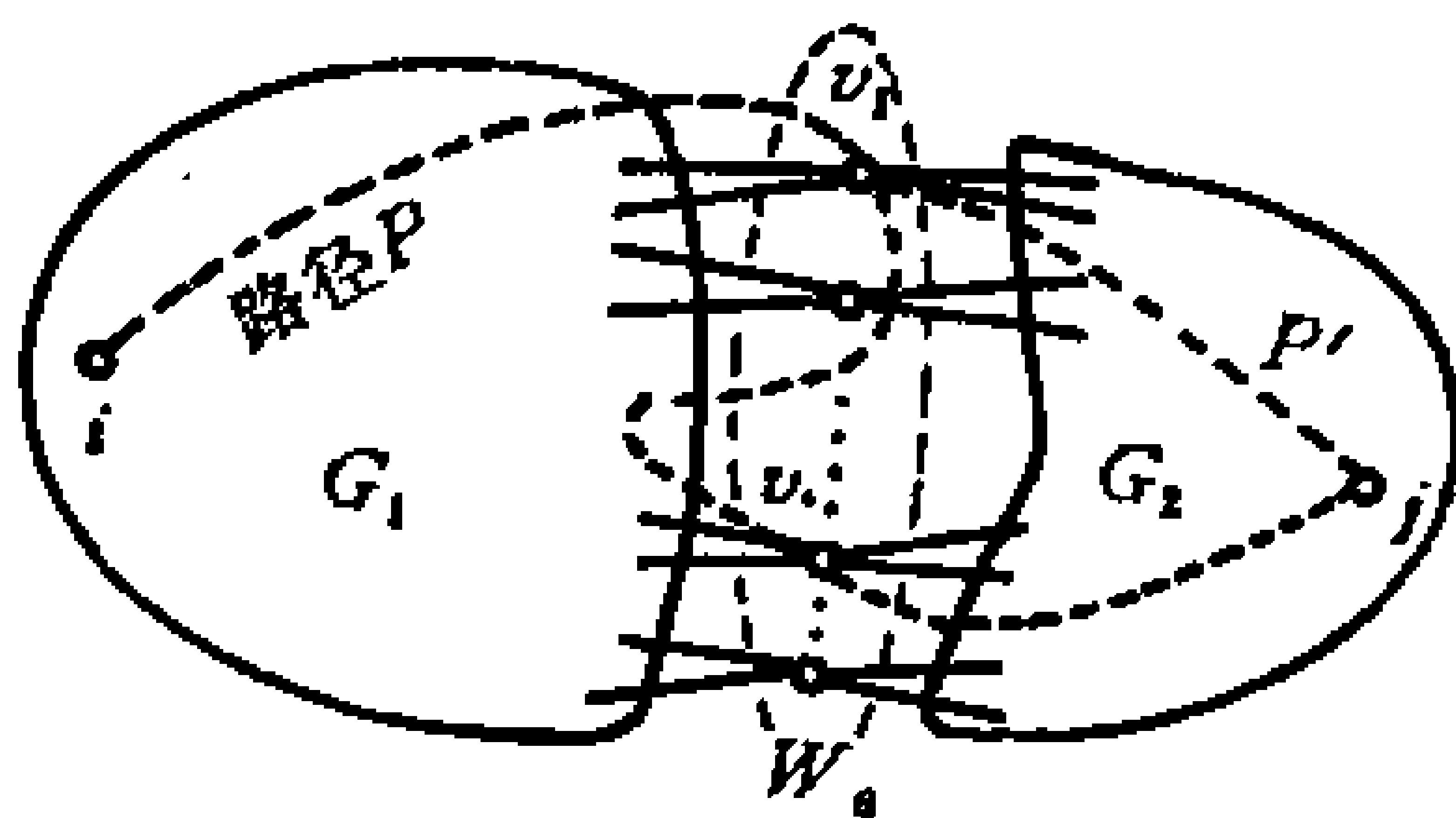


图13-1-6 饱和点割W_0及路径P和P'

W_0不是一个基本饱和点割，所以存在一条从 i 到 j 并且已分配到非零流ψ_{1ij}的路径，它通过W_0中一个以上的顶点。设这条路径是P，它在W_0中通过的第一个顶点是v_1，如图所示。那么存在一条从v_1到 j 的路径P_1，它只通过G_2的顶点，对这条路径就能分配一个从v_1到 j 的非零流。设P'是一条从 i 到 j 的路径，它是由路径P_1和路径P从 i 到v_1的一段组成的。对某些非零δ，把已分配给P的流变成$\psi_{1ij}-\delta$，并将δ分配给路径P'，我们就可以保持从 i 到 j 的流的数量不变。然而因为在W_0中至少有一个顶点，它分配到的流量减少了δ，故W_0已不再是饱和的了。于是重新分配从 i 到 j 的流，就可以使饱和点割的数目减少，且不产生基本饱和点割。只要至少存在一个饱和点割而不存在分离 i 和 j 的基本饱和点割，这种作法就是可行的。因此我们可以把饱和点割的数目从 k 减少到零。由于当分离 i 和 j 的饱和点割不存在时，我们可以再分配一个附加流，所以原来分配的流不可能是最大流，这是一个矛盾。因此必定至少有一个分离 i 和 j 的基本饱和点割存在。逆定理的证明留给读者。

为了从点割求最大流，我们定义点割的值如下。

定义13-1-6 符号$V[W_i]$表示集合W_i中所有顶点点容量之和，称为集合W_i的值。

例如，图13-1-1中线图的点割(a,d)的值为$V[(a,d)]=1+2=3$。

当从 i 到 j 分配了最大流时，根据定理13-1-2，必有一个分离 i 和 j 的基本饱和点割存在。为了得到最大流，已对从 i 到 j 的路径分配了非零流。由定义，这里每条路径正好经过基本饱和点割的一个顶点。因此，如果W_0是一个分离 i 和 j 的基本饱和点割，那么W_0的值必定等于从 i 到 j 的最大流。与EWC网的情况一样，如果我们用端限容量t_{ij}来表示从 i 到 j 的最大流，就有

$$t_{ij}=V[W_0] \tag{13-1-2}$$

设$\{W\}$是分离 i 和 j 的所有可能点割，则我们可以看出，对于$\{W\}$中每一个W，必有

$$V[W_0]\leqslant V[W] \tag{13-1-3}$$

定理13-1-3 对于一个无向VWC网，从 i 到 j 的端限容量 t_{ij} 等于

$$t_{ij}=\min\{V[W],W\in\{W\}\} \tag{13-1-4}$$

注意这个定理与定理12-1-3之间的相似之处。

例13-1-1 考虑图13-1-1中的无向VWC网G。分离 i 和 j 的全部点割为(i),(j),(a,b,f)和(a,d)。这些点割的值分别为

$$V[(i)]=4$$
$$V[(j)]=5$$
$$V[(a,b,f)]=3$$
$$V[(a,d)]=3$$

所以从 i 到 j 的端限容量 t_{ij} 为

$$t_{ij}=\min\{4,5,3,3\}=3$$

当考虑从 i 到 d 的最大流时，我们利用分离 i 和 d 的全部点割，即(i),(d),(a,b,f)和(b,f,j)。则从 i 到 d 的端限容量 t_{id}为

$$t_{id}=\min\{4,2,3,7\}=2$$

对于讨论各端限容量之间的关系来说，重要的是至少存在着一个点割，它在从一个顶点到另一个顶点最大流的任一分配方式下是基本饱和点割。这样的一个点割称为端限容量的对应点割。

定义13-1-7 如果对于每一个从 i 到 j 的最大流的每一分配方式，W_0都是分离 i 和 j 的基本饱和点割，则称W_0为端限容量 t_{ij} 的对应点割。

为了证明t_{ij}的对应点割的存在性，我们用反证法，从而得到

矛盾的结果。

设 $\{W_{11}W_{12}\cdots W_{1K_1}\}$ 是最大流的一种分配方式产生的所有分离 i 和 j 的基本饱和点割的集合。设这个分配方式是将 $\psi_{r_{ij}}$ 分配给$P_{r1}(r=1,2,\cdots,m_1)$。设 $\{W_{21}W_{22}\cdots W_{2K_2}\}$ 是最大流的另一种分配方式而产生的所有分离 i 和 j 的基本饱和点割的集合。假定这种分配方式是将 $\psi_{S_{ij}}$ 分配给从 i 到j的路径$P_{S2}(S=1,2,\cdots,m_2)$。现在我们假设 $\{W_{11}W_{12}\cdots W_{1K_1}\}\cap\{W_{21}W_{22}\cdots W_{2K_2}\}=\phi$。对于$r=1,2,\cdots,m_1$ 和$S=1,2,\cdots,m_2$，把 $\alpha\psi_{r_{ij}}$分配给P_{r1}，把$(1-\alpha)\psi_{S_{ij}}$ 分配给P_{S2}，其中 $0<\alpha<1$，将得到从 i 到 j 的最大流的一种新分配方式。因为任何一个$W_{1p}(1\leqslant p\leqslant k_1)$ 都不在 $\{W_{21}W_{22}\cdots{}_{2K_2}\}$ 中，所以新分配法不能使 W_{1p} 变成基本饱和点割。同样，任何 $W_{2q}(1\leqslant q\leqslant k_2)$ 都不在 $\{W_{11}W_{12}\cdots W_{1K_1}\}$ 中，所以新分配法也不能使W_{2q} 变成基本饱和点割。并且，这种新分配法也不能使其他任何点割变成基本饱和点割。可见在这种新分配方式下，不存在基本饱和割集。这就意味着这个流不是最大的，这是一个矛盾。因此至少有一个点割既在$\{W_{11}W_{12}\cdots W_{1K_1}\}$ 中，又在 $\{W_{21}W_{22}\cdots W_{2K_2}\}$ 中。

假定$\{W_{p1}W_{p2}\cdots W_{pk_p}\}$是最大流的分配方式 $\psi_{ij}^{(p)}(p=1,2,\cdots,n.)$ 而产生的所有分离 i 和 j 的基本饱和点割的集合。根据同样的理由，我们可以证明在所有这些集合中，至少存在一个基本饱和点割W_0，有

$$W_0\subset\bigcap_{p=1}^{n}\{W_{p1}W_{p2}\cdots W_{pk_p}\}\tag{13-1-5}$$

并且可以断定，有一个端限容量的对应点割存在。利用这个对应点割，可以证明以下重要定理。

定理13-1-4 在一个无向VWC网里，对于任意三个顶点 i，j 和 k，有

$$t_{ij}\geqslant\min\{t_{ik},t_{kj}\}\tag{13-1-6}$$

证明： 考虑图13-1-7中的线图，W_0是端限容量t_{ij}的对应点割。

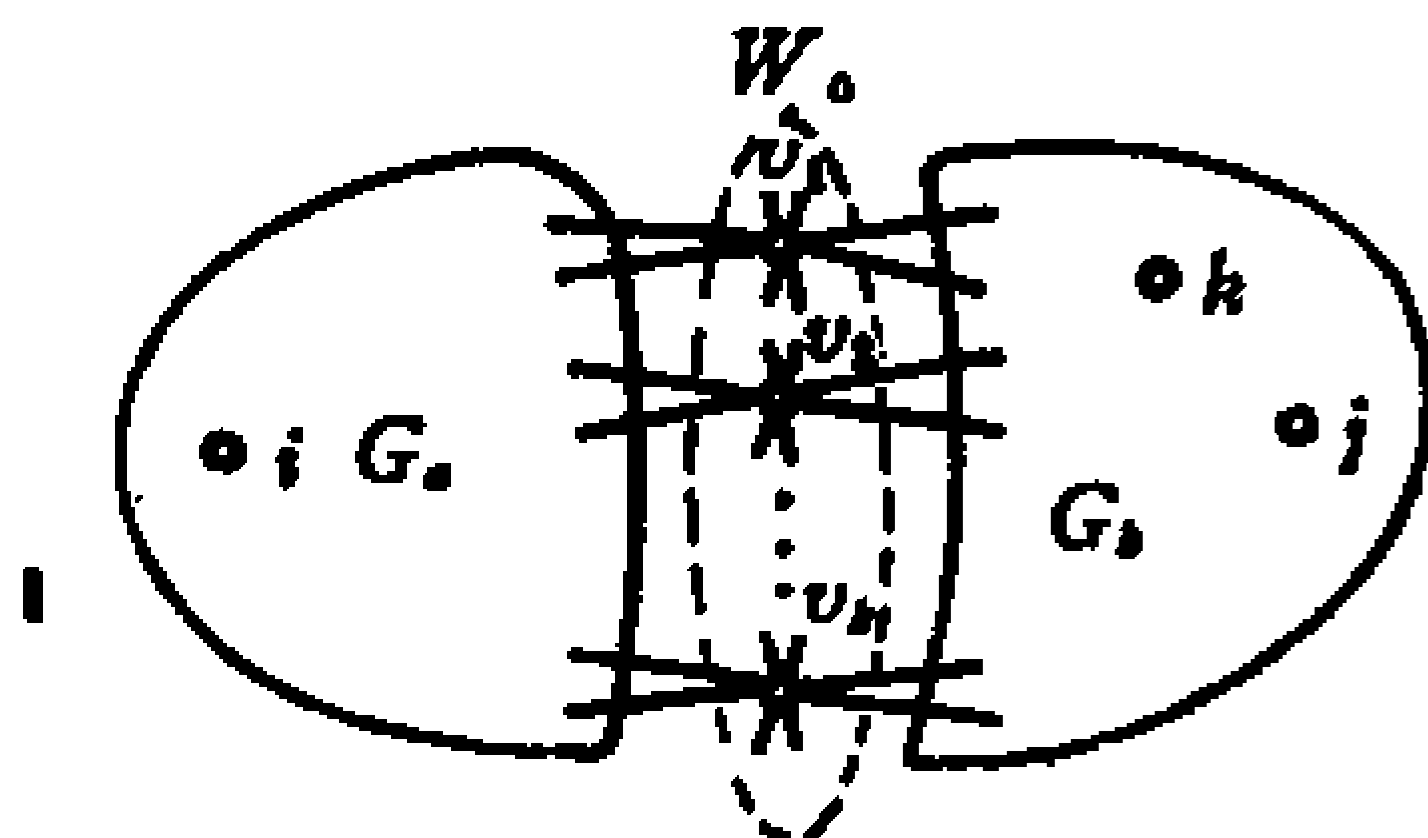


图13-1-7 顶点 i，j，k和点割W

情形 1 假定顶点k在G_b中，于是，若t_{ik}的对应点割W_1也是分离i和j的点割，则$V[W_1]$必定等于$V[W_0]$。所以$t_{ij}=t_{ik}$。如果W_1不是分离i和j的点割，如图13-1-8所示，则t_{ik}不可能大于t_{ij}。因为W_0也是分离i和k的点割，所以在这种情形下定理为真。

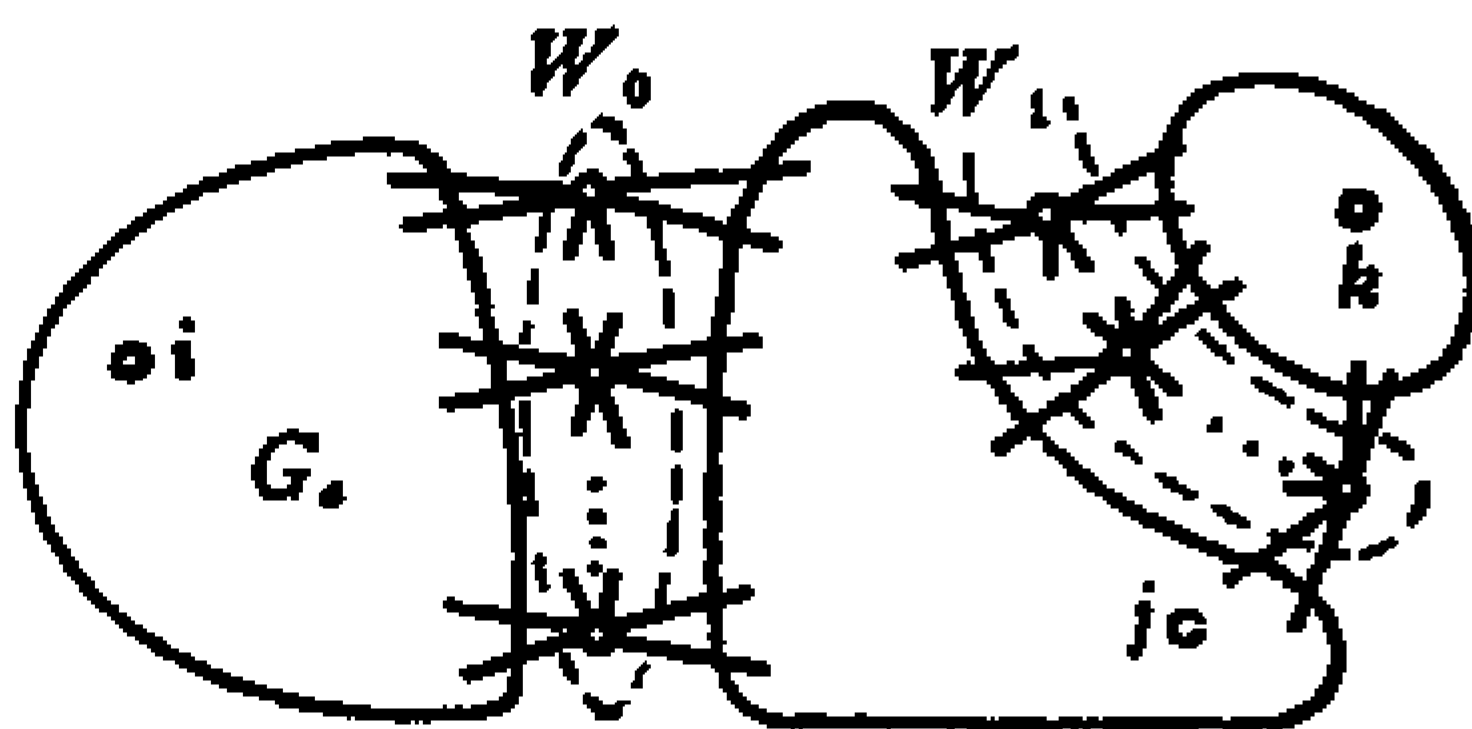


图13-1-8 点割W_0和W_1

情形 2 假定顶点k在W_0中，那么，显然$t_{ij}\geq t_{ik}$。因此在这种情形下定理为真。

情形 3 假定顶点k在G_a中，那么，如果我们不考虑t_{ik}，而是考虑t_{kj}，就将得到与情形 1 一样的结果，即$t_{ij}\geq t_{kj}$。因此

在这种情形下定理为真。

当顶点 i 或者顶点 j 构成一个点割 W_0 时，我们有与情形 1，2 或 3 相同的情况，这取决于顶点 k 的位置。由此定理为真。

（证毕）

这个三角关系正好与 EWC 网中的三角关系一样。作为一个例子，我们考虑图13-1-1中的 VWC 网。在例13-1-1中，曾求出端限容量 $t_{ij}=3$，$t_{id}=2$。对于这种情况，显然有 $t_{ij}\geqslant\min\{t_{id}, t_{dj}\}$。让我们来看看，$t_{id}\geqslant\min\{t_{ij}, t_{jd}\}$ 是否成立。因为 $t_{ij}>t_{id}$，如果定理13-1-4是对的，必定有 $t_{id}\geqslant t_{jd}$。用定理13-1-3算出 t_{jd} 为

$$t_{jd}=\min\{2,5\}=2$$

可以看出，上式是成立的。

13-2 无向VWC网的端限容量矩阵

VWC 网的端限容量矩阵可以完全象 EWC 网一样定义：端限容量矩阵 T 的每一个元素是

$$t_{ij}=\text{从 } i \text{ 到 } j \text{ 的端限容量，} \quad i\neq j$$

$$t_{ii}=d$$

（通常把 t_{ii} 定义为顶点 i 的点容量。但这里仍用记号 d，为的是让 EWC 网和 VWC 网的端限容量矩阵有相同的形式。）

例如，图13-2-1中 VWC 网的端限容量矩阵为

$$T=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} d & 2 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & d & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & d & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & d & 4 \\ 6 & 2 & 1 & 4 & d \end{bmatrix} \end{array}$$

因为我们所讨论的是无向 VWC 网，故端限容量矩阵是对称

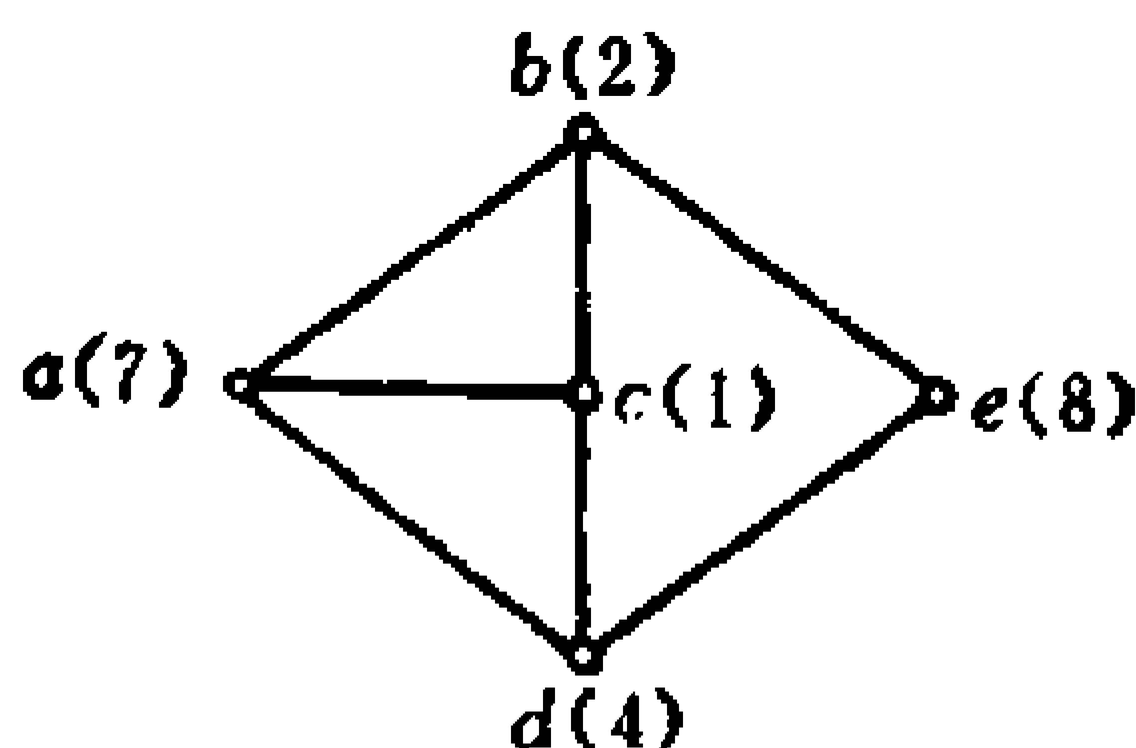


图13-2-1　VWC网

的。并且由于端限容量对应点割的存在，这个矩阵也有主分块划分特性，这与EWC网的端限容量矩阵是一致的。

定理13-2-1　设T是一个无向VWC网的端限容量矩阵，则主分块划分可适用于T，也适用于由主分块划分产生的，阶数大于1的每个结果主子阵。

这个定理的证明与EWC网所满足的定理12-2-1条件的必要性的证明非常相似。

例如，在图13-2-1的VWC网中，重排端限容量矩阵的行和列为

$$
T=\begin{array}{c}
\\ c \\ b \\ d \\ a \\ e
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} c & b & d & a & e \end{array} \\
\left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
d & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline
1 & d & 2 & 2 & 2 \\ \cline{2-5}
1 & 2 & d & 4 & 4 \\ \cline{3-5}
1 & 2 & 4 & d & 6 \\ \cline{4-5}
1 & 2 & 4 & 6 & d
\end{array}\right]
\end{array}
$$

我们可以看出，定理13-2-1是成立的。

考虑以下矩阵：

$$M = \left[\begin{array}{c:c:cc} d & 2 & 1 & 1 \\ \hdashline 2 & d & 1 & 1 \\ \hdashline 1 & 1 & d & 3 \\ \hdashline 1 & 1 & 3 & d \end{array}\right]$$

我们可以证明它并不是一个由四个顶点构成的无向 VWC 网的端限容量矩阵。但是，对矩阵本身和所有的结果主子阵都可以施行主分块划分。这个例子表明，尽管可以把一个矩阵看成一个 VWC 网（其顶点数与矩阵阶数相同）的端限容量矩阵来进行主分块划分，定理13-2-1的条件却不是充分的。（回忆一下，定理12-2-1所给出的条件对于 EWC 网是充分的。）

一个原因是，VWC 网的端限容量具有的一些特殊性质是 EWC 网所没有的。为了找到这些性质，设 W_0 是从 i 到 j 的端限容量的对应点割，如图13-2-2所示，其中W_0假设为$(v_1, v_2, \cdots, v_k)$，又设 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 分别是顶点 v_1，v_2，…，v_k 的点容量。注意 $c_1 + c_2 + c\cdots + c_k$ 等于t_{ij}。

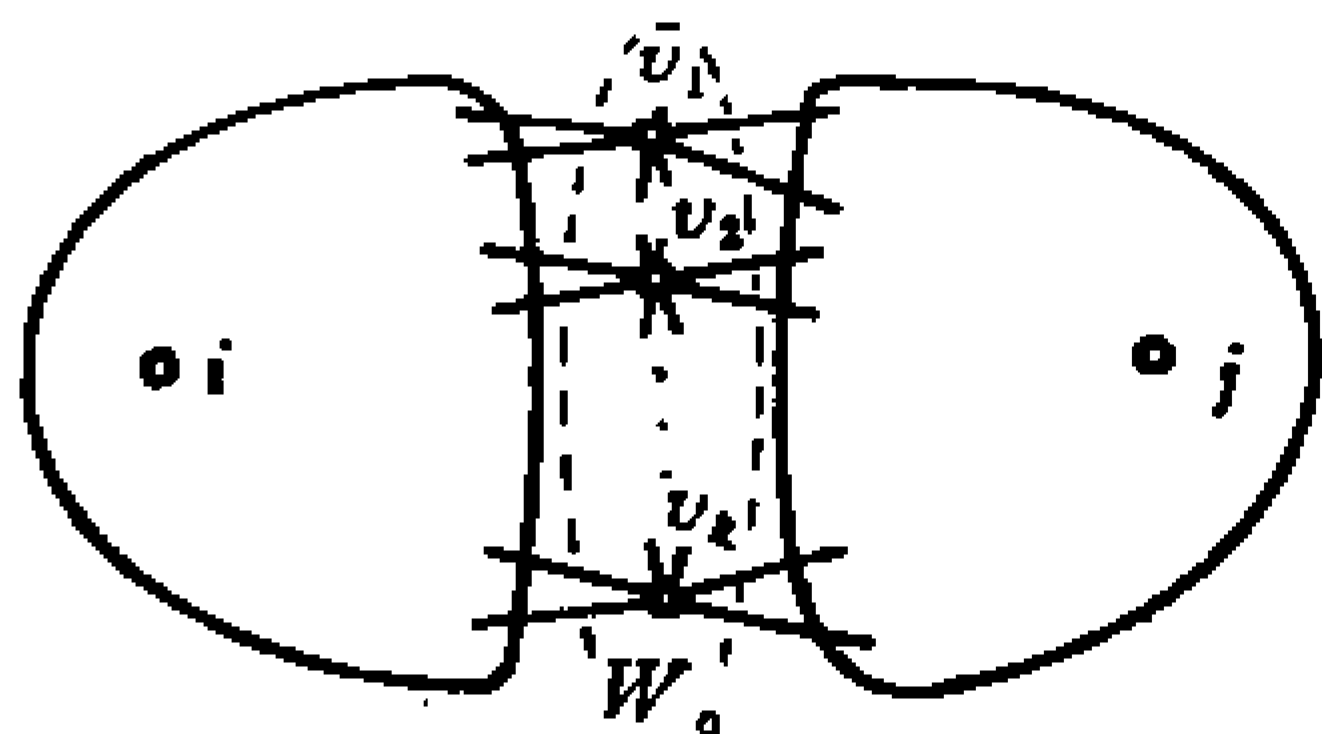


图13-2-2 点割W_0

为了求出从 i 到 v_1 的端限容量t_{iv_1}，我们来回忆一下是怎样分配最大流的，就是，当分配从 i 到 j 的最大流$\psi_{ij} = \sum_{r=1}^{n} \psi_{r_{ij}}$时，

每个$\psi_{r_{ij}}$都要分配给一条从 i 到 j 的路径P_r。假定流$\psi_{1_{ij}}$，$\psi_{2_{ij}}$，…$\psi_{m_{ij}}(m\leqslant n)$ 已分配给从 i 到 j 的路径$P_1,P_2,\cdots,P_m$，它们都通过顶点v_1。

又
$$\sum_{r=1}^{m}\psi_{r_{ij}}=c_1 \qquad (13\text{-}2\text{-}1)$$

这是因为按此分配方式顶点v_1是饱和的。由于从 i 到v_1的最大流是这样分配的，即采用相同的流$\psi_{1_{ij}},\psi_{2_{ij}},\cdots,\psi_{m_{ij}}$，中的一部分来分配给路径$P_1,P_2,\cdots,P_m$ 中的一部分，所以从 i 到v_1的最大流不可能小于c_1，然而t_{iv_1}又不能大于c_1，因此$t_{iv_1}=c_1$。对于每一个端限容量$t_{iv_p}(p=1,2,\cdots k)$，这个结论同样都是对的。

定理13-2-2 设$W_a=(v_1,v_2,\cdots,v_k)$ 是端限容量 t_{ij} 的对应点割，则对$p=1,2,\cdots,k$，$t_{iv_p}=c_p$，且

$$t_{ij}=\sum_{p=1}^{k}t_{iv_p} \qquad (13\text{-}2\text{-}2)$$

其中c_p是顶点v_p的点容量。

定理13-2-3 假定端限容量 t_{ij} 不等于 i，j 的顶点容量 c_i 或 c_j，则存在端限容量$t_{iv_p}(p=1,2,\cdots,m)$，使

$$t_{ij}=\sum_{p=1}^{m}t_{iv_p} \qquad (13\text{-}2\text{-}3)$$

下面的引理给出了另一个有趣的性质。

引理13-2-1 设t_{ij}是 VWC 网的最小端限容量，则

$$t_{ij}=\min\{c_i,c_j\} \qquad (13\text{-}2\text{-}4)$$

其中c_i和c_j分别为顶点 i 和 j 的点容量。

利用这个引理，我们总可以把一个无向 VWC 网的端限容量矩阵T分块为

$$T=\left[\begin{array}{c|c} d & T_{11} \\ \hline T_{11}^t & T_{22}\end{array}\right] \qquad (13\text{-}2\text{-}5)$$

其中 T_{11} 是一个行矩阵，它是由 T 中最小而又相同的元素组成的，为了简便，我们称这种分块为简单分块。注意一个简单分块最多有一个结果主子阵 T_{22} 由一个以上的元素组成。端限容量矩阵的充分条件可以利用简单分块叙述如下。

定理13-2-4 如果对一个矩阵及包含一个以上元素的全部结果主子阵都可进行简单分块划分，则此矩阵是无向 VWC 网的端限容量矩阵。

证明： 根据条件，矩阵M可以表示为

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \\ \vdots \\ \\ n+1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \cdots & & n+1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|ccc} d & \multicolumn{4}{c}{M_1} \\ \hline & d & \multicolumn{3}{c}{M_2} \\ \cline{2-5} M_1' & & & & \\ & M_2' & \ddots & & \\ & & & d & M_n \\ \cline{4-5} & & & M_n' & d \end{array}\right] \end{array} \qquad (13\text{-}2\text{-}6)$$

其中 $M_r=[m_{rr+1}m_{rr+2}\cdots m_{rn}]$ 是一个行矩阵，$r=1,2,\cdots,n$，且 $m_{1n}\leqslant m_{2n}\leqslant\cdots\leqslant m_{nn}$。注意$M_n$由一个元素 m_{nn} 组成。以M为端限容量矩阵的一个 VWC 网如图13-2-3所示。

（证毕）

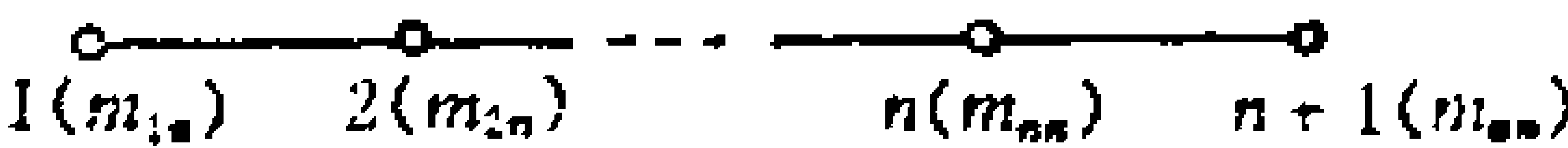


图13-2-3 一个VWC网

如果 VWC 网可以具有比已知矩阵的阶数更多的顶点，我们就可以很容易地设计一个网络。例如，矩阵

$$M = \begin{array}{c|cc|cc|} & a & b & c & d \\ \hline a & d & 2 & 1 & 1 \\ b & 2 & d & 1 & 1 \\ \hline c & 1 & 1 & d & 3 \\ d & 1 & 1 & 3 & d \end{array}$$

它不可能是一个有四个顶点的 VWC 网的端限容量矩阵，但可以是图13-2-4所示 VWC 网的端限容量矩阵的一部分。

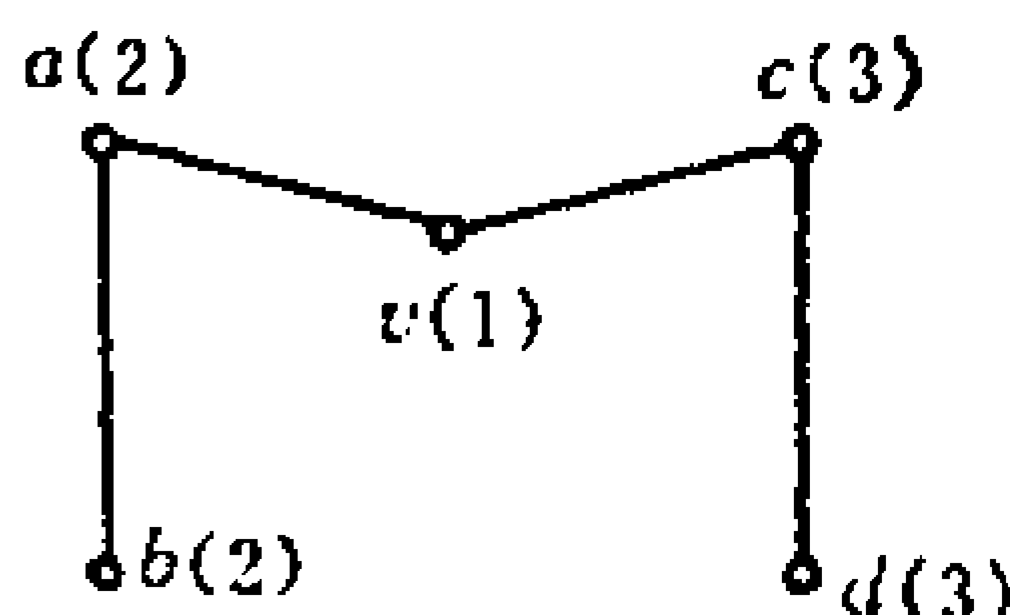


图13-2-4 一个VWC网

一个矩阵是端限容量矩阵的子矩阵的条件由定理 13-2-5 给出。

定理13-2-5 若能对一个矩阵M及所有阶数大于 2 的结果主子阵进行主分块划分，则M是一个 VWC 网的端限容量矩阵的子矩阵。

证明： 考虑一个 EWC 网，设其端限容量矩阵为M。注意这个定理的条件对于 EWC 网是充分的。我们将按以下步骤将这个 EWC网变为一个 VWC网，其端限容量矩阵以M为一个子矩阵。

步骤 1 每一个顶点分配的点容量为∞。

步骤 2 把每一条边e变成两条边e'和e''的串联，如图13-2-5所示。这些边公共顶点v_e的点容量等于边e的边容量c_e。可以看出结果是 VWC 网，其端限容量矩阵以M为它的子矩阵。

（证毕）

图13-2-5 将边 e 变为一些边的串联

作为一个例子，我们考虑上面所给矩阵M. 以M为端限容量矩阵的EWC网，如图13-2-6所示. 首先我们按步骤1对每一顶点赋以∞；再按步骤2，将每一条边e_i用串联边e_i'和e_i''来代替，$i=1,2,3$；然后对顶点v_i赋以e_i的边容量作为点容量，$i=1,2,3$. 从而得到图13-2-7的VWC网。

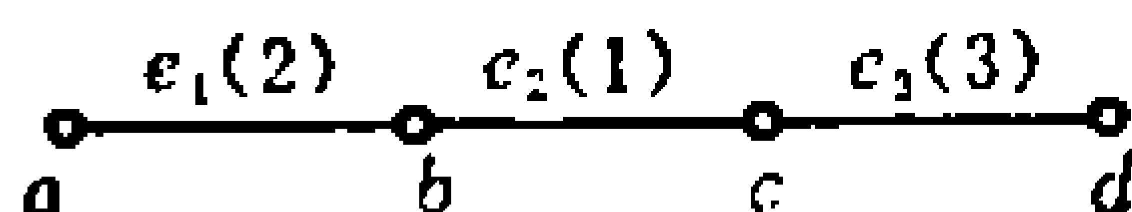


图13-2-6 EWC网

所得VWC网的端限容量矩阵是

$$
T=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc:ccc}
d & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
2 & d & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & d & 3 & 1 & 1 & 3 \\
1 & 1 & 3 & d & 1 & 1 & 3 \\
\hdashline
2 & 2 & 1 & 1 & d & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & d & 1 \\
1 & 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & d
\end{array}\right]
\end{array}
$$

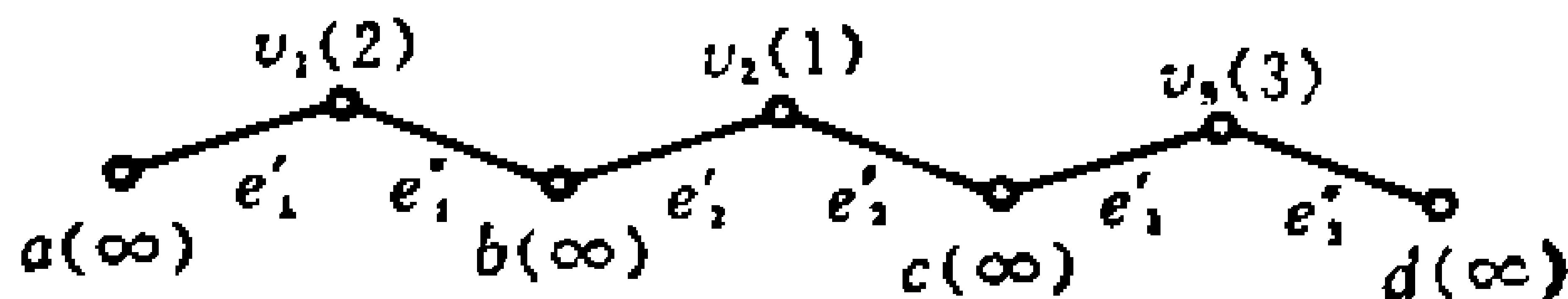


图13-2-7 VWC网

其中，所给矩阵M是一个子矩阵。

13-3 有向VWC网

若一个VWC网的每条边都定了向，这个网络就称为有向VWC网。例如，图13-3-1的网络就是有向VWC网。每条边的定向表示该条边所能传输的流的方向。因此，为了从顶点 i 到顶点 j 分配一个流，我们必须把流分配给从 i 到 j 的有向路径。例

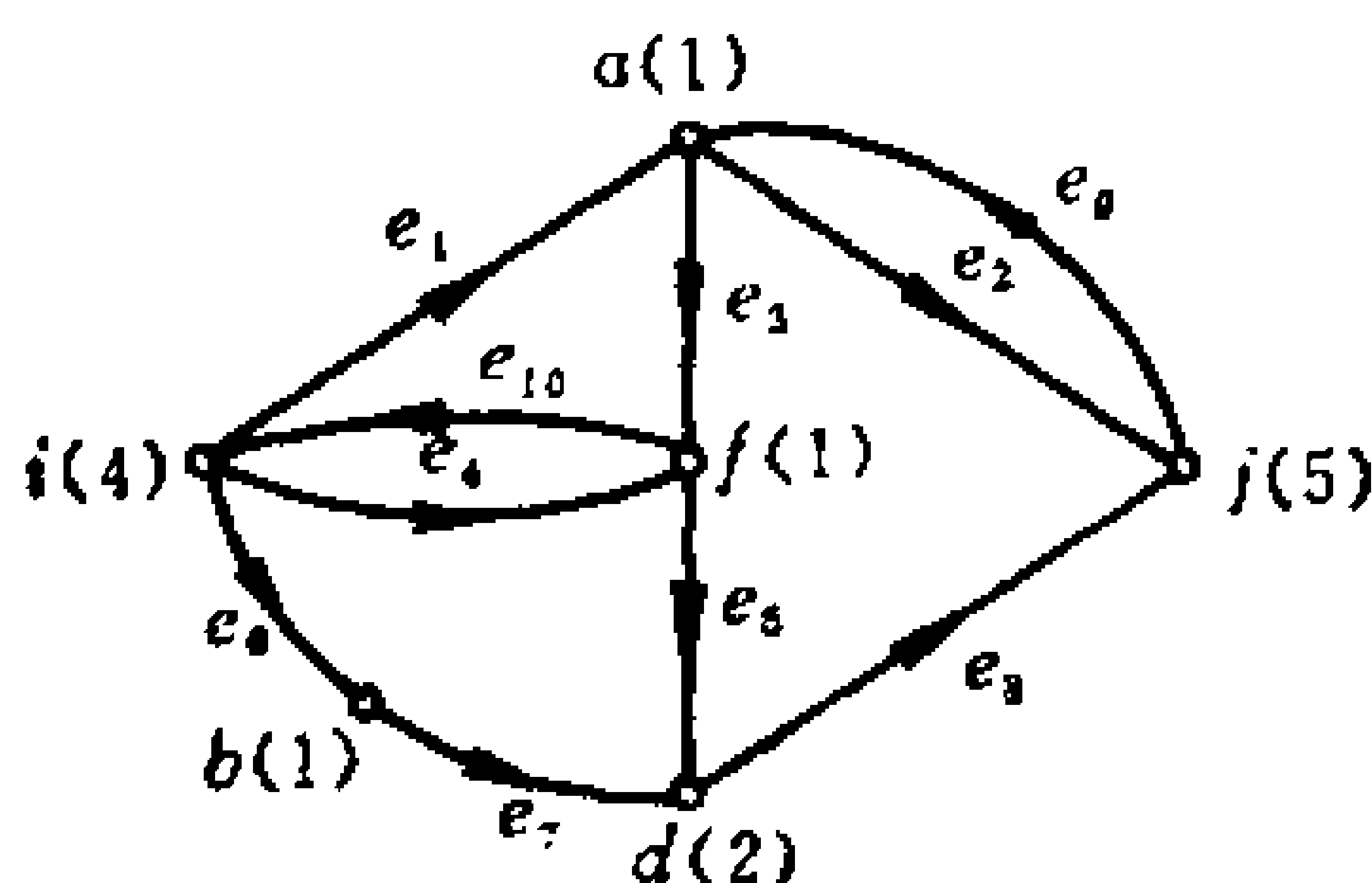


图13-3-1　有向VWC网

如，我们可以把流 $\psi_{ij}=3$ 按下面方式分配给图 13-3-1 的网络。我们将流$\psi_{1ij}=1$ 分配给有向路径$P_1=(e_1,e_2)$，因为

$$1\leqslant\min\{c_i,c_a,c_j\}$$

所以这样做是允许的。其次，我们将流 $\psi_{2ij}=1$ 分配给有向路径 $P_2=(e_4,e_5,e_8)$，这也是可行的，因为

$$1\leqslant\min\{c_i-\psi_0(i),c_f-\psi_0(f),c_d-\psi_0(d),c_j-\psi_0(j)\}$$

其中，$\psi_0(i)=1$，$\psi_0(f)=0$，$\psi_0(d)=0$，$\psi_0(j)=1$，$c_i=4$，$c_f=1$，$c_d=2$，$c_j=5$。最后我们将流 $\psi_{3ij}=1$ 分配给有向路径$P_3=(e_6,e_7,e_8)$，如图13-3-2所示。

对于有向VWC网，为了用拓扑方法求最大流，我们采用下述点半割的概念而不用点割概念。

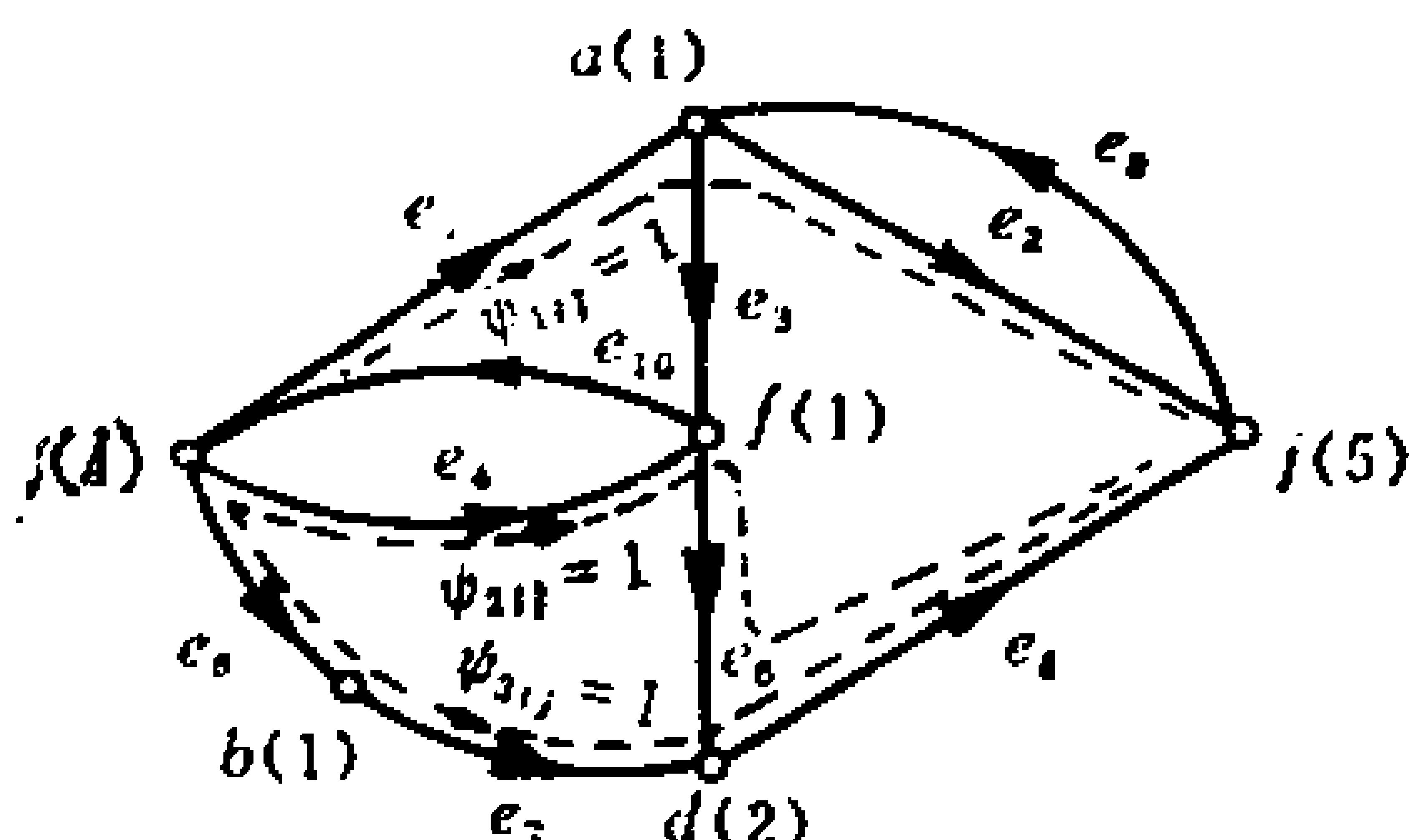


图13-3-2　流 $\psi_{ij}=3$ 的分配

定义13-3-1　一个从 i 到 j 的点半割是这样一个最小顶点集合：删去该集合中所有的顶点，就会破坏从 i 到 j 的所有有向路径。根据定义，若删去顶点后所得的图不含 i 或 j，也认为所有从 i 到 j 的有向路径都已破坏了。

例如，在图13-3-1的有向 VWC 网中，集合（a，d）不但是从 i 到 j 的点半割，而且是分离 i，j 的点割（回忆一下在12-5节中的半割）设 $S=\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)\cup\mathscr{E}(\bar{\Omega}_1\times\Omega_1)$ 是一个分离 i 和 j 的割集，其中 $i\in\Omega_1$，则 S 可以分解为两个半割 s_{ij} 和 s_{ji}：

$$s_{ij}=\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1) \tag{13-3-1}$$

$$s_{ji}=\mathscr{E}(\bar{\Omega}_1\times\Omega_1) \tag{13-3-2}$$

它们有个性质如下：

$$s_{ij}\cap s_{ji}=\phi \tag{13-3-3}$$

但是，点半割不一定有这样的性质。例如，在图 13-3-1 的有向VWC网中，集合（a，d）是一个分离 i 和 j 的点割。而子集(a)是从 j 到 i 的点半割。可是子集（d）却不是从 i 到 j 的点半割。从 i 到 j 的点半割［它是（a，d）的子集］就是（a，d）本身。因此这两个点半割有一个公共顶点。

利用点半割，我们得到一个与定理12-5-2类似的定理.

定理13-3-1 有向VWC网的从 i 到 j 的端限容量 t_{ij} 等于

$$t_{ij}=\min\{V(w_{ij})\} \tag{13-3-4}$$

其中 $\{V(w_{ij})\}$ 是所有从 i 到 j 的点半割值的集合. 注意 t_{ij} 等于从 i 到 j 的最大流，而点半割的值是点半割的所有顶点点容量之和。

除了用点半割代替点割外，这个定理的证明与定理13-1-3的证明是一样的. 此外，对饱和点半割和基本饱和点半割下定义需要慎重一些.

例13-3-1 考虑图13-3-3的有向VWC网. 为了求出从 i 到 j 的端限容量 t_{ij}，首先我们找出从 i 到 j 的所有点半割：(i)，(a,c)，(b,c)，(b,d)和(j). 这些点半割的值为

$$V[(i)]=4,\quad V[(a,c)]=4,\quad V[(b,c)]=5,$$
$$V[(b,d)]=3,\quad V[(j)]=5$$

所以由定理13-3-1，端限容量 t_{ij} 是

$$t_{ij}=\min\{4,4,5,3,5\}=3$$

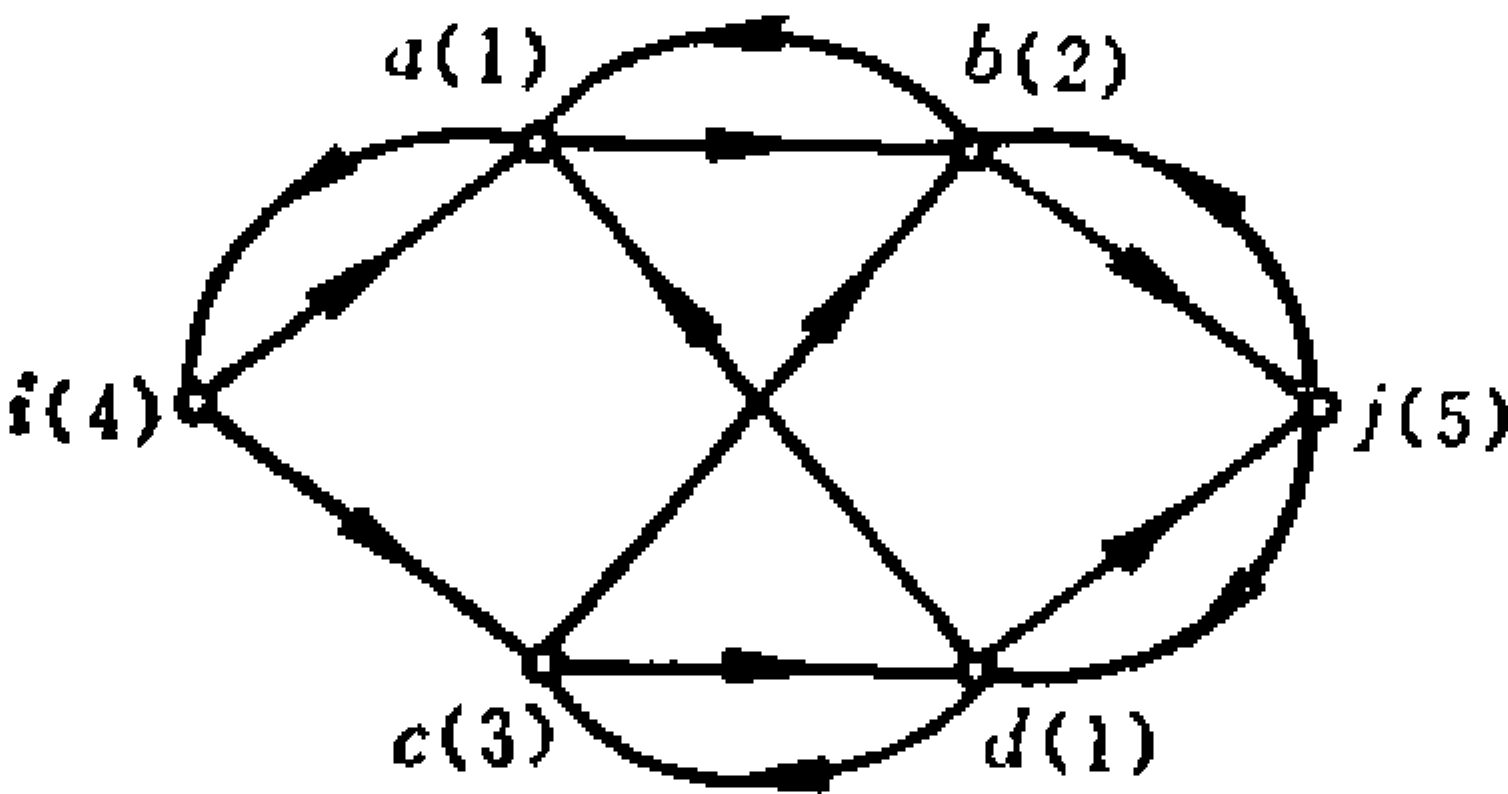


图13-3-3 有向VWC网

为了求出从 j 到 i 的端限容量 t_{ji}，我们找出所有从 j 到 i 的点半割：$\{(j),(b,d),(a),(i)\}$. 则 t_{ji} 为

$$t_{ji} = \min V[(j)], V[(b,d)], V[(a)], V[(i)]$$
$$= \min\{5,3,1,4\} = 1$$

定理13-1-4对有向 VWC 网也是成立的。

定理13-3-2 对于有向 VWC 网的任意顶点 i，j 和 k，有

$$t_{ij} \geqslant \min(t_{ik}, t_{kj}) \tag{13-3-5}$$

除了用点半割代替点割外，这个定理的证明与定理13-1-4的证明相同。作为一个例子，我们考虑图 13-3-3 中的有向 VWC 网。端限容量 t_{ib} 是

$$t_{ib} = \min\{V[(i)], V[(a,c)], V[(b)]\}$$
$$= \min\{4,4,2\} = 2$$

由于 $t_{ij} = 3$，则有

$$t_{ij} \geqslant \min\{t_{ib}, t_{bj}\} = \min\{2, t_{bj}\}$$

有向 VWC 网的端限容量矩阵 T 与无向 VWC 网的端限容量矩阵定义相同，定理13-2-1给出的端限容量矩阵的性质对于有向 VWC 网也是正确的。例如，图13-3-1所示的有向 VWC 网的端限容量矩阵是

$T =$

	a	f	b	j	d	i
a	d	1	1	1	1	1
f	1	d	1	1	1	1
b	1	1	d	1	1	1
j	1	1	1	d	1	1
d	1	1	1	2	d	1
i	1	1	1	3	2	d

该式说明了应用主分块划分的一种方式。注意有向 VWC 网的端限容量矩阵一般是不对称的。

13-4　点割和点半割的生成

正如我们在前几节已看到的，分离 i 和 j 的点割和从 i 到 j 的点半割是 VWC 网中的重要点集。特别是当我们需要求出从 i 到 j 的端限容量时。在无向的情况下，若知道所有分离 i 和 j 的点割，在有向的情况下，若知道从 i 到 j 的点半割，那就很方便了。因此，如果我们能象 5-1 节中生成分离 i 和 j 的割集那样生成点割、点半割，那么求 VWC 网的端限容量就是比较容易的工作了。首先让我们来复习一下，所有分离 i 和 j 的割集是怎样生成的。

在 2-3 节中我们曾经论证过所有的割集，割集的无重边并及空集在环和运算下构成群，因此，我们可以用已知的生成元生成所有的割集。如果我们把割集和割集的无重边并分成两群 $\{S(i;j)\}$ 和 $\{S(ij;.)\}$，其中 $\{S(i;j)\}$ 由所有分离 i 和 j 的割集及分离 i 和 j 的奇数个割集的无重边并组成，$\{S(ij;.)\}$ 由所有不属于 $\{S(i;j)\}$ 的割集和割集的无重边并组成，那么就有

1. 若 S_1 和 S_2 在 $\{S(i;j)\}$ 中，则
   $S_1 \oplus S_2$ 也在 $\{S(ij;.)\}$ 中。
2. 若 S_1' 和 S_2' 都在 $\{S(ij;.)\}$ 中，则
   $S_1' \oplus S_2'$ 也在 $\{S(ij;.)\}$ 中。
3. 若 S_1 在 $\{S(i;j)\}$ 中，S_2' 在 $\{S(ij;.)\}$ 中，则
   $S_1 \oplus S_2'$ 也在 $\{S(i;j)\}$ 中。

只要我们知道生成元中哪些是分离 i 和 j 的，那么根据上述性质就可以从生成元集合生成分离 i 和 j 的所有割集．特别地，如选取生成元集合为 $S_0, S_1, \cdots, S_m (m = n_e - n_v + p)$，其中只有 S_0 分离开 i 和 j，那么我们知道，所有分离 i 和 j 的割集都在下面的集体中：

$$\{S(i,j)\} = \{S_0 \oplus S_k;\ S_k \in \{S'\}\} \qquad (13\text{-}4\text{-}1)$$

其中$\{S'\}$由空集、割集$S_1, S_2, \cdots, S_m$以及$S_1, S_2, \cdots, S_m$的所有可能组合作环和运算而得到的集合组成。如果集体$\{S_0 \oplus S_k;\ S_k \in \{S'\}\}$中的$S_a$不是一个割集，则在同一集体中存在另一个集合$S_b$，使得$S_a \supset S_b$。因此在EWC网中，端限容量

$$t_{ij} = \min\{V[S_0 \oplus S_k];\ S_k \in \{S'\}\} \qquad (13\text{-}4\text{-}2)$$

遗憾地是，分离i和j的点割集体没有这么好的性质。因此，生成所有分离i和j的点割就不象生成所有分离i和j的割集那么简单。不过，有下面几个定理给出的性质，我们就可以用生成分离i和j的割集的方式来求出所有分离i和j的点割。

定理13-4-1 对于VWC网G，设W是分离i和j的点割。设G_1和G_2都是从G中删去W的所有顶点得到的最大连通子图，设顶点j在G_2中，除非$W=(j)$，这时G_2是一个零图（即其中不含顶点）。那么，如果$\Omega(G_2) \neq 0$，则$\mathscr{S}(W \times \Omega(G_2))$是一个分离$i$和$j$的割集，其中$\Omega(G_2)$是$G_2$中所有顶点的集合。

作为一个例子，考虑图13-4-1(a)中的VWC网。对于分离i和j的点割(a,b)，最大连通子图G_1和G_2如图13-4-1(b)所示。因此$\Omega(G_2) = (c,d,j)$，而$\mathscr{S}(W \times \Omega(G_2)) = (e_4, e_5, e_6)$是一个分

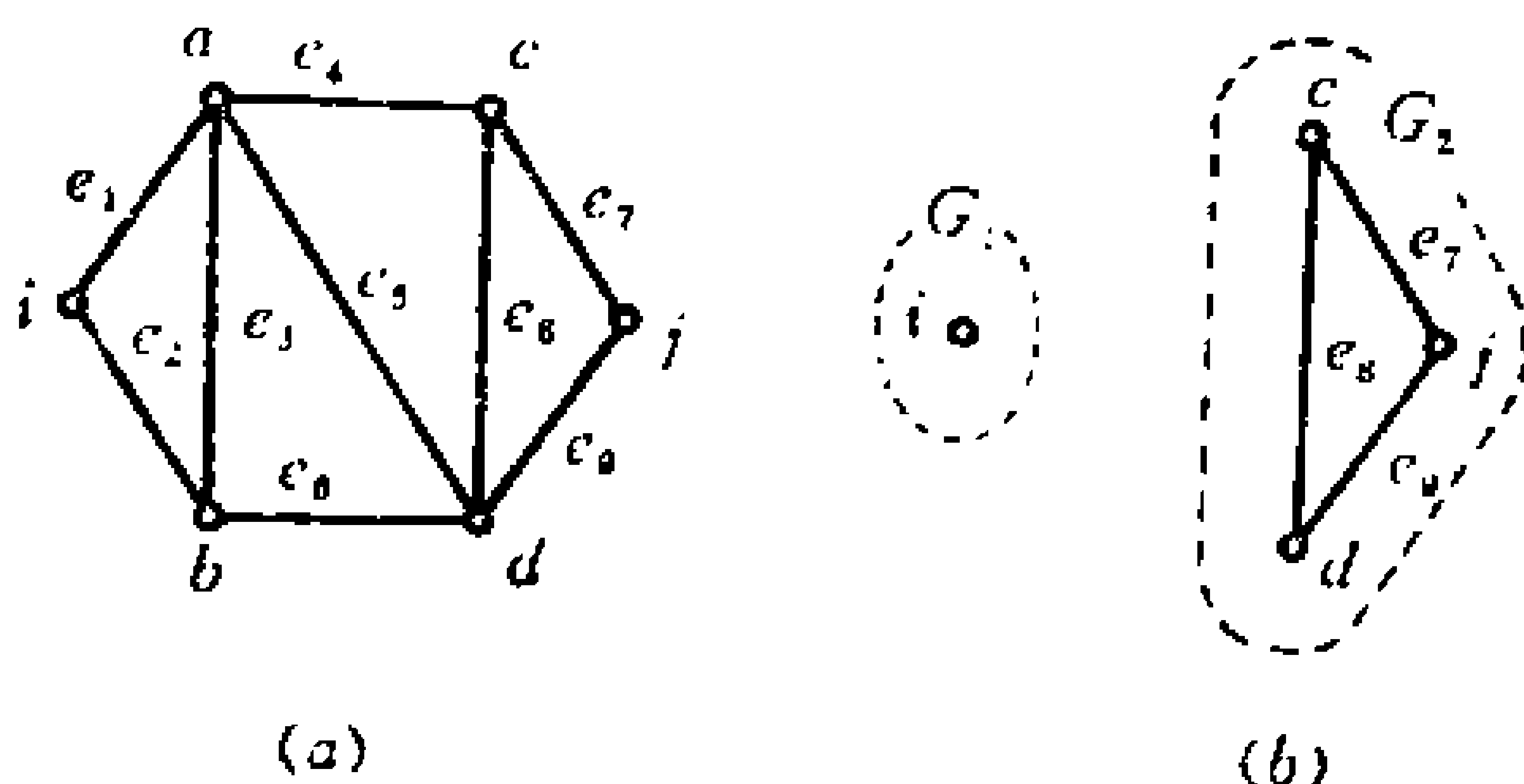


图13-4-1 VWC网及最大连通子图G_1和G_2

离 i 和 j 的割集。对于点割 (a, d)，$\Omega(G_2)=(c, j)$，而$\mathscr{E}(W\times\Omega(G_2))=(e_4, e_6, e_8)$，它是分离 i 和 j 的割集。对于点割（i），$\Omega(G_2)=(a, b, c, d, j)$，而$\mathscr{E}(W\times\Omega(G_2))=(e_1, e_2)$，它也是分离 i 和 j 的割集。

定理13-4-1的证明： 由点割的定义可知，每条从 i 到 j 的路径必定至少经过点割W的一个顶点。由于$\mathscr{E}(W\times\Omega(G_2))$中的每条边与$W$中的顶点关联，故每条从 i 到 j 的路径必定至少包含$\mathscr{E}(W\times\Omega(G_2))$中的一条边。因此从所给网络中删除$\mathscr{E}(W\times\Omega(G_2))$的所有边将破坏所有从 i 到 j 的路径。从而$\mathscr{E}(W\times\Omega(G_2))$包含一个分离 i 和 j 的割集。设G'_1和G'_2都是删去$\mathscr{E}(W\times\Omega(G_2))$中的所有边得到的图的子图，其中 G'_2 是一个包含顶点 j 的最大连通子图。容易看出，G'_2和G_2是相同的。此外，$\Omega(G'_1)=\Omega(G_1)\cup W$。因此$G'_1$由连接在 $\Omega(G_1)\cup W$中两点间的边组成。现在G'_1必定是连通的，因为若它不连通，则W中至少存在一个顶点，使得从 i 到 j 的所有路径都不经过这个顶点，这与假设W是分离 i 和 j 的点割矛盾。因为$\mathscr{E}(W\times\Omega(G_2))$是连接 G'_1和G'_2 的边集，故$\mathscr{E}(W\times\Omega(G_2))$是一个这样的最小边集，使一个连通图在删除了这个集合的所有边后变成分离的。因此$\mathscr{E}(W\times\Omega(G_2))$是一个分离 i 和 j 的割集。（证毕）

根据定理13-4-1，我们可以从每个点割W（$W=(j)$除外）求得割集$\mathscr{E}(W\times\Omega(G_2))$。为了简便，我们称割集$\mathscr{E}(W\times\Omega(G_2))$为点割$W$的对应割集。

定义13-4-1 集合$\mathscr{E}(W\times\Omega(G_2))$称为点割$W$的对应割集，其中$G_2$是包含有顶点 j 且删去W全部顶点所得的最大连通子图。

我们希望知道，对于任意分离 i 和 j 的割集S，是否都存在一个分离 i 和 j 的点割，使S成为这个点割的对应割集。答案是否定的。例如，图13-4-1(a)中，集合$S=(e_2, e_3, e_4, e_6)$是一个分离 i 和 j 的割集，但是不存在分离 i 和 j 的点割，其对应割集为

S'。另一方面，我们有定理13-4-2。

定理13-4-2 设S是在连通线图G中分离i和j的割集。设G_1和G_2是S的对应子图（即G_1和G_2都是从G中删去S的所有边而得到的最大连通子图）。假定$i \in G_1$，则顶点集合

$$W = \Omega(S) \cap \Omega(G_1) \qquad (13\text{-}4\text{-}3)$$

包含一个分离i和j的点割，其中$\Omega(S)$是S中所有边的端点集合。

例如，图13-4-1(a)中的$S = (e_5, e_6, e_7, e_8)$是一个分离i和j的割集。现在$\Omega(S)$是(a,b,c,d,j)，$\Omega(G_1)$是(i,a,b,c)。因此，由式(13-4-3)给出的集合W是(a, b, c)。显然，这个集合包含一个分离i和j的点割(a,b)。

定理13-4-2的证明： 我们只须证明删去W中的所有顶点就会破坏所有从i到j的路径即可．因为S中每条边是连接在G_1的一个顶点和G_2的一个顶点之间的，所以，由式(13-4-3)给出的集合W含有S中每条边的两个端点之一，于是删去W中所有的顶点也就删去了S中所有边。我们知道，删去S的所有边则破坏所有从i到j的路径。因此删去W中所有顶点也会破坏所有从i到j的路径。 （证毕）

为了简便，我们把定理13-4-2中的集合W叫做割集S的对应点集。例如，考虑图13-4-1(a)所示的VWC网中的割集S_1, S_2, S_3, S_4，其中$S_1 = (e_1, e_2)$，$S_2 = (e_1, e_3, e_6)$，$S_3 = (e_2, e_3, e_4, e_5)$，$S_4 = (e_4, e_5, e_6)$．对应点集为

$$W(S_1) = (i)$$
$$W(S_2) = (i, b)$$
$$W(S_3) = (i, a)$$
$$W(S_4) = (a, b)$$

假定S不是一个割集，而是式(13-4-1)给出的$\{S(i;j)\}$中割集的无重边并，那么，我们可以组成与S对应的点集W如下。设

G_1和G_2都是删去S中所有边而得到的不相交子图，而且G_1是一个包含i的最大连通子图。那么，集合W是这样的集体，它是由S的所有边的端点中属于G_1的那些端点所构成的。

注意，删去S中的所有边会产生$\rho(>2)$个最大连通子图，而这些最大连通子图中包含顶点i的一个子图必须选作G_1。例如，图13-4-1(a)中$\{S(i;j)\}$里一个割集的无重边并$S=(e_1, e_3, e_4, e_5, e_7, e_9)$。则子图$G_1$如图13-4-2所示。于是，点集$W$应为$(i, b, c, d)$。

对于$\{S(i;j)\}$中任一集合S，点集$W(S)$可定义如下。

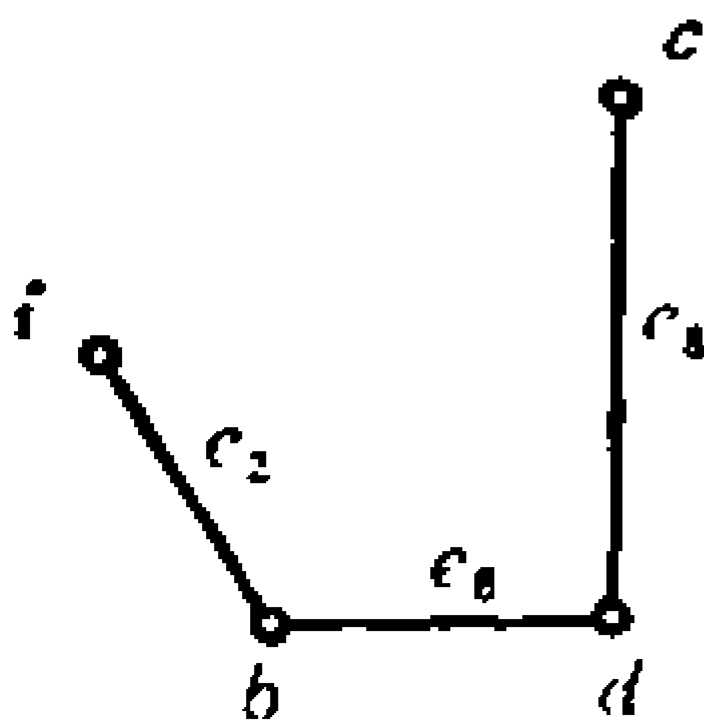


图13-4-2　子图G_1

定义13-4-2　设S是$\{S(i;j)\}$中的一个集合。设G_1是一个在删去S所有的边后，包含顶点i的最大连通子图。则集合S的对应点集（记为$W(S)$）由下式给出

$$W(S)=\Omega(S)\cap\Omega(G_1) \qquad (13\text{-}4\text{-}4)$$

其中$\Omega(S)$是S中所有边的端点集体，$\Omega(G_1)$是G_1中所有顶点的集体。

用这个定义，我们可以推广定理13-4-2。

定理13-4-3　设S是$\{S(i;j)\}$中的一个集合，则集合S的对应点集$W(S)$包含了分离i和j的点割。

这个定理的证明留给读者。

由于$\{S(i;j)\}$是很容易生成的，如果我们能把$\{S(i;j)\}$和VWC网的端限容量t_{ij}联系起来，那么求t_{ij}就不费事了。下一个定理给出了这种关系。

定理13-4-4　VWC网的端限容量t_{ij}等于

$$t_{ij}=\min\{V(j), V[W(S)]; S\in\{S(i;j)\}\} \qquad (13\text{-}4\text{-}5)$$

其中$V[W(S)]$是集合$W(S)$中所有顶点的点容量之和。

证明： 根据定理 13-4-1 除$W=(i)$外，对于任一分离 i 和 j 的点割W，在$\{S(i;j)\}$中存在一个作为对应割集的S，从定义13-4-2可以看出，式(13-4-4)给出的点割$W(S)$就是点割W（其对应割集为S）。因此集体$\{V(j), V[W(S)]; S\in\{S(i;j)\}\}$包含了集体$\{V(W)$；所有分离 i 和 j 的点割$W\}$。并且根据定理 13-4-3，对于$\{S(i;j)\}$中任一集合S'，集合$W(S')$包含一个点割，比如说W。因此

$$\min\{V(j), V[W(S)]; S\in\{S(i;j)\}\}$$
$$=\min\{V(W)；\text{所有分离 } i \text{ 和 } j \text{ 的点割} W\}$$
(13-4-6)

又因为据定理13-1-3，式(13-4-6)的右端等于从 i 到 j 的端限容量t_{ij}，所以这个定理是对的。 （证毕）

根据这个定理，我们可以用生成集体$\{S(i;j)\}$的办法来求出VWC网的端限容量，见下面的例子。

例13-4-1 在图13-4-3的VWC网中，所有的关联集（除与顶点j对应的以外）为

$S(i)=(e_1,e_2)$，

$S(a)=(e_1,e_3,e_4,e_5)$，

$S(b)=(e_2,e_3,e_6)$，

$S(c)=(e_4,e_7,e_8)$，

$S(d)=(e_5,e_6,e_8,e_9)$

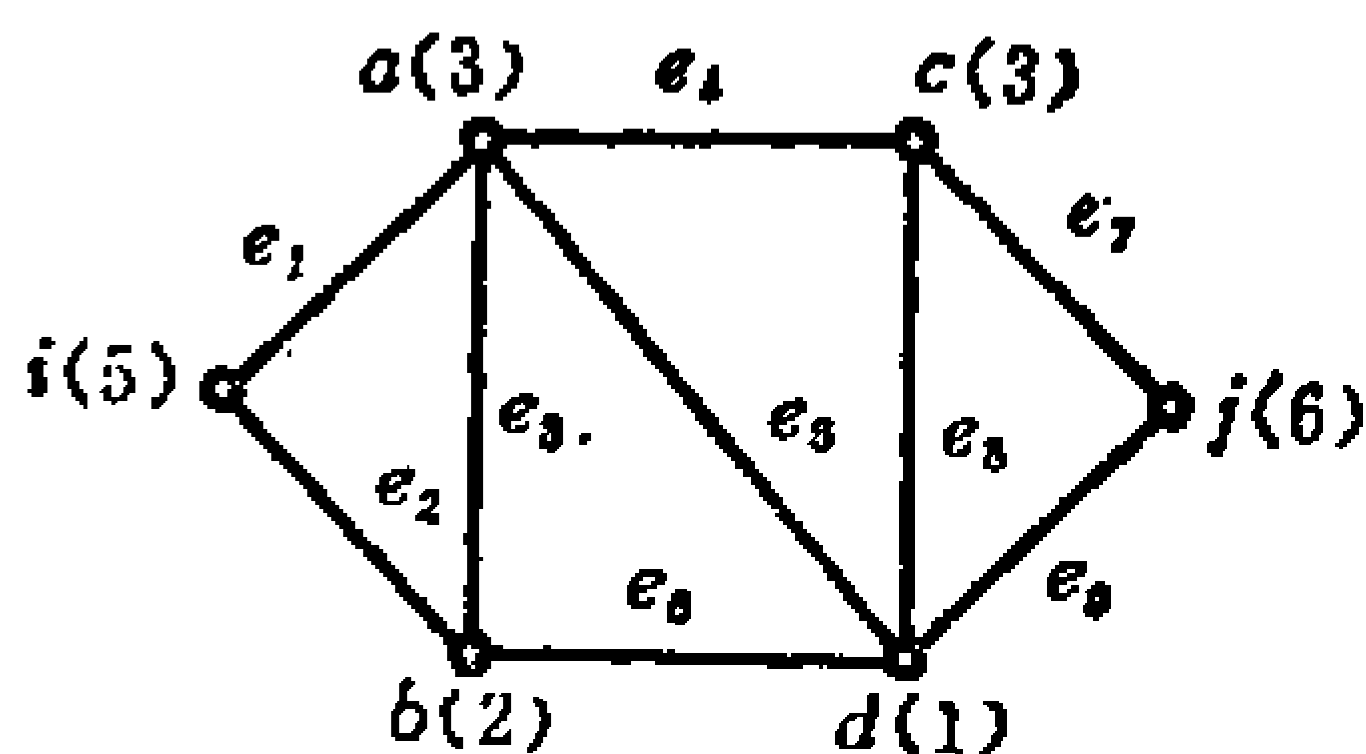


图13-4-3 VWC网

因为只有$S(i)$是分离 i 和 j 的割集，故集体$\{S(i,j)\}$可以由式(13-4-1)表示。$\{S(i;j)\}$，$W(S)$和$V[W(S)]$中所有的集合见表13-4-1。

表13-4-1　$\{S(i;j)\}$，$W(S)$和$V[W(S)]$

$\{S(i;j)\}$	$W(S)$	$V(j)$与 $V[W(S)]$
	(j)	6
$S(i)=(e_1,e_2)$	(i)	5
$S(i)\oplus S(a)=(e_2,e_3,e_4,e_5)$	(i,a)	8
$S(i)\oplus S(b)=(e_1,e_3,e_6)$	(i,b)	7
$S(i)\oplus S(c)=(e_1,e_2,e_4,e_7,e_8)$	(i)	5
$S(i)\oplus S(d)=(e_1,e_2,e_5,e_6,e_8,e_9)$	(i)	5
$S(i)\oplus S(a)\oplus S(b)=(e_4,e_5,e_6)$	(a,b)	5
$S(i)\oplus S(a)\oplus S(c)=(e_2,e_3,e_5,e_7,e_8)$	(i,a,c)	11
$S(i)\oplus S(a)\oplus S(d)=(e_2,e_3,e_4,e_6,e_8,e_9)$	(i,a,d)	9
$S(i)\oplus S(b)\oplus S(c)=(e_1,e_3,e_4,e_6,e_7,e_8)$	(i,b)	7
$S(i)\oplus S(b)\oplus S(d)=(e_1,e_3,e_5,e_8,e_9)$	(i,b,d)	8
$S(i)\oplus S(c)\oplus S(d)=(e_1,e_2,e_4,e_5,e_8,e_7,e_9)$	(i)	5
$S(i)\oplus S(a)\oplus S(b)\oplus S(c)=(e_5,e_6,e_7,e_8)$	(a,b,c)	8
$S(i)\oplus S(a)\oplus S(b)\oplus S(d)=(e_4,e_5,e_9)$	(a,d)	4
$S(i)\oplus S(a)\oplus S(c)\oplus S(d)=(e_2,e_3,e_6,e_7,e_9)$	(i,a,c,d)	12
$S(i)\oplus S(b)\oplus S(c)\oplus S(d)=(e_1,e_3,e_4,e_5,e_7,e_9)$	(i,b,c,d)	11
$S(i)\oplus S(a)\oplus S(b)\oplus S(c)\oplus S(d)=(e_7,e_9)$	(c,d)	4

$$t_{ij}=\min\{V(j),V[W(S)];\ S\in\{S(i;j)\}\}=4$$

若VWC网是有向的，我们应该如上一节那样用点半割来讨论。为了求得点半割，我们定义对应点半割如下：

定义13-4-3　设g是一个线图，$\Omega(g)$是g中所有顶点的集合。则$\Omega^+(g)$是$\Omega(g)$的一个子集，g中每一条边都是从$\Omega^+(g)$中的顶点出发的。换句话说，$\Omega^+(g)$是g中出度$d^+(v)$非零的全部顶点的集合。

利用这个定义，就可以定义$\{S(i;j)\}$中集合S的对应点半割。

定义13-4-4　设S是有向VWC网G中$\{S(i;j)\}$的一个集合。设G_1是在G中删去S的全部边所得的线图中，包含顶点i的一个最大连通子图。那么，集合S的对应点半割(记为$w(S)$)，

定义为

$$w(S)=\Omega^{+}(S)\cap\Omega(G_1) \qquad (13\text{-}4\text{-}7)$$

下面我们要证明，对于任一个从 i 到 j 的点半割，存在一个分离 i 和 j 的割集 S，使得 $w(S)$ 就是这个从 i 到 j 的点半割。

定理13-4-5 在有向 VWC 网中，对于除 $w=(j)$ 外的任何一个从 i 到 j 的点半割 w，存在一个分离 i 和 j 的割集 S，使 w 为式(13-4-7)所给出的点半割。

证明： 我们取所有满足以下两个条件的边来组成一个边集 s_{ij}：

1．每条边都是从 w 的顶点连出来的（即它的定向是从 w 的顶点出发的）

2．每条边至少在一条从 i 到 j 的有向路径中，该条路径恰好通过 w 的一个顶点。

显然 s_{ij} 是从 i 到 j 的半割。我们知道，存在另一个从 j 到 i 的半割 s_{ji}，使 $s_{ij}\cap s_{ji}=\phi$，且 $s_{ij}\cup s_{ji}=S$，S 是分离 i 和 j 的割集。利用这个割集 S，我们可以得到一个包含顶点 i 的最大连通子图 G_1。根据定理13-4-2，点集 $\Omega(S)\cap\Omega(G_1)$ 包含分离 i 和 j 的点割。因此删去 $\Omega(S)\cap\Omega(G_1)$ 中的所有顶点，就破坏了从 i 到 j 全部有向路径和从 j 到 i 的所有有向路径。为了破坏所有从 i 到 j 的有向路径，而不必破坏从 j 到 i 的有向路径，我们只要用 $\Omega^{+}(S)$ 来代替 $\Omega(S)$ 即可。换句话说，删去 $\Omega^{+}(S)\cap\Omega(G_1)$ 中的所有顶点将破坏所有从 i 到 j 的有向路径。因为 $S=s_{ij}\cup s_{ji}$，

$$\Omega^{+}(S)\cap\Omega(G_1)=\Omega^{+}(s_{ij})\cap\Omega(G_1) \qquad (13\text{-}4\text{-}8)$$

并且，我们知道

$$\Omega^{+}(s_{ij})\cap\Omega(G_1)=w \qquad (13\text{-}4\text{-}9)$$

因此定理是对的。（证毕）

作为一个例子，我们来看看图13-4-4中的有向 VWC 网。考虑点半割 (a,b)。半割 s_{ij} 是 (e_4,e_5,e_8)，半割 s_{ji} 是 (e'_5,e'_{10},e'_{11})，于

是$S=(e_4,e_5,e_8,e'_5,e'_{10},e'_{11})$。子图$G_1$由顶点$i,a,b$和边$e_1,e'_1,e_2,e'_2,e_3$组成。点集$\Omega(S)=(a,b,c,d,i,j)$，而

$$\Omega(S)\cap\Omega(G_1)=(i,a,b)$$

集合$\Omega^+(S)=(a,b,d,j)$。因此

$$\Omega^+(S)\cap\Omega(G_1)=(a,b)$$

这就是所给的点半割。注意它也等于$\Omega^+(s_{ij})\cap\Omega(G_1)$。

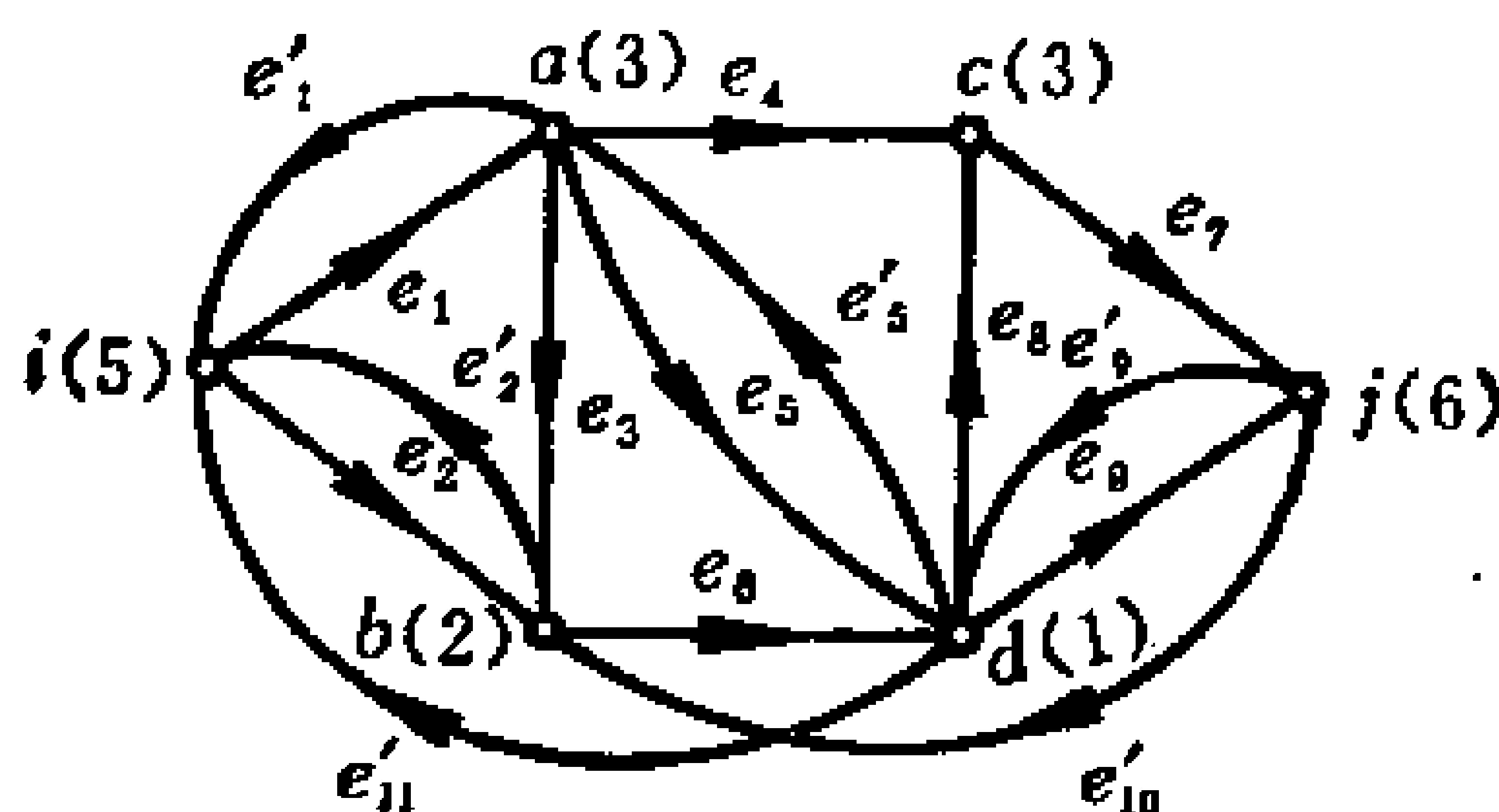


图13-4-4　有向VWC网

与定理13-4-2类似，有定理13-4-6。

定理13-4-6　设S是有向VWC网的$\{S(i;j)\}$中的集合。设G_1是删去S中全部边所得的线图中包含顶点i的最大连通子图，那么，$\Omega^+(S)\cap\Omega(G_1)$包含一个从$i$到$j$的点半割。

这个定理的证明留给读者。

由定理13-4-5和定理13-4-6，我们可以得到另一个重要定理。

定理13-4-7　有向VWC网的从i到j的端限容量t_{ij}等于

$$t_{ij}=\min\{V(j),V[w(S)];\ S\in\{S(i;j)\}\}\qquad(13\text{-}4\text{-}10)$$

其中$w(s)$由式(13-4-7)给出。

这个定理的证明与定理13-4-4的证明几乎完全相同。根据这个定理，我们可以通过求出$\{S(i;j)\}$来求有向VWC网的端限容量，如下例所示。

例13-4-2　考虑图13-4-4中的有向VWC网，所有的关联集

除对应于顶点 j 的关联集元外，是

$$S(i)=(e_1,e'_1,e_2,e'_2,e'_{11})$$
$$S(a)=(e_1,e'_1,e_3,e_4,e_5,e'_5)$$
$$S(b)=(e_2,e'_2,e_6,e_8,e'_{10})$$
$$S(c)=(e_4,e_7,e_8)$$
$$S(d)=(e_5,e'_5,e_6,e_8,e_9,e'_9,e'_{11})$$

因为只有 $S(i)$ 分离 i 和 j，所以集体 $\{S(i;j)\}$ 可由式(13-4-1)表出。于是 $\{S(i;j)\}$，$w(S)$ 和 $V[w(S)]$ 中的所有集合如表13-4-2所示。由这个表可看出 $t_{ij}=4$。

表13-4-2　$\{S(i;j)\}$，$w(S)$，$V(j)$ 和 $V[w(S)]$

$\{S(i;j)\}$	$w(S)$	$V(j)$ 与 $V[w(S)]$
	(j)	6
$S(i)$	(i)	5
$S(i)\oplus S(a)=(e_2,e'_2,e_3,e_4,e_5,e'_5,e'_{11})$	(i,a)	8
$S(i)\oplus S(b)=(e_1,e'_1,e_3,e_8,e'_{10},e'_{11})$	(i,b)	7
$S(i)\oplus S(c)=(e_1,e'_1,e_2,e'_2,e_4,e_7,e_8,e'_{11})$	(i)	5
$S(i)\oplus S(d)=(e_1,e'_1,e_2,e'_2,e_5,e'_5,e_6,e_8,e_9,e'_9)$	(i,d)	6
$S(i)\oplus S(a)\oplus S(b)=(e_4,e_5,e'_5,e_8,e'_{10},e'_{11})$	(a,b)	5
$S(i)\oplus S(a)\oplus S(c)=(e_2,e'_2,e_3,e_5,e'_5,e_7,e_8,e'_{11})$	(i,a,c)	11
$S(i)\oplus S(a)\oplus S(d)=(e_2,e'_2,e_3,e_4,e_6,e_8,e_9,e'_9)$	(i,a,d)	9
$S(i)\oplus S(b)\oplus S(c)=(e_1,e'_1,e_2,e_4,e_6,e_7,e_8,e'_{10},e'_{11})$	(i,b)	7
$S(i)\oplus S(b)\oplus S(d)=(e_1,e'_1,e_3,e_5,e'_5,e_8,e_9,e'_9,e'_{10})$	(i,d)	6
$S(i)\oplus S(c)\oplus S(d)=(e_1,e'_1,e_2,e'_2,e_4,e_5,e'_5,e_6,e_7,e_9,e'_9)$	(i,c,d)	9
$S(i)\oplus S(a)\oplus S(b)\oplus S(c)=(e_5,e'_5,e_6,e_7,e_8,e'_{10},e'_{11})$	(a,bc)	8
$S(i)\oplus S(a)\oplus S(b)\oplus S(d)=e_4,e_8,e_9,e'_9,e'_{10})$	(a,d)	4
$S(i)\oplus S(a)\oplus S(c)\oplus S(d)=(e_2,e'_2,e_3,e_6,e_7,e_8,e'_9)$	(i,a,c,d)	12
$S(i)\oplus S(b)\oplus S(c)\oplus S(d)=(e_1,e'_1,e_3,e_4,e_5,e'_5,e_7,e_9,e'_9,e'_{10})$	(i,c,d)	9
$S(i)\oplus S(a)\oplus S(b)\oplus S(c)\oplus S(d)=(e_7,e_9,e',e'_{10})$	(c,d)	4

习　题

1.证明定理13-1-2条件的充分性。

2.求出图P-13-2中VWC网的端限容量矩阵。

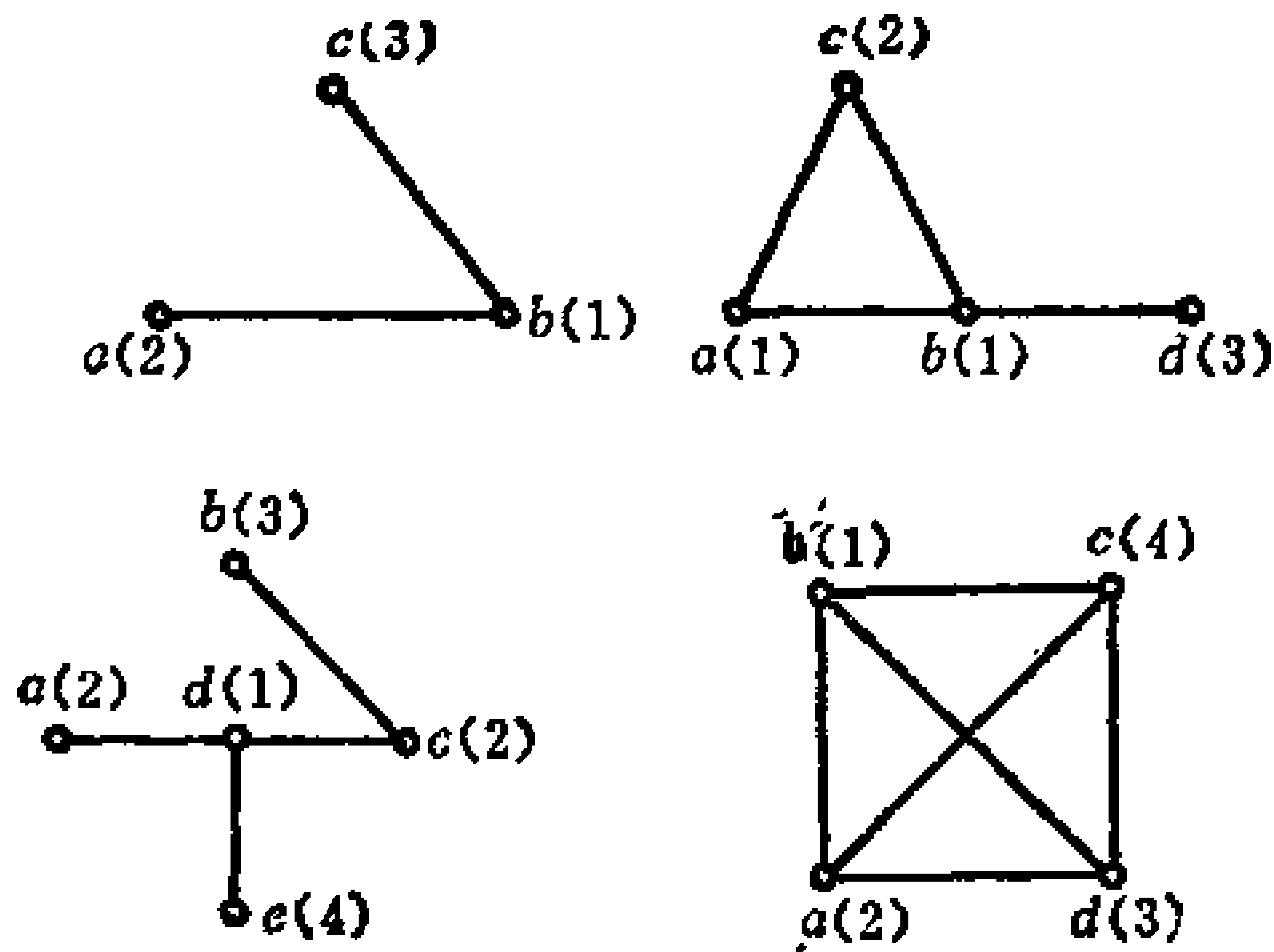


图 P-13-2

3.综合有四个顶点的VWC网，其端限容量矩阵如下：

(a)

	a	b	c	d
a	d	1	1	1
b	1	d	2	2
c	1	2	d	3
d	1	2	3	d

(b)

	a	b	c	d
a	d	3	1	2
b	3	d	1	2
c	1	1	d	1
d	2	2	1	d

(c)

	a	b	c	d
a	d	1	1	1
b	1	d	3	2
c	1	3	d	2
d	1	2	2	d

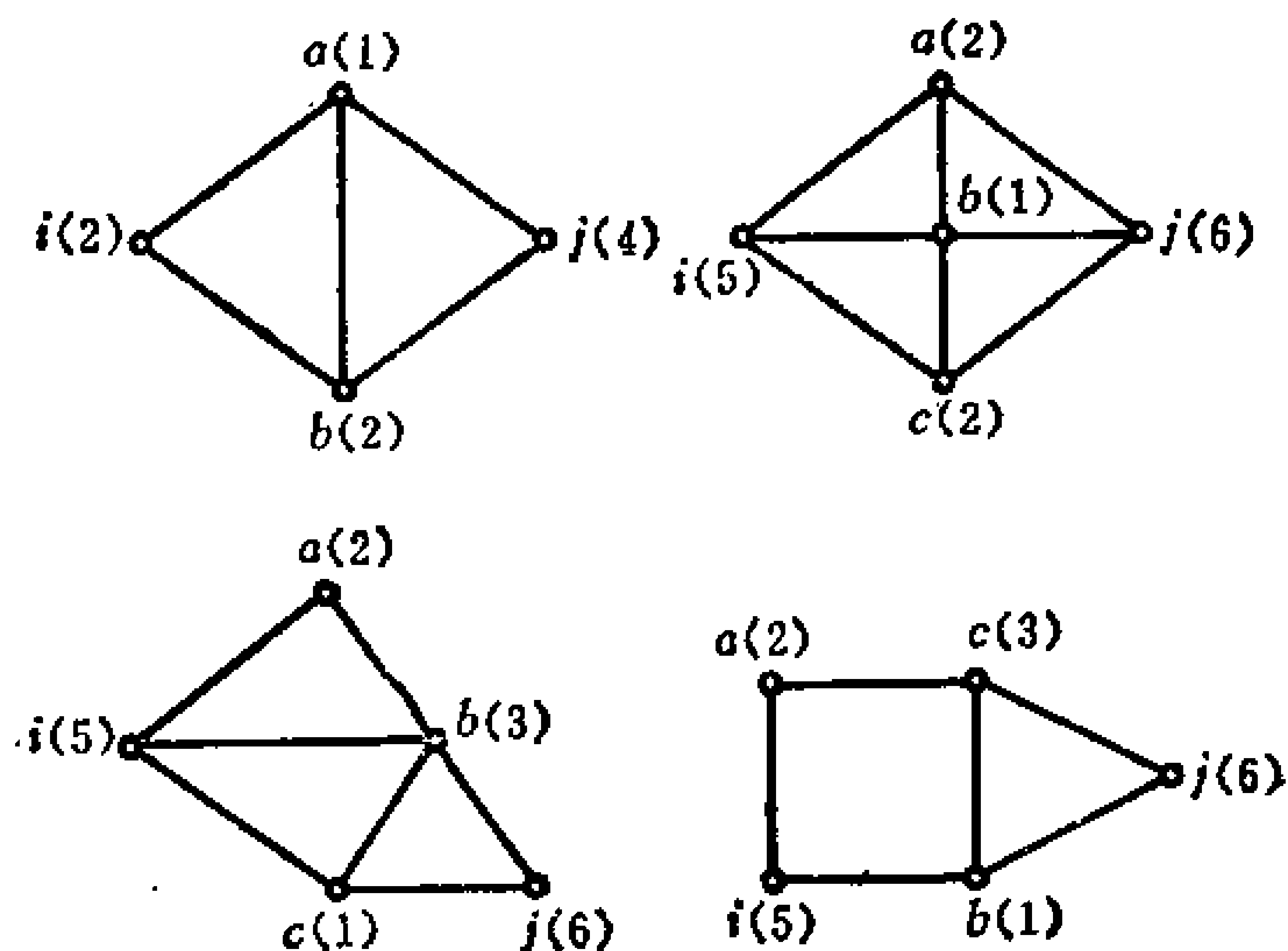
4.综合一个VWC网，其端限容量矩阵以矩阵M为子矩阵。其中

$$M=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} d & 5 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & d & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & d & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & d & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & d \end{bmatrix} \end{array}$$

5.证明定理13-3-1。

6.证明定理13-3-2。

7.在图P-13-7的VWC网中，用首先生成$\{S(i;j)\}$的方法求出从i到j的端限容量t_{ij}。



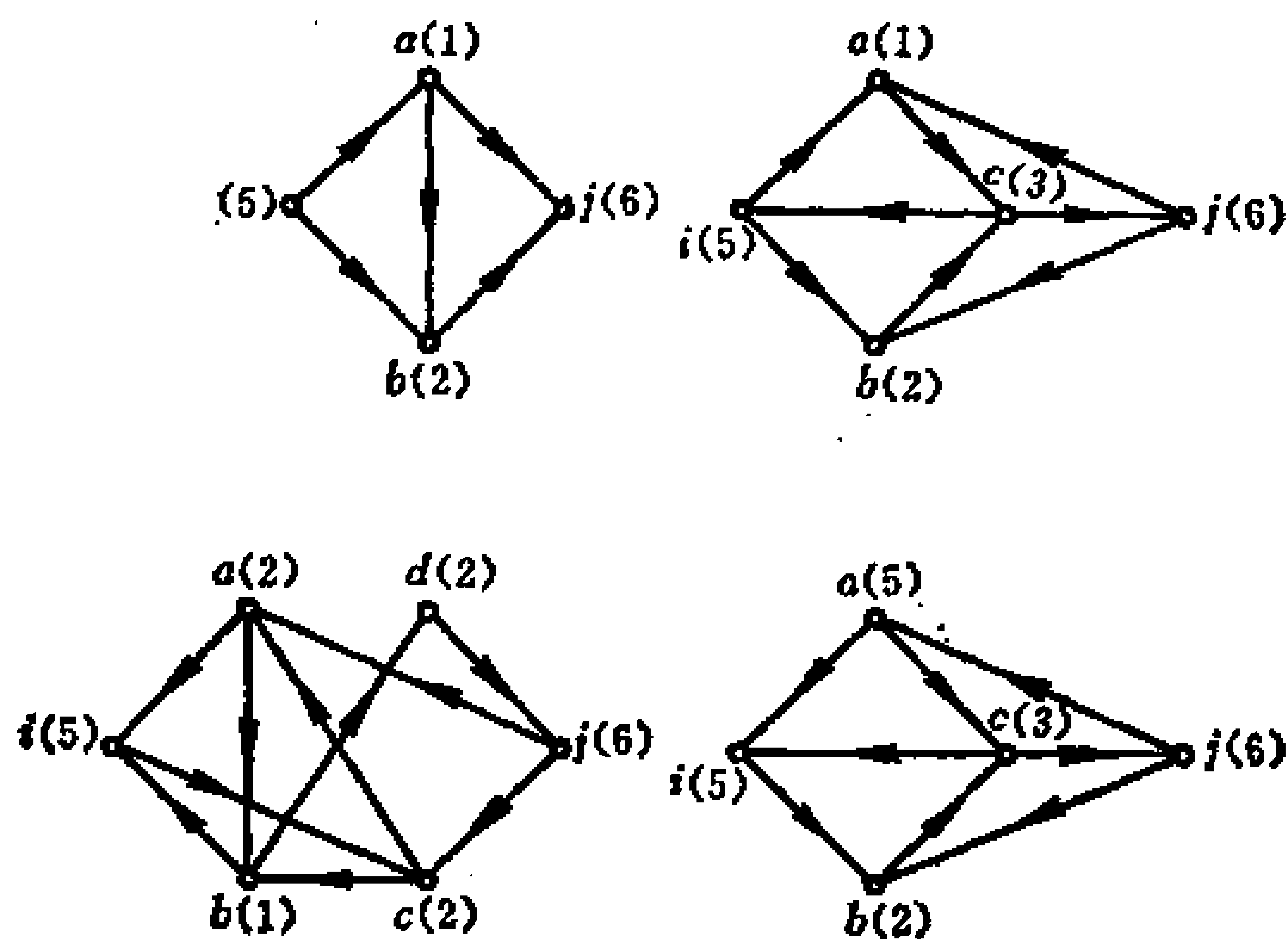
图P-13-7

8.证明定理13-4-3

9. 证明定理13-4-6。

10. 证明定理13-4-7。

11. 在图P-13-11的有向VWC网中，用首先生成$\{S(i;j)\}$的方法求出从i到j的端限容量t_{ij}。



图P-13-11

第十四章　系 统 诊 断

14-1　分　辨　率

我们在这里所考虑的系统，是指那些可以用方框和连线表示的系统，其中的方框执行某种（已知的）功能，而连线是用来传输两个方框间的信息．计算机结构，计算机程序以及控制系统都是典型的例子．用顶点来代表方框，用边来代表连线，我们就可以得到对应于这种系统的线图。例如，图 14-1-1(a) 所示的一个计算机微程序控制单元，可以用图 14-1-1(b) 所示的有向线图来

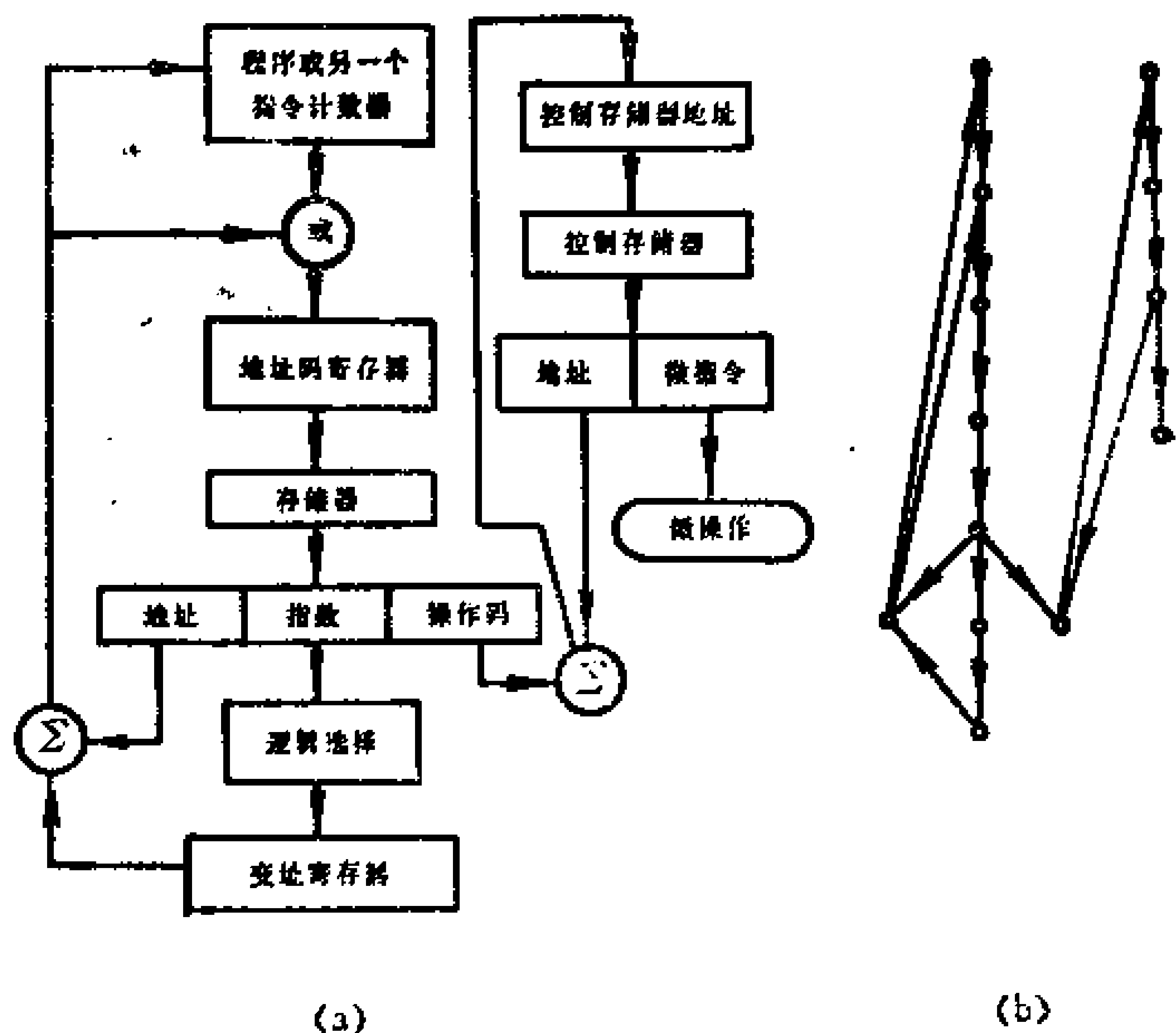


图14-1-1　一个系统及对应的有向图
(a)微程序控制单元；　(b)对应的有向图

表示。

能把信息馈入系统的端点称为入口端，能把信息从系统中取出的端点称为出口端。假定每一个入口端（和出口端）属于一个方框，我们可以定义入口点为其对应方框具有的入口端的顶点，同样，一个出口点是对应方框具有的出口端的顶点。

定义14-1-1 在线图中，外来信号可以进入的顶点称为入口点，信号可以离去的顶点称为出口点。

为了研究系统中某些方框发生故障的位置，我们作如下假设。

假设 当一个无畸变信号或畸变信号通过一个故障点时，信号将发生畸变。另一方面，当一个无畸变信号(或者是畸变信号)通过一个无故障点时，信号不会发生畸变（或仍有畸变）.这里的故障点定义如下。

定义14-1-2 故障点是对应于有故障的方框的顶点。无故障点是对应于正常工作的方框的顶点。

由这个假设我们能看出，信号一经畸变就不可能是无畸变的了。所以我们只要监测一个输出信号，就可以发现信号是否通过一个故障点。实际上，这种假设并不能包括所有情况，然而，按照这个假设，能够很容易地得到许多诊断方面的理论结果。并且还可以修改这些结果以覆盖这个假设不适用的特殊情况。为了表明哪些点会影响到达一个特定端点的信号，我们采用以下定义符号$\Omega(i\times j)$。

定义14-1-3 设i和j都是有向图G的顶点，符号$\Omega(i\times j)$表示这样的一个顶点集合：顶点p在$\Omega(i\times j)$中，当且仅当存在一个包含顶点p的$M(i\times j)$类型的连通有向M图。集合$\Omega(i\times j)$称为可测量集。

例14-1-1 考虑图 14-1-2 中的有向图。一个可测量集$\Omega(1\times 3)$是（1，2，3，4），因为从1到3的有向路径$P_1=(a,b)$

经过顶点 1， 2 和 3，而从 1 到 3 的有向路径 $P_2=(d,e)$ 通过顶点 1， 3 和 4，但却没有包含顶点 5 的 $M(1\times 3)$ 类型连通有向图。注意从 i 到 j 的有向路径是 $M(i\times j)$ 类型的连通有向 M 图（见定义 6-6-6）。可测量集 $\Omega(1\times 4)$ 是(1 , 2 , 4)。

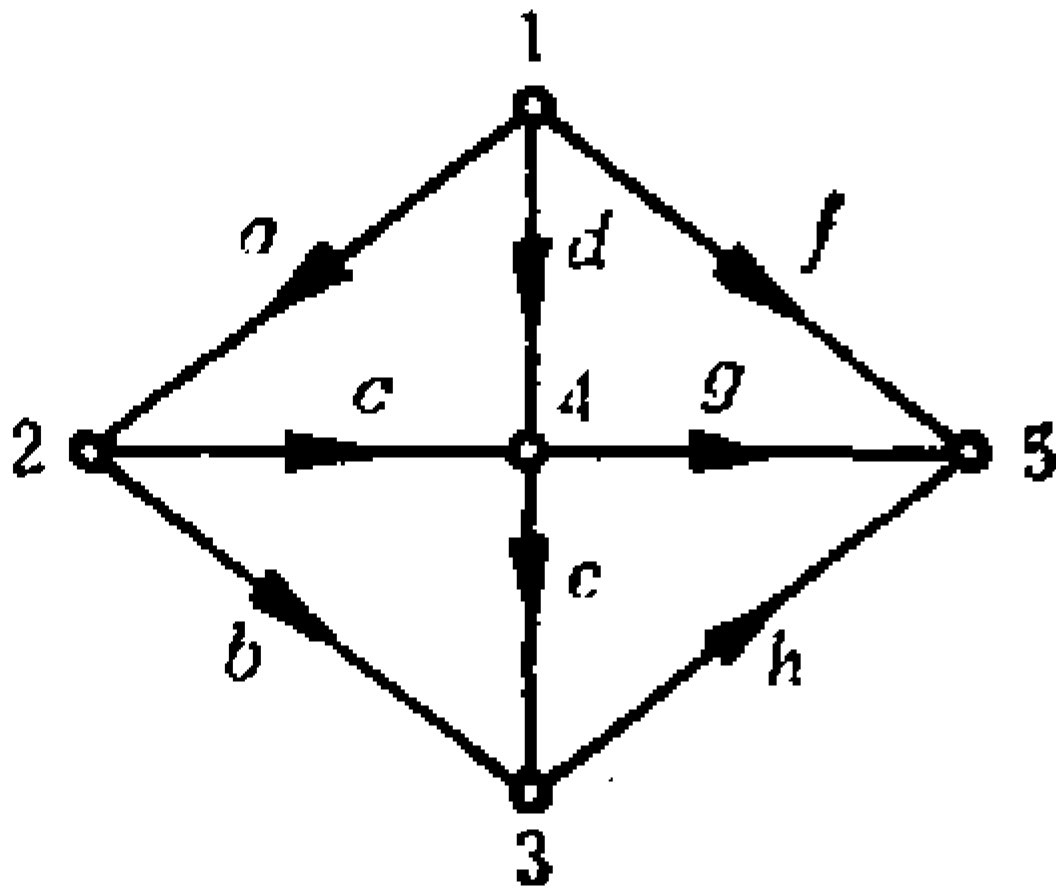


图14-1-2　有向图

定义14-1-4　设 Ω 是有向图中所有顶点的集合。则

$$\overline{\Omega(i\times j)}=\Omega-\Omega(i\times j) \qquad (14\text{-}1\text{-}1)$$

例如，图14-1-2中有向图的 $\overline{\Omega(1\times 4)}$ 是(3 , 5)。

现在来看看一个可测量集 $\Omega(i\times j)$ 不包含一个有向图 G 中所有顶点时的情况.假定我们从顶点 i 注入一个信号.如果在顶点 j 监测的信号表明存在着故障点，那么这些故障点必在 $\Omega(i\times j)$ 中。另一方面，如果在顶点 j 监测的信号表明没有故障点，而我们又知道有故障点存在，那么很明显，$\overline{\Omega(i\times j)}$ 中包含故障点。

假定在顶点 i 注入信号时，在顶点 j 的监测表明没有故障点，而在顶点 k 的监测表明存在故障点，那么我们知道，集合 $\overline{\Omega(i\times j)}\cap\Omega(i\times k)$ 包含了故障点。

在信号由顶点 i 注入的情况下，如果我们只能在顶点 j 和 k 监测信号，并且存在一个故障点，那么，我们可以按照上述测试方法，来确定下列集合中那一个包含着故障点：

$$\Omega(i\times j)\cap\Omega(i\times k)$$
$$\Omega(i\times j)\cap\overline{\Omega(i\times k)}$$
$$\overline{\Omega(i\times j)}\cap\Omega(i\times k)$$
$$\overline{\Omega(i\times j)}\cap\overline{\Omega(i\times k)}$$

这些集合构成一个集体，称为可测量集 $\Omega(i\times j)$ 和 $\Omega(i\times k)$ 的一

个D划分。

定义14-1-5 对于给定的k个可测量集$\Omega(i_p\times j_p)$，$p=1,2,\cdots,k$，集合的集体

$$\left\{\bigcap_{p=1}^{k}\widetilde{\Omega(i_p\times j_p)};\quad \widetilde{\Omega(i_p\times j_p)}\text{ 的所有可能的组合，} p=1,2,\cdots,k\text{，这里的}\widetilde{\Omega(i_p\times j_p)}\text{不是}\Omega(i_p\times j_p)\text{就是}\overline{\Omega(i_p\times j_p)}\right\}$$

称为这些可测量集的一个D划分。

例14-1-2 考虑图14-1-2中的有向图。对应于可测量集$\Omega(1\times3)=(1,2,3,4)$，$\Omega(1\times4)=(1,2,4)$，$\Omega(2\times5)=(2,3,4,5)$的一个$D$划分包括：

$$\Omega(1\times3)\cap\Omega(1\times4)\cap\Omega(2\times5)=(2,4)$$
$$\Omega(1\times3)\cap\Omega(1\times4)\cap\overline{\Omega(2\times5)}=(1)$$
$$\Omega(1\times3)\cap\overline{\Omega(1\times4)}\cap\Omega(2\times5)=(3)$$
$$\Omega(1\times3)\cap\overline{\Omega(1\times4)}\cap\overline{\Omega(2\times5)}=\phi$$
$$\overline{\Omega(1\times3)}\cap\Omega(1\times4)\cap\Omega(2\times5)=\phi$$
$$\overline{\Omega(1\times3)}\cap\Omega(1\times4)\cap\overline{(\Omega2\times5)}=\phi$$
$$\overline{\Omega(1\times3)}\cap\overline{\Omega(1\times4)}\cap\Omega(2\times5)=(5)$$
$$\overline{\Omega(1\times3)}\cap\overline{\Omega(1\times4)}\cap\overline{\Omega(2\times5)}=\phi$$

D划分具有以下性质。

定理14-1-1 在可测量集的集体的D划分中，任何两个非空集合没有公共的顶点。

证明： 我们注意到$\Omega(p\times q)$和$\overline{\Omega(p\times q)}$是没有公共顶点的。据定义14-1-5，$D$划分的任意两个集合$R_1$和$R_2$，至少有一个可测量集$\Omega(p\times q)$在$R_1$的表达式中，而$\overline{\Omega(p\times q)}$在$R_2$的表达式中。因此$R_1$和$R_2$没有公共点。 （证毕）

我们回忆一下，由于一个可测量集$\Omega(p\times q)$对应着在顶点p注入的信号，在顶点q对监视信号进行测试。如果D划分$\{D\}$中

的一个集合由一个顶点 v 组成，并且只有顶点 v 失灵，那么，对于给定的可测量集集体(由它可得到$\{D\}$)，我们可作相应测量，预言 v 是失灵点。如果在可测量集合的集体M下，顶点v_1和v_2都在D划分中的一个集合内，并且这两个顶点的一个是有故障的，那么只凭与M中可测量集相对应的测试要确定这两个顶点中哪一个有故障是不可能的。所以可测量集的已知集体决定着故障点能否定位，为此我们定义 k 分辨率如下。

定义14-1-6 在可测量集合的集体M下，有向图是k可辨的，如果：(1)存在M的D划分中一个包含 k 个顶点的集合R；(2)在M的D划分下没有包含多于 k 个顶点的集合。

例如，图14-1-2的有向图在可测量集$\Omega(1\times 3)$，$\Omega(1\times 4)$和$\Omega(2\times 5)$的集体M下，是2可辨的。因为在M的D划分$\{D\}$中有集合(2,4)，并且在$\{D\}$中没有包含多于两个顶点的集合。

注意，一个有向图G在可测量集集体M下是 k 可辨的，意思是说存在一个有 k 个顶点的集合，如果这些顶点之一是有故障的，则与这些可测量集对应的测量不可能确定这 k 个顶点中的哪一个是故障点，但这些测量却表明这 k 个顶点中有一个是故障点。

14-2 测 试 点

我们已经定义了一个系统的入口端和出口端。系统中任何其他的端点都称为内部端。也就是说，内部端是接了一条连线的方框的一部分，此方框既非入口端，又非出口端。因此，在与系统对应的线图中，每一个顶点可以表示为入口端、出口端，也可以为内部端。

对于我们所进行的测试来说，如果系统中任何一个内部端都可以作为入口端或出口端，那么任何一个可测量集$\Omega(p\times q)$（其

中p和q是顶点）都可作为诊断用的可测量集集体中的元素。不过，即使使所有的顶点都可以作为入口点和出口点，也不一定能达到1分辨率.例如，在图14-2-1中的有向图G中所有顶点p和q的可测量集$\Omega(p\times q)$的集体下，G就不是1分辨的。为了排除这些困难，我们采用一种所谓测试门的方法，在必要时用它可以删去一些边。测试门的性质以及利用测试门的系统诊断将在后面讨论。

对于给定的k，使k分辨率变成不可能的另一种明显情况，是没有足够的入口点和出口点。在这种情况下，我们利用所谓测试点来得到一些附加的可测量集，使k分辨率成为可能。也就是说，我们要把测试点作为一条边上的附加点，使我们能通过此点既可以注入，又能监测诊断用的信号。不过，当我们考虑G中顶点的分辨率时，并不把插入的点当作所给线图G的顶点集合中的一个元素。因此，我们定义测试点如下。

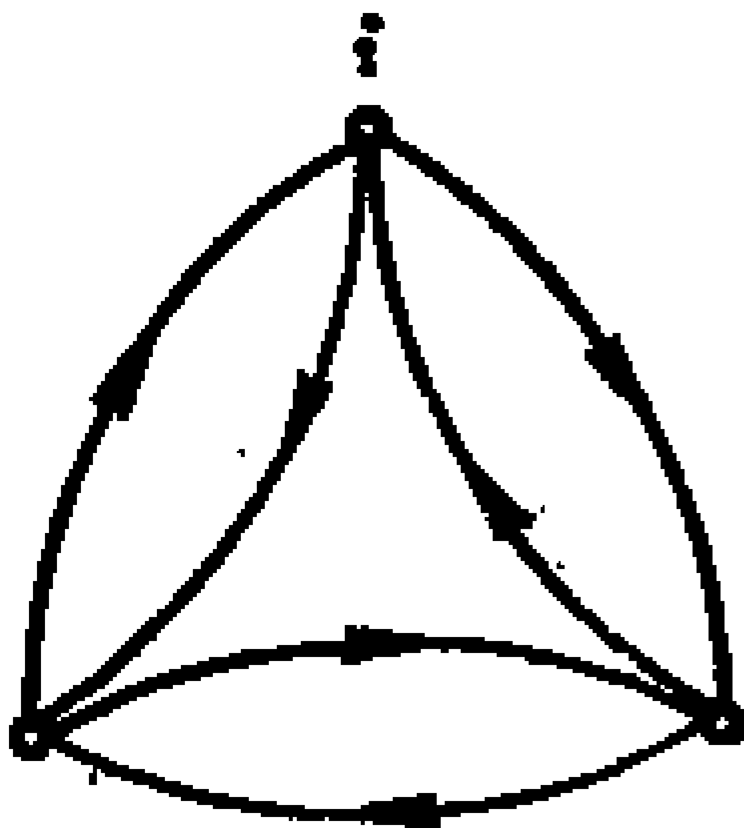


图14-2-1 有向图G

定义14-2-1 在一条边上指定一个测试点，表示信号既可以通过这条边注入，同时通过这条边的信号也可以受监测。

设边e从顶点v_1连接到顶点v_2，如果在边e上指定了测试点，我们把顶点$v(e^-)$看成入口点，把$v(e^+)$看成出口点。

定义14-2-2 符号$v(e^+)$和$v(e^-)$表示两个顶点，边e从$v(e^+)$连接到$v(e^-)$。

例如，在图14-1-2的有向图中，$v(a^+)=1$，$v(a^-)=2$。类似地，$v(b^+)=2$，$v(b^-)=3$。

为了简便，我们作下列定义。

定义14-2-3 符号$\Omega(a^{\pm}\times j)$是$\Omega(v(a^{\pm})\times j)$的简略写法．同样，$\Omega(i\times a^{\pm})$是$\Omega(i\times v(a^{\pm}))$的简略写法，$\Omega(a^{\pm}\times b^{\pm})$是$\Omega(v(a^{\pm})\times v(b^{\pm}))$的简略写法．这种简略写法也用于有向$M$图，例如$M(a^{\pm}\times b^{\pm})$表示$M(v(a^{\pm})\times v(b^{\pm}))$。

例14-2-1 考虑图14-2-2中的有向图G，它只有一个入口点1和出口点2。因此，我们只得到一个可测量集$\Omega(1\times 2)=(1, 2, 3, 4)$。如果我们指定测试点在边$C$上，那么，我们就得到两个附加的可测量集$\Omega(1\times c^{+})$和$\Omega(c^{-}\times 2)$。

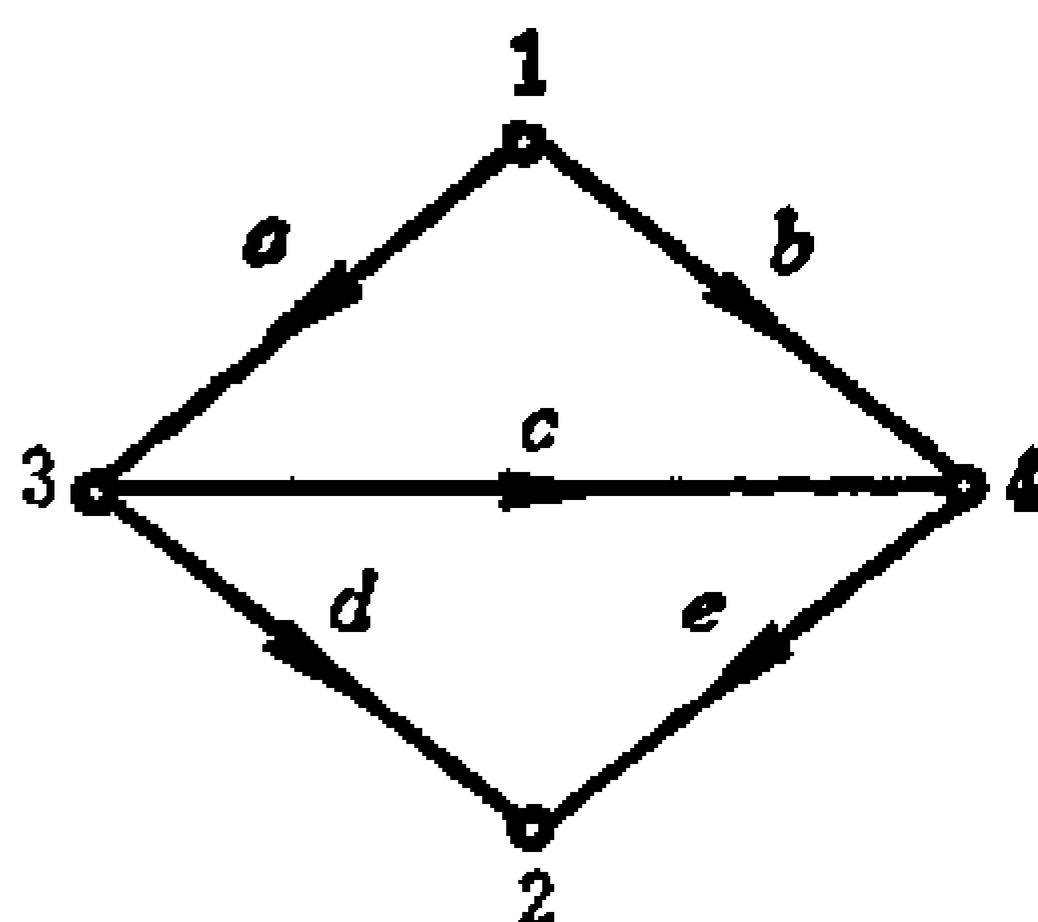


图14-2-2 有向图

为了研究测试点的性质，我们考虑一个连通有向线图，它只有一个入口点和一个出口点．也就是说，我们来定义SEC图如下．

定义14-2-4 一个SEC图（单输入单输出的连通图）是一个连通的有向图，其中恰有一个入口点和一个出口点．

设i和j分别是一个SEC图的入口点和出口点．因为从顶点i注入的信号只能在顶点j得到，所以可测量集$\Omega(i\times j)$中以外的顶点所代表的任一方框对于与此SEC图对应的系统功能不作贡献．因此我们只要考虑这样的SEC图，它的可测量集$\Omega(i\times j)$包含这个SEC图中所有的顶点．

定义14-2-5 一个从i到j的SEC图是指一个入口点为i，出口点为j的SEC图。

首先我们研究测试点和有向割集之间的关系．

定理14-2-1 设G是从i到j的SEC图。假定$S(e)$是一个把顶点i和j分离开，且包含边e的有向割集．并假设除此之外没有其他把顶点i和j分离且包含边e的有向割集．设G_1和G_2都

是从G中删去$S(e)$的所有边得到的两个最大连通子图。则$\Omega(i\times e^+)=\Omega(G_1)$，$\Omega(e^-\times j)=\Omega(G_2)$。

证明： 设p是G_1中的一个顶点。假定存在一个$M(e^-\times j)$类型的连通有向M图包含着顶点p，则$S(e)$不是一个有向割集，因为在$S(e)$中至少还有一条边，其方向从$\Omega(G_2)$中的顶点到$\Omega(G_1)$中的顶点。因此，$M(e^-\times j)$类型的有向M图不会包含$\Omega(G_1)$中的顶点。

假定p不在任何一个$M(i\times e^+)$类型的连通有向M图内。设Ω_p是这样的所有顶点的集合：对于Ω_p中任一顶点v'，在G_1中存在一条从p到v'的有向路径。因为$\Omega(i\times j)$包含顶点p，所以没有$M(i\times e^+)$类型的有向M图通过Ω_p中的v'。注意顶点$v(e^+)$不在Ω_p中。我们还可以看出，顶点i也不在Ω_p中。考虑一个割集$S'(e)$：

$$S'(e)=\mathscr{E}\{[\Omega(G_1)-\Omega_p]\times\overline{[\Omega(G_1)-\Omega_p]}\}\cup\mathscr{E}\{\overline{[\Omega(G_1)-\Omega_p]}\times[\Omega(G_1)-\Omega_p]\}\qquad(14\text{-}2\text{-}1)$$

因为$S(e)$是有向割集，故$\mathscr{E}[\overline{\Omega(G_1)}\times\Omega(G_1)]$是空集，因此$\mathscr{E}\{\overline{\Omega(G_1)}\times[\Omega(G_1)-\Omega_p]\}$也是空集。连接$\Omega_p$中的顶点$v'$和$[\Omega(G_1)-\Omega_p]$中的顶点$v''$之间的一条边，其方向不可能从$v'$到$v''$，因为如果这样，$v''$就必然在$\Omega_p$中，故$\mathscr{E}\{\Omega_p\times[\Omega(G_1)-\Omega_p]\}$是空集。从而，$\mathscr{E}\{\overline{[\Omega(G_1)-\Omega_p]}\times[\Omega(G_1)-\Omega_p]\}$也是空集。这就说明，$S'(e)$是把顶点$i$和$j$分离开的有向割集，因为据假定，只有$S(e)$是包含边$e$的有向割集，这就出现矛盾。所以，$p$必定至少在一个$M(i\times e^+)$类的连通有向$M$图中，与此类似，我们也可以取$G_2$中的一个顶点来证明这个定理是正确的。

（证毕）

当存在一个以上的包含边e的且把i和j分离的有向割集时，可以应用下面这个定理。

定理14-2-2 设G是从i到j的SEC图。假定在把i和j

分离的全部有向割集中，包含着边 e 的 k 个有向割集是 $S_1(e)$，$S_2(e)$，…，$S_k(e)$。则$\Omega(i\times e^+)=\Omega(G'_1)$，$\Omega(e^-\times j)=\Omega(G'_2)$，这里$G'_1$和$G'_2$是从$G$中删去$S_1(e)$，$S_2(e)$，…，$S_k(e)$的所有边得到的两个最大连通子图。

证明： 从G'_1和G'_2中任取一个顶点来证明，这和定理 14-2-1的证明完全相同。所以我们只需要证明既不在G'_1中又不在G'_2中的任一顶点不会在$\Omega(i\times e^+)$或$\Omega(e^-\times j)$中。考虑一个子图G'_3，它是删去 G'_1 和 G'_2 的所有顶点和与这些顶点相连的所有边得到的。我们容易看出，在$S_1(e)$，$S_2(e)$，…，$S_k(e)$ 中正好存在两个割集，删去这两个割集中的所有边，我们就得到三个子图 G'_1，G'_2和G'_3。设这两个割集是$S_1(e)$和$S_k(e)$，又设v'是G'_3中的一个顶点。如果v'在$M(i\times e^+)$类的连通有向M图中，则$S_1(e)$或$S_k(e)$必有一个不是有向割集。因此，v'不可能在$M(i\times e^+)$类的任何一个连通有向M图中。同样，我们可以说明，v'不可能在$M(e^-\times j)$类的任何一个连通有向M图中。这样此定理得证。 （证毕）

在定理 14-2-2 的证明中，我们利用两个有向割集 $S_1(e)$ 和 $S_k(e)$，删去这两个割集的所有边，就产生了G'_1，G'_2和G'_3。我们说两个有向割集 $S_1(e)$ 和 $S_k(e)$ 被边 e 覆盖，或者说边 e 覆盖 $S_1(e)$和$S_k(e)$。如果象定理14-2-1那样，只存在一个割集$S(e)$，我们就说边 e 覆盖有向割集$S(e)$。

定义14-2-6 我们说边 e 覆盖一个有向割集S，如果S是把 i 和 j 分离开且包含边 e 的唯一的有向割集。边 e 覆盖有向割集 $S_1=\mathscr{S}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$和$S_2=\mathscr{S}(\Omega_2\times\bar{\Omega}_2)$，当且仅当：（1）$S_1$和$S_2$把 i 和 j 分离；（2）S_1和S_2包含边 e；（3）任何其他把 i 和 j 分离且包含边 e 的割集$S'=\mathscr{S}(\Omega_3\times\bar{\Omega}_3)$满足如下条件

$$(\Omega_1\cup\Omega_2)\supset\Omega_3\supset(\Omega_1\cap\Omega_2) \qquad (14\text{-}2\text{-}2)$$

例14-2-2 如图 14-2-3(a) 所示，考虑从 1 到 6 的SEC图，$S(b)$是包含边 b 且分离 1 和 6 的唯一的有向割集。因此边 b 覆盖

有向割集$S(b)$。删去$S(b)$中所有的边，我们得到G_1和G_2，如图14-2-3(b)所示。因此$\Omega(1\times b^+)=\Omega(G_1)$，$\Omega(b^-\times 6)=\Omega(G_2)$。

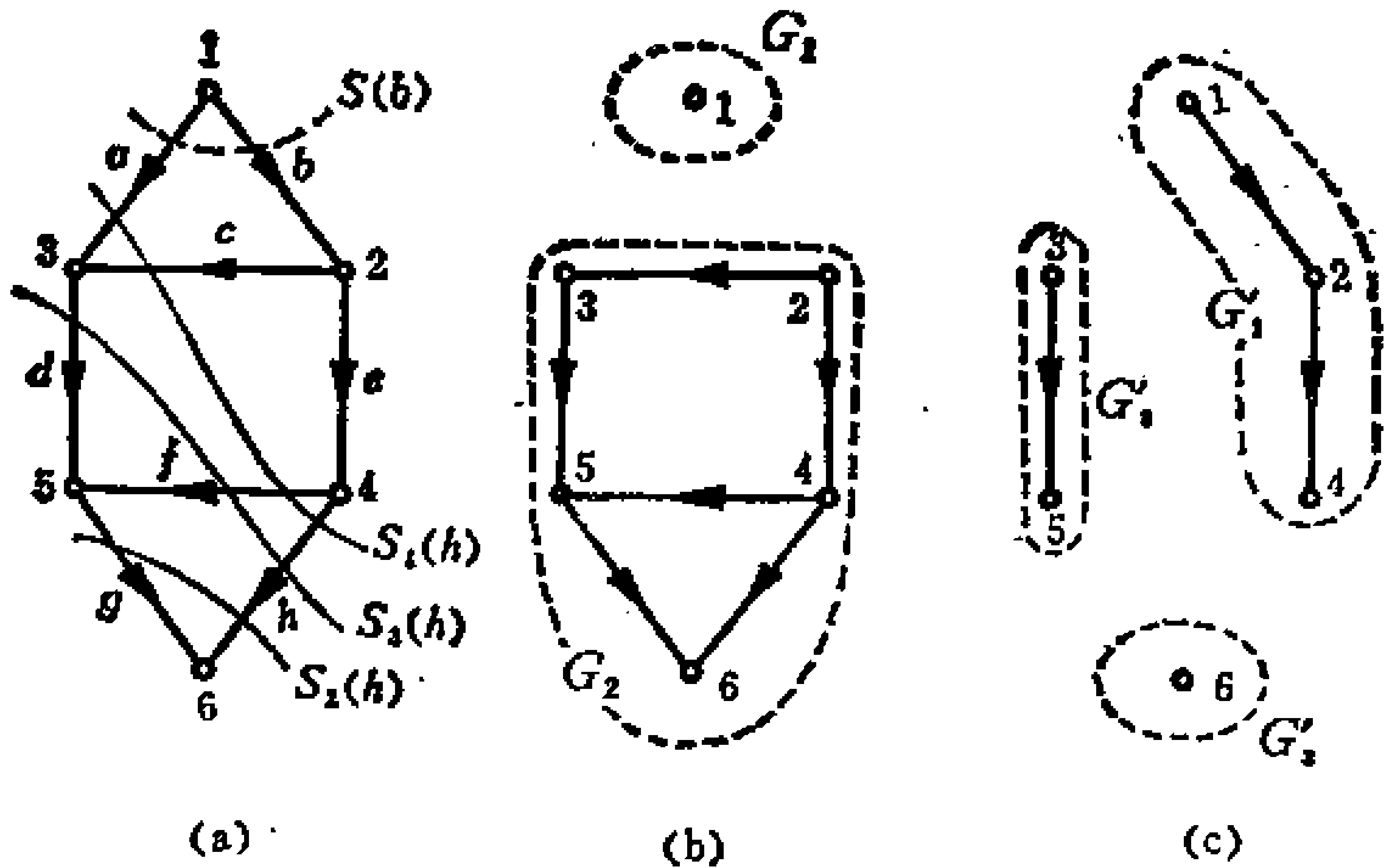


图14-2-3 由某些边覆盖的有向割集

(a)一个SEC图；(b)G_1和G_2；(c)G_1'，G_2'，G_3'

$S_1(h)$，$S_2(h)$和$S_3(h)$是包含边h且把顶点1和6分离的所有有向割集。从图中我们可以看出：

$$S_1(h)=\mathscr{E}(\Omega_1\times\overline{\Omega_1})=\mathscr{E}((1,2,4)\times(\overline{124}))$$
$$S_2(h)=\mathscr{E}(\Omega_2\times\overline{\Omega_2})=\mathscr{E}((1,2,3,4,5)\times(\overline{12345}))$$
$$S_3(h)=\mathscr{E}(\Omega_3\times\overline{\Omega_3})=\mathscr{E}((1,2,3,4)\times(\overline{1234}))$$

因此 $$[\Omega_1\cup\Omega_2=(1,2,3,4,5)]\supset[\Omega_3=(1,2,3,4)]\supset[\Omega_1\cap\Omega_2)=(1,2,4)]$$

所以边h覆盖$S_1(h)$和$S_2(h)$。子图G_1'，G_2'和G_3'如图14-2-3(c)所示。注意$\Omega(1\times h^+)=\Omega(G_1')$，$\Omega(h^-\times 6)=\Omega(G_3')$。

定理14-2-1和14-2-2的逆定理也是正确的。

定理14-2-3 设G是从i到j的SEC图。设$\Omega(i\times e^+)$和$\Omega(e^-\times j)$是可测量集。如果$\Omega(i\times e^+)\cap\Omega(e^-\times j)=\phi$，则存在包

含边 e 的有向割集 $S(e)$ 和 $S'(e)$，使得 $\Omega(Ge)=\Omega(i\times e^+)$，$\overline{\Omega(G'_e)}=\Omega(e^-\times j)$。这里 $S(e)=\mathscr{E}(\Omega(G_e)\times\overline{\Omega(G_e)})$，$S'(e)=\mathscr{E}(\Omega(G'_e)\times\overline{\Omega(G'_e)})$。

证明： 考虑如图 14-2-4 所示的边集合 $S=\mathscr{E}(\Omega(i\times e^+)\times\overline{\Omega(i\times e^+)})$，如果边 e 不在 S 中，则 $\Omega(i\times e^+)$ 包含顶点 $v(e^-)$。因为据假设 $\Omega(e^-\times j)$ 包含顶点 $v(e^-)$，故 $\Omega(i\times e^+)\cap\Omega(e^-\times j)\neq\phi$，所以边 e 一定在 S 中。设 $S=(b_1,b_2,\cdots,b_m,e)$，假定 S 不是一个有向割集。那么，至少有一条边，比如说 b_1，它的方向是从 $\Omega(e^-\times j)$ 中的顶点 $v(b_1^+)$ 到 $\Omega(i\times e^+)$ 中的顶点 $v(b_1^-)$。然而，这是不可能的，原因如下：

1. 由于 $v(b_1^-)$ 在 $\Omega(i\times e^+)$ 中，故至少存在一个包含顶点 $v(b_1^-)$ 的 $M(i\times e^+)$ 类的连通有向 M 图。

2. 由于 G 是一个从 i 到 j 的 SEC 图，故至少存在一条从 i 到 $v(b_1^-)$ 的有向路径。

3. 于是，存在一条从 i 到 $v(e^+)$ 的有向路径，它包含边 b_1。这就意味着 $v(b_1^+)$ 一定在 $\Omega(i\times e^+)$ 中。这就产生了矛盾。

换句话说，S 是包含边 e 的有向割集。并且，删去 S 中的所有边将得到最大连通子图 G_e，它由 $\mathscr{E}(\Omega(i\times e^+)\times\Omega(i\times e^+))$ 中的边组成。同样，我们也可以用 $\Omega(e^-\times j)$ 来证明有向割集 $S'(e)$ 的存在性。　　（证毕）

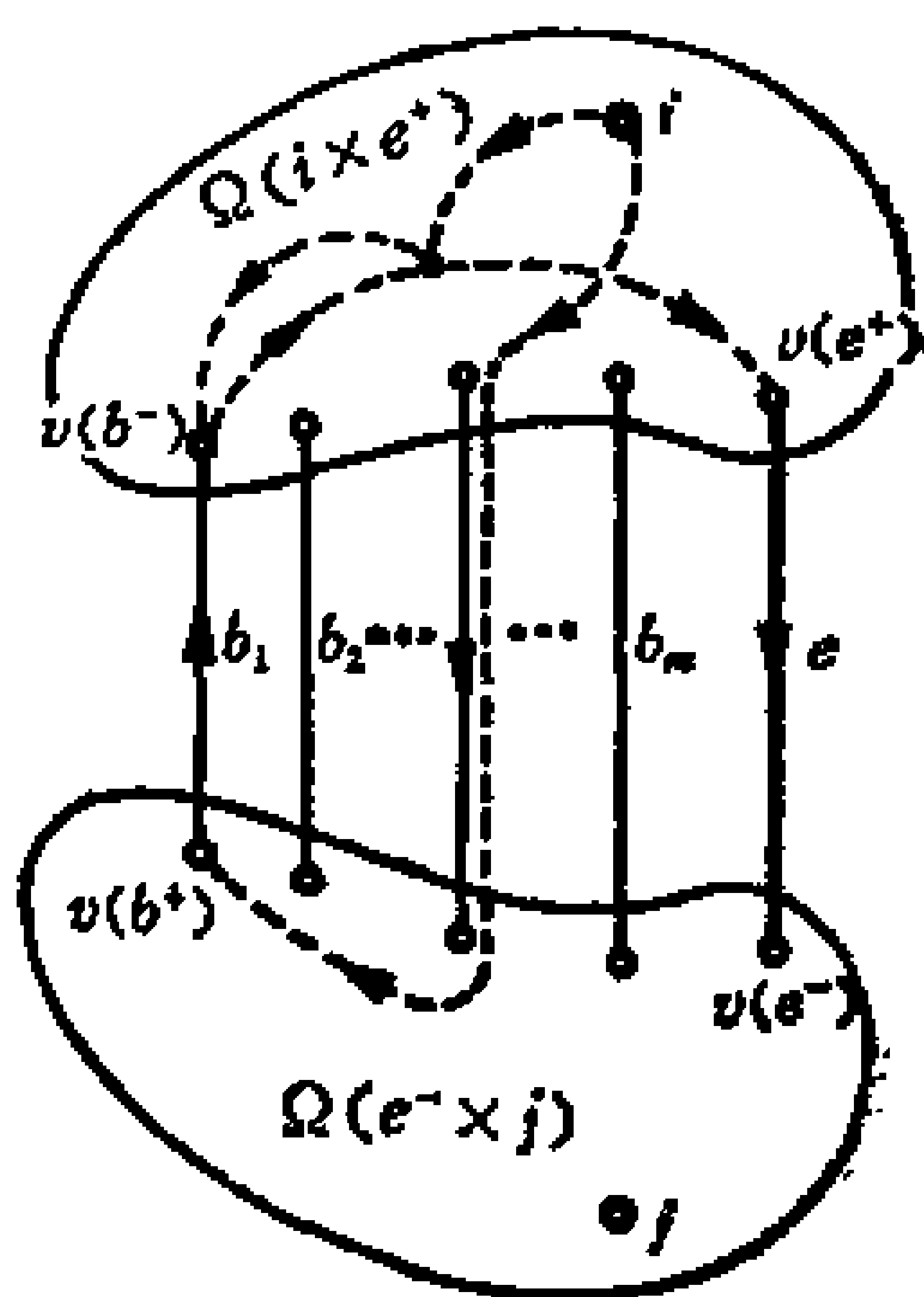


图14-2-4　集合 S

如果定理 14-2-3 中的条件 $\Omega(i\times e^+)\cap\Omega(e^-\times j)=\phi$ 不满足，则以下定理说明，不存在把 i 和 j 分离且包含边 e 的有向割

集。

定理14-2-4 设G是从i到j的SEC图。假定可测量集$\Omega(i\times e^{+})$和$\Omega(e^{-}\times j)$具有以下性质：

$$\Omega(i\times e^{+})\cap\Omega(e^{-}\times j)\neq\phi$$

则不存在把i和j分离且包含边e的有向割集。

证明： 设v是在$\Omega(i\times e^{+})$和$\Omega(e^{-}\times j)$二者中的一个顶点，则存在一个包含顶点v的$M(i\times e^{+})$类连通有向M图，也存在一个包含顶点v的$M(e^{-}\times j)$类连通有向M图，如图14-2-5所示。因此存在一个包含边e的有向回路，不存在包含边e的有向割集。（证毕）

重要的问题是，在一些边上指定测试点时，应当如何选择这些边，才能达到1分辨率。以下定义有助于解决这个问题。

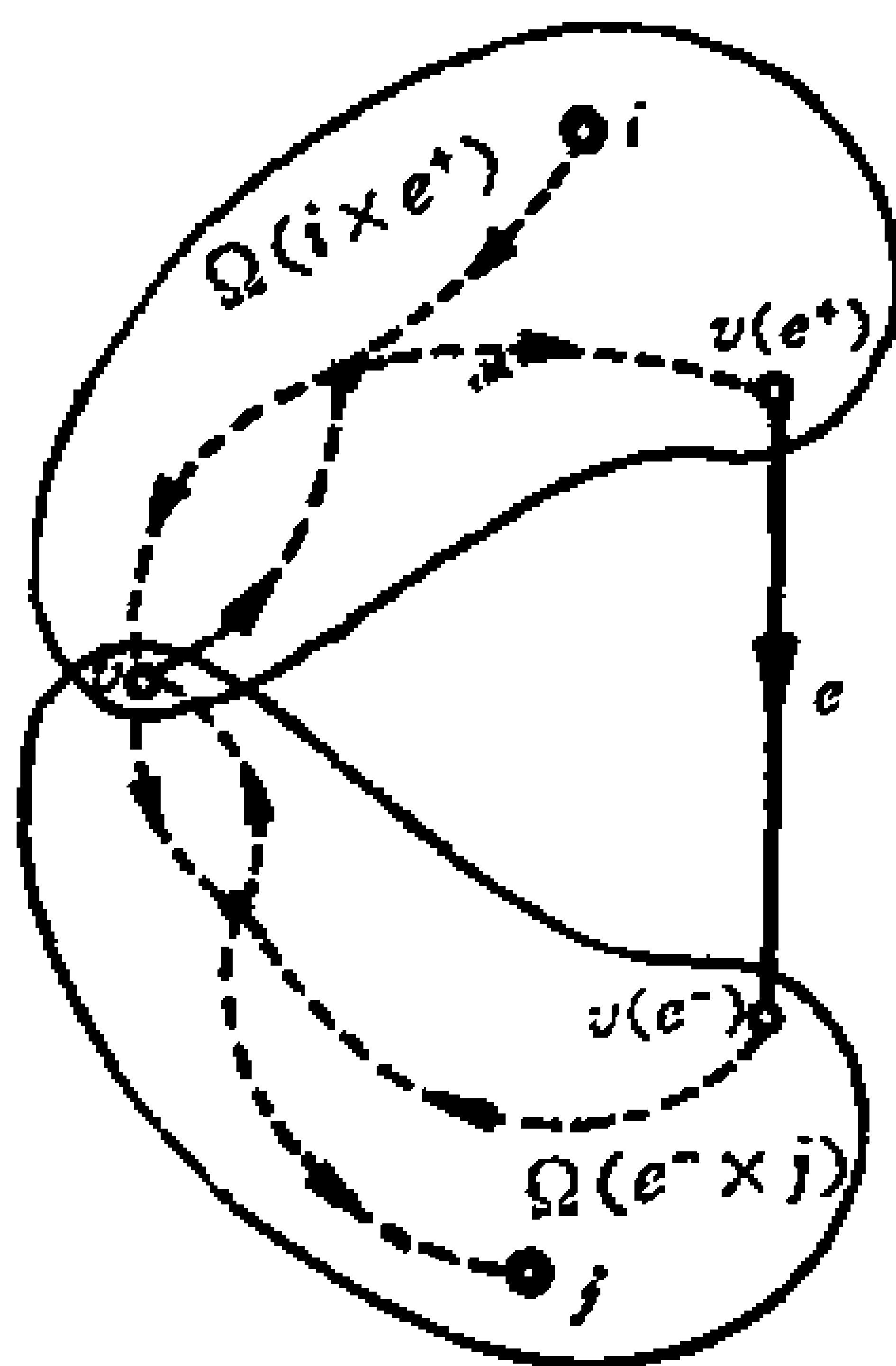


图14-2-5 包含e的有向回路的存在性

定义14-2-7 对于一个边集E，在E下的可测量集是指在E中所有的边上指定测试点时所有可能的可测量集。

定义14-2-8 从i到j的SEC图是在边集E下1可辨的，意思是说当把测试点指定到集合E中每一条边上时，在E下的可测量集是1可辨的。

作为一个例子，我们来考虑图14-2-3中从1到6的SEC图。假定集合E由边a和h组成。则E下的可测量集是

$$\Omega(1\times a^{+})=(1)$$

$$\Omega(a^{-}\times 6)=(3,5,6)$$

$$\Omega(1\times h^{+})=(1,2,4)$$

$$\Omega(h^- \times 6) = (6)$$

$$\Omega(a^- \times h^+) = \phi$$

$$\Omega(h^- \times a^+) = \phi$$

因为顶点 3 和 5 都在这些可测量集的D划分的同一集合中，所以G不是 1 可辨的。

下面的定理给出了一个边集E不能达到 1 分辨率的条件。

定理14-2-5 设G是从 i 到 j 的SEC图。又设E是一个边集合，$\{S\}$是被E中的边覆盖的全部有向割集的集体，如果G中有一条边不在$\{S\}$的任一有向割集中，则G在E下就不是 1 可辨的。

证明：

情况 1 假设一对可测量集$\Omega(i \times b^+) \cap \Omega(b^- \times j) \neq \phi$，则据定理14-2-4，有一个包含边 b 的有向回路C，我们可以看出，如果C中任一条边在$M(i \times e^+)$类或$M(e^- \times j)$类的一个连通有向M图中，则有另一个同类的连通有向M图包含C中所有的边，这里 e 是E中的边。因此，属于C的所有顶点或者都在一个可测量集中，或者都不在同一个可测量集中。所以在E下的可测量集的D划分中的一个集合包含属于C的所有顶点，且G在E下不是 1 可辨的。因为C中的边不可能在任何一个有向割集中，所以定理在这种情况下是正确的。

情况 2 假定对E中任一边 e，$\Omega(i \times e^+) \cap \Omega(e^- \times j) = \phi$，设$\{S\}$是有向割集$S_1, S_2, \cdots, S_m$的集体，又设$S_p = \mathscr{S}(\Omega_p \times \bar{\Omega}_p)$，$p = 1, 2, \cdots, m$。据定理 14-2-3，对于任一可测量集 $\Omega(i \times e^+)$ 和 $\Omega(e^- \times j)$，在$\{S\}$中有一个有向割集S_r，使得 $\Omega(i \times e^+) = \Omega_r$，在$\{S\}$中还有一个有向割集 S_u，使得 $\Omega(e^- \times j) = \bar{\Omega}_u$。因为至少有一条边，比如说边 b，不在$\{S\}$的任何一个有向割集内，所以对 $p = 1, 2, \cdots, m$，$v(b^+)$和$v(b^-)$ 一定同在 Ω_p或$\bar{\Omega}_p$ 中。因此不会有这样的可测量集，它只包含$v(b^+)$和$v(b^-)$中的一个，而不是二

者都包含．这样，在E下可测量集的集体的一个D划分中，如果一个集合包含$v(b^-)$，就包含$v(b^+)$．由k分辨率的定义，G在E下不是1可辨的． （证毕）

例14-2-3 考虑如图14-2-6所示的从1到5的SEC图G，假定$E=(a,b)$，则S由$S_1=\mathscr{E}((1)\times(\overline{1}))$，$S_2=\mathscr{E}((1,2)\times(\overline{1,2}))$和$S_3=\mathscr{E}((1,2,3,4)\times(\overline{1,2,3,4}))$组成．注意割集$S_1$由边$a$覆盖，$S_2$和$S_3$由边$b$覆盖．因为边$e$不在$\{S\}$中任何一个有向割集内，所以$G$在$E$下不是1可辨的．对此结论，我们可以用下面的方法来检查．首先，求出所有非空的可测量集：

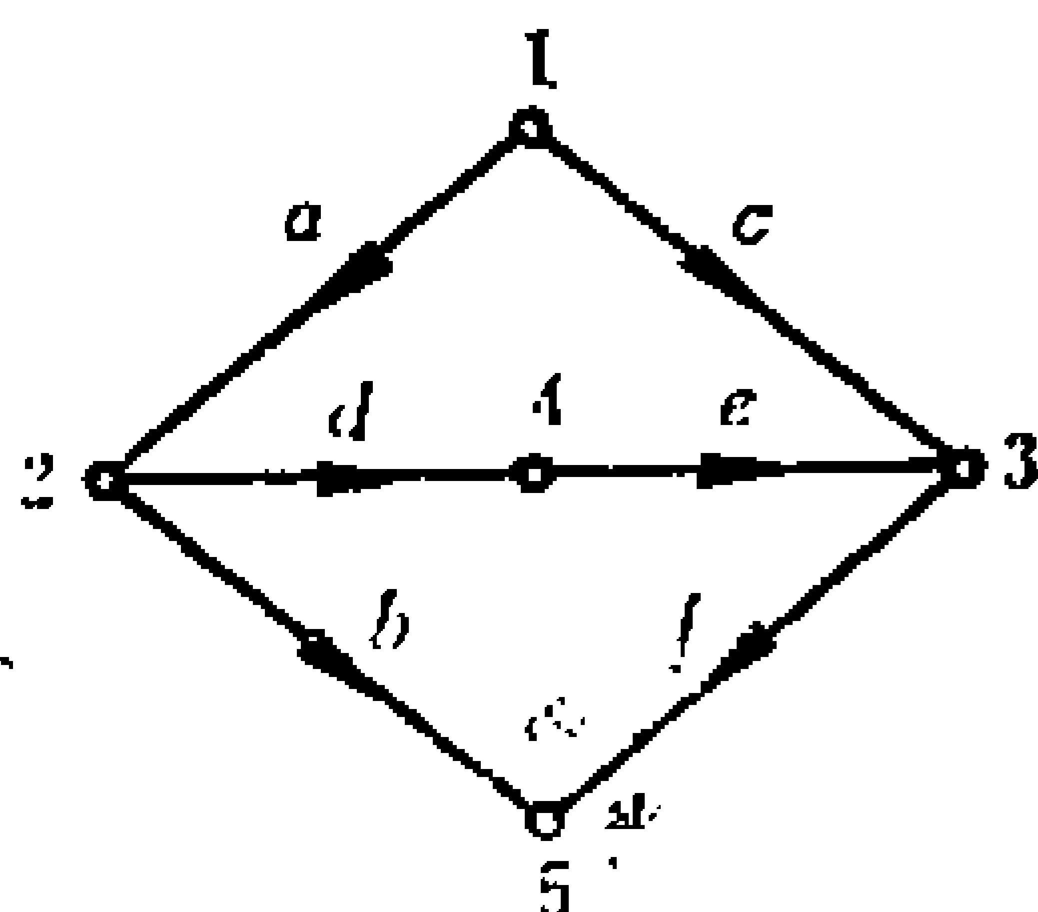


图14-2-6 SEC图

$$\Omega(1\times5)=(1,2,3,4,5)$$
$$\Omega(1\times a^+)=(1)$$
$$\Omega(a^-\times5)=(2,3,4,5)$$
$$\Omega(1\times b^+)=(1,2)$$
$$\Omega(b^-\times5)=(5)$$
$$\Omega(a^-\times b^+)=(2)$$

从这些可测量集中，我们可以得到一个D划分．其中有一个集合为

$$\Omega(1\times5)\cap\overline{\Omega(1\times a^+)}\cap\Omega(a^-\times5)\cap\overline{\Omega(1\times b^+)}\cap\overline{\Omega(b^-\times5)}\cap\overline{\Omega(a^-\times b^+)}$$
$$=(1,2,3,4,5)\cap(2,3,4,5)\cap(2,3,4,5)\cap(3,4,5)\cap(1,2,3,4)\cap(1,3,4,5)$$
$$=(3,4)$$

因此G在E下不是1可辨的．

定理14-2-5表明，如果有一条边不在$\{S\}$的一个割集中，那么SEC图G就不是1可辨的．如果每一条边都在$\{S\}$的割集中，G是不是1可辨的呢？回答一般是否定的．图14-2-7中的SEC图G就是一个例子，这里$E=(a)$．也就是说，$\{S\}$由S_1和S_2组

成，它们包含了G中所有的边。但是，可测量集是

$$\Omega(1\times 4)=(1,2,3,4)$$

$$\Omega(1\times a^{+})=(1)$$

$$\Omega(a^{-}\times 4)=(4)$$

因此，在这些可测量集下，顶点2和3在D划分的同一集合内。这就说明，G在E下不是1可辨的。

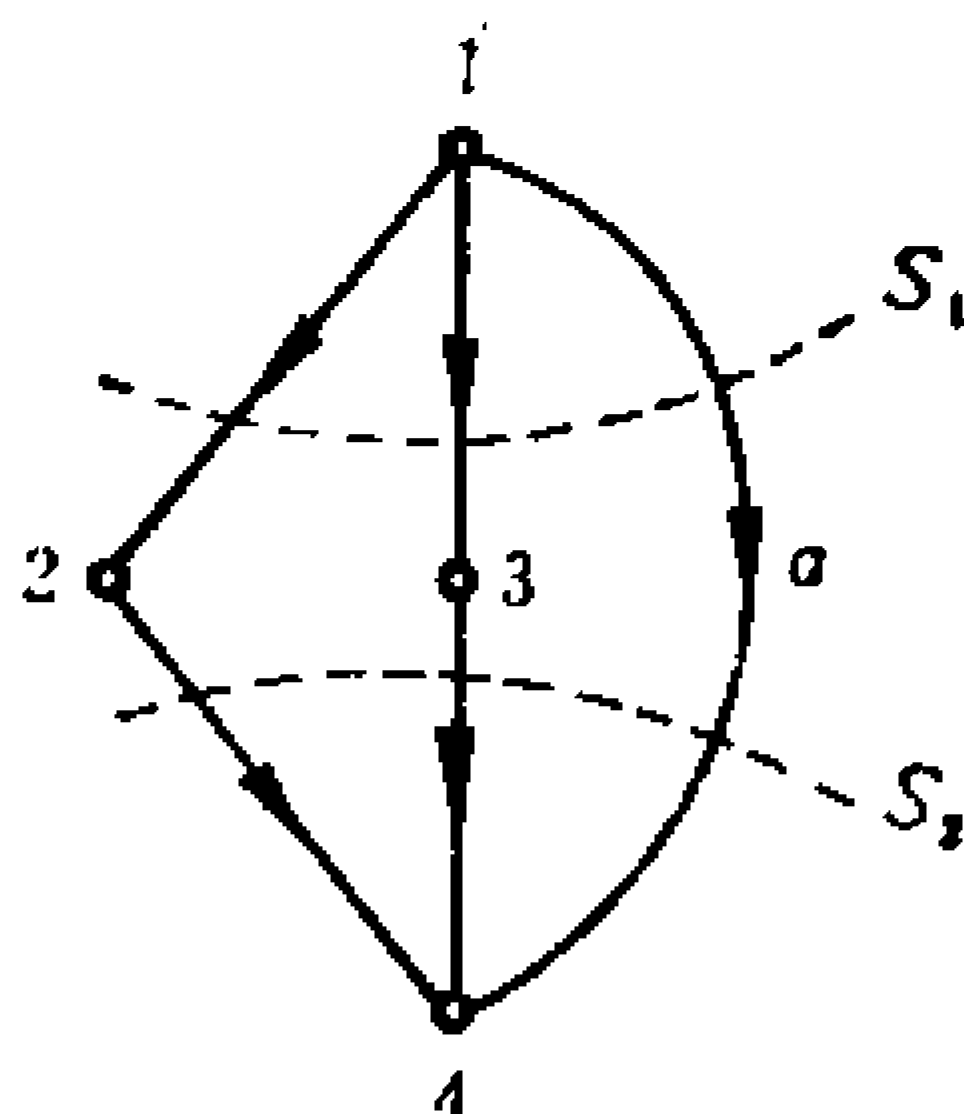


图14-2-7　SEC图

我们进一步研究可测量集对讨论1分辨率会有所启发。

定理14-2-6　设G是从i到j的SEC图，E是一个边集。设$\{\Omega\}$是在E中所有的边上指定测试点而产生的所有可测量集的集体。那么，当且仅当对于G中每一对顶点v_r和v_t，存在一个可测量集$\Omega\in\{\Omega\}$，使得Ω不包含v_r，就包含v_t，但不同时包含二者时，G在E下是1可辨的。

证明：　设$v_0, v_1, \cdots, v_n$是G中所有的顶点。考虑一个顶点v_0，则对于G中另一顶点v_p，存在一个可测量集$\Omega_p\in\{\Omega\}$，使得Ω_p不包含v_0，就包含v_p，但不同时包含二者。因为这对于G中所有的顶点都是正确的，所以存在在E下D划分中的一个集合D，使得

$$D=\tilde{\Omega}_1\cap\tilde{\Omega}_2\cap\cdots\cap\tilde{\Omega}_m=(v_0)$$

并且，这对于G中每一个顶点都正确。因此，D划分中每一个非空集合由一个顶点组成，根据定义，G是1分辨率。

反过来，如果G在E下是1可辨的，则D划分中每一个非空集合由一个顶点组成。因此，对于一对顶点v_r和v_t，存在E下D划分中--个集合D，它由v_r组成，这里

$$D=\tilde{\Omega}_1\cap\tilde{\Omega}_2\cap\cdots\cap\tilde{\Omega}_m \tag{14-2-3}$$

在其中必有集合$\Omega_r(1\leqslant r\leqslant m)$，它包含 v_r 或 v_s，但不同时包含二者。因此，在$\{\Omega\}$中存在一个可测量集Ω_r，它不包含v_r，就包含v_s，但不同时包含二者。（证毕）

因为求分离 i 和 j 且被E中的边覆盖的所有有向割集的集体$\{S\}$要比求所有的可测量集的集体$\{\Omega\}$容易，我们把定理14-2-6说成如下形式。

定理14-2-7 设G是从 i 到 j 的SEC图，E是一个边集合，设$\{S\}$是把 i 和 j 分离且被E中的边覆盖的所有的有向割集的集体。G在E下是1可辨的，当且仅当对于任何一对顶点 v_r 和v_s，存在$\{S\}$中的一个有向割集把v_r和v_s分离开。

证明： 从定理14-2-6我们知道，G是1可辨的，当且仅当对于任何一对顶点 v_r 和v_s，存在一个可测量集Ω，它不包含v_r，就包含v_s，但不同时包含二者。从定理14-2-1和14-2-2可知，如果$\Omega(i\times e^+)\cap\Omega(e^-\times j)=\phi$，则可测量集$\Omega$可以表示为$\Omega(G')$，这里$G'$是删去$\{S\}$中的一个有向割集的所有边得到的两个最大连通子图中的一个，而且显而易见v_r和v_s中的一个在$\Omega(G')$中，另一个在$\overline{\Omega(G')}$中。这样我们只需说明，对于E中所有的边，都满足$\Omega(i\times e^+)\cap\Omega(e^-\times j)=\phi$即可。

据定理14-2-4，如果$\Omega(i\times e^+)\cap\Omega(e^-\times j)\neq\phi$，那么在$\{S\}$中没有一个包含边 e 的有向割集。另一方面，根据本定理的假设，存在$\{S\}$中的一个集合S，把边 e 的两个端点$v(e^+)$和$v(e^-)$分离开。所以S是一个包含边 e 的有向割集。这样，对E中的每一条边，一定满足$\Omega(i\times e^+)\cap\Omega(e^-\times j)=\phi$的条件。这就证明了此定理的必要性。由定理14-2-6，充分性是显然满足的。（证毕）

要知道每一对顶点能否由$\{S\}$中的一个有向割集分开，这不是一件容易的事。所以我们先来寻找一个SEC图G在E下是1可辨的比较简单的充分必要条件。首先我们来研究顶点的次序关系。

定义14-2-9 如果不存在从v_t到v_r的有向路径，则顶点v_r和v_t的次序是$v_r>v_t$。为了方便，也可规定$v_r>v_r$。

作为一个例子，我们考虑图14-2-6中的SEC图。我们可将图中的所有顶点的次序排列为

$$1>2>4>3>5$$

利用顶点次序的定义，我们来叙述以下定理。

定理14-2-8 设G是由顶点$v_1,v_2,\cdots,v_n$组成的一个从v_1到v_n的SEC图，假定G不包含有向回路，那么G中的顶点可以按次序排列。

在证明这个定理之前，我们先叙述和证明以下定理。

定理14-2-9 设G是从v_1到v_n的SEC图，如果G中没有有向回路，那么所有与v_1连接的边的方向都是离开v_1的，所有与v_n连接的边的方向都是指向v_n的。

证明： 因为我们只考虑从v_1到v_n的SEC图，它具有这样的性质：可测量集$\Omega(v_1\times v_n)$包含SEC图的所有顶点。所以从v_1到G中任何一点都有一条有向路径，这样，要使G中不存在有向回路，与v_1连接的所有边的方向必然都是离开v_1的。同样，与v_n连接的所有边也必然都是指向v_n的，这样才能使G中不存在有向回路。 （证毕）

现在我们来证明定理14-2-8。

定理14-2-8的证明： 对于$n=2$，定理显然是成立的。假定定理对于$n=k$时成立，则对$n=k+1$，我们从G中删去顶点v_{k+1}和与v_{k+1}连接的所有边，得到一个有向图G'。设G'中的$v_k,v_{k-1},\cdots,v_{k-p}$是这样一些顶点，所有与这些点相连的边的方向都是指向这些顶点的。对于$p=0$，G'就是一个从v_1到v_k的SEC图，因此，由于假设G'中的所有顶点可以排列成$v_1>v_2>\cdots>v_k$的次序。于是$v_1>v_2>\cdots>v_k>v_{k+1}$就是所求的次序。

对于$p\geqslant1$，我们添加一些边$y_1,y_2,\cdots,y_p$到G'中，其中y_r是

从v_{k-r}连接到v_k的，如图14-2-8所示。这个修改后的有向图是一个从v_1到v_k的SEC图，所以它和前面的图正好相同。因此，在具有$y_1, y_2, \cdots, y_p$的G中，所有的顶点可以排列次序。显然，删去边$y_1, y_2, \cdots, y_p$后，顶点的次序仍然满足，因此定理成立。

（证毕）

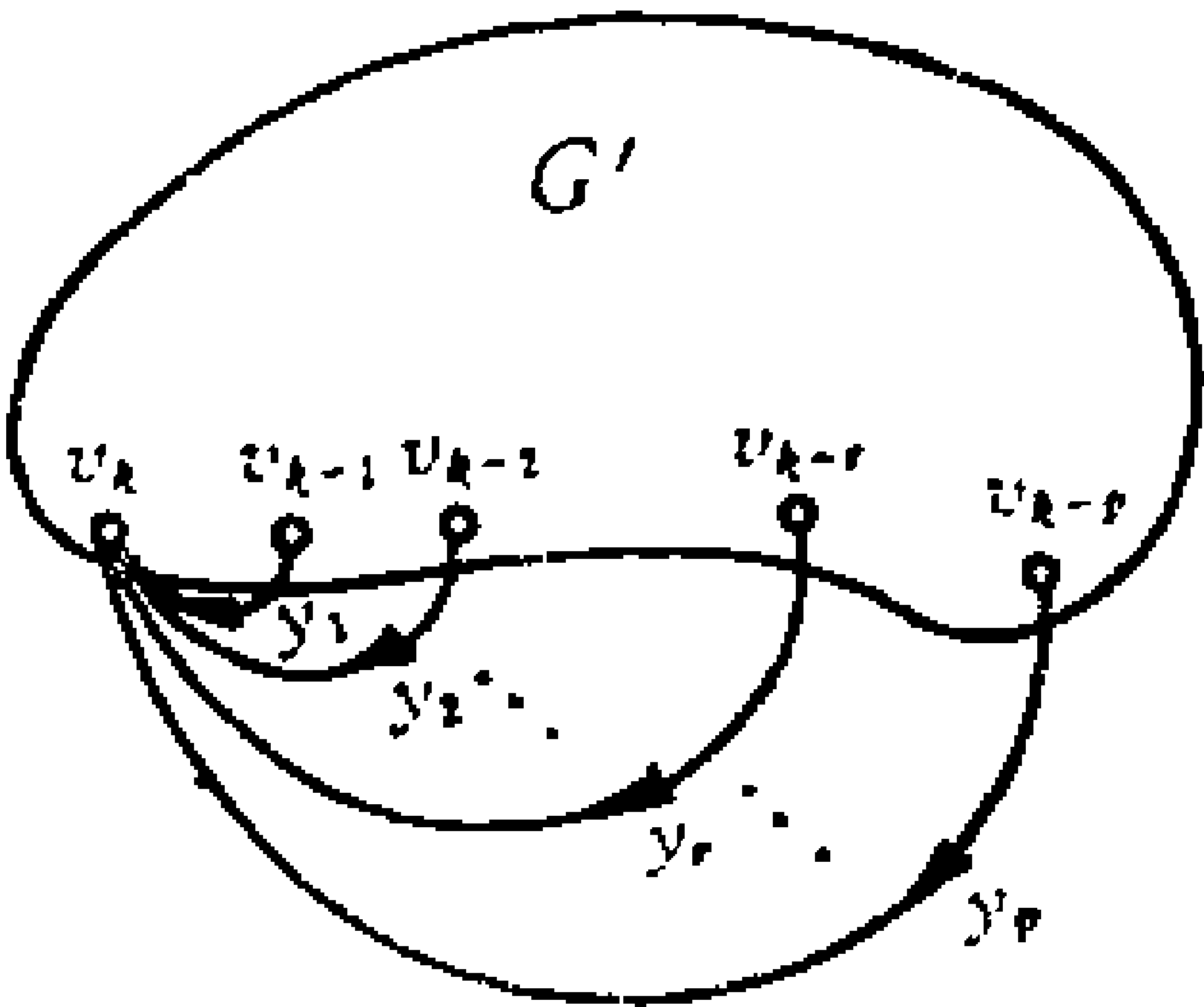


图14-2-8　添加了边$y_1, y_2, \cdots, y_p$的图

利用顶点的次序关系，我们可以得到不含有向回路的SEC图的一个有趣的性质如下。

定理14-2-10　设G是一个由n个顶点组成的，从v_1到v_n的SEC图，它不含有向回路。则其中存在$n-1$个把v_1和v_n分离的线性无关的有向割集。

证明：　设$v_1 > v_2 > \cdots > v_n$是由定理14-2-8得到的顶点次序。则割集$S_r = \mathscr{E}((v_1 v_2 \cdots v_r) \times (v_{r+1} \cdots v_n))$是一个把$v_1$和$v_n$分离的有向割集，$r = 1, 2, \cdots, n-1$。显然，这些割集是线性无关的。

（证毕）

例14-2-4　考虑图14-2-9所示的从1到6的SEC图，顶点的次序是$1>2>3>4>5>6$，五个线性无关的割集是

$$S_1 = \mathscr{E}((1) \times (2,3,4,5,6)) = (a,b)$$

$$S_2=\mathscr{E}((1,2)\times(3,4,5,6))=(a,c,e)$$
$$S_3=\mathscr{E}((1,2,3)\times(4,5,6))=(d,e)$$
$$S_4=\mathscr{E}((1,2,3,4)\times(5,6))=(d,f,h)$$
$$S_5=\mathscr{E}((1,2,3,4,5)\times(6))=(g,h)$$

注意，若含有有向回路时，全体顶点不能按次序排列。如果没有从v_r到v_s的有向路径，又没有从v_s到v_r的有向路径，顶点的次序就不是唯一的。例如，图14-2-9中 SEC 图的另一种顶点次序是$1>2>4>3>5$。

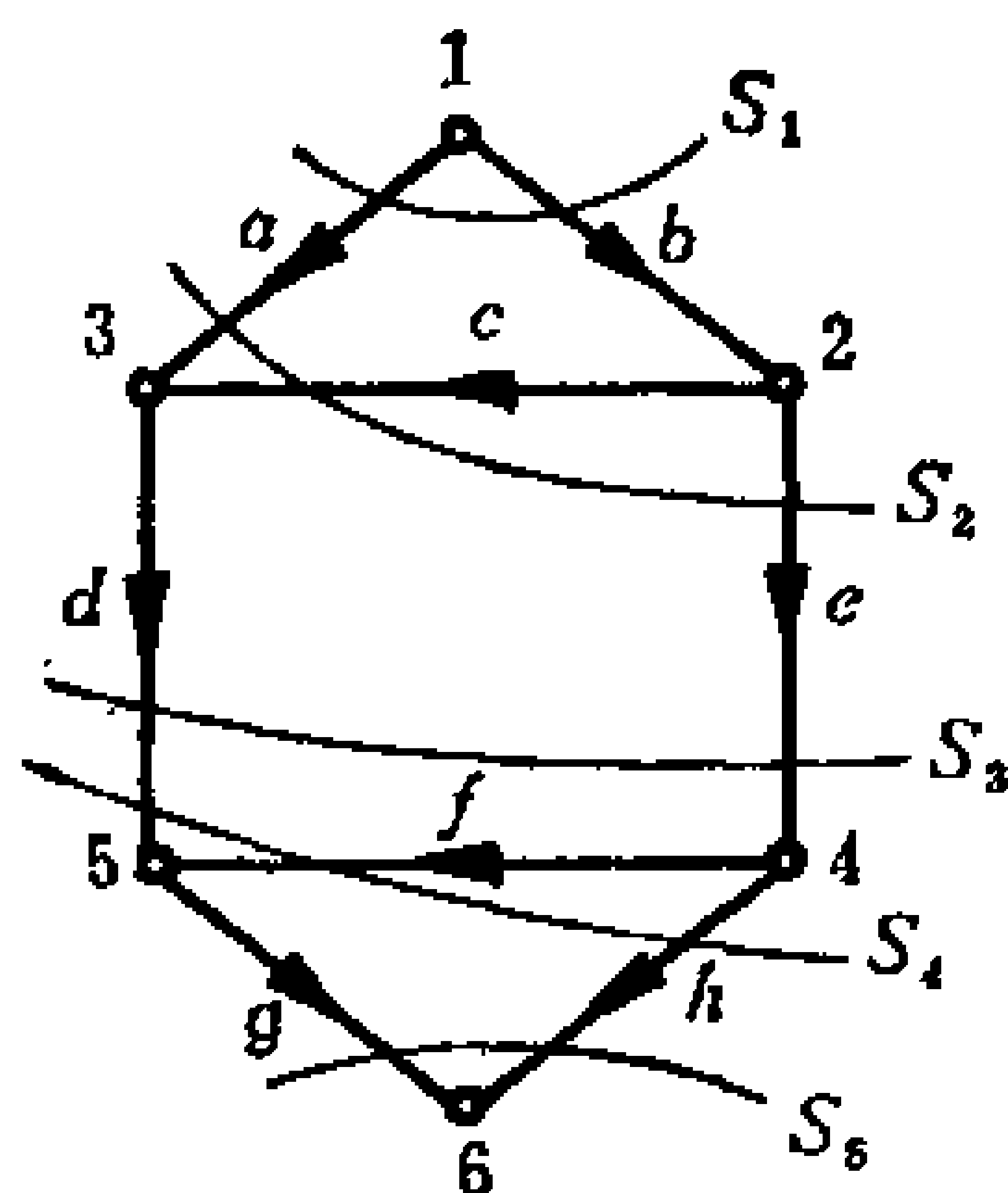


图14-2-9　不含有向回路的SEC图

运用以下定理，有可能建立顶点次序和1分辨率的关系。

定理14-2-11　设G是具有n个顶点的从i到j的SEC图，设$S_p=\mathscr{E}(\Omega_p\times\bar{\Omega}_p)$是把$i$和$j$分离的有向割集，$p=1,2,\cdots,n-1$。假定$S_1,S_2,\cdots,S_{n-1}$都是线性无关的，则对$G$中的任意一对顶点$v_r$和$v_s$，存在$S_r(1\leqslant r\leqslant n-1)$把$v_r$和$v_s$分离开。

证明：　假定存在一对顶点v_r和v_s，不会被$S_1,S_2,\cdots,S_{n-1}$中的任何一个所分离开，那么v_r和v_s同在Ω_p或$\bar{\Omega}_p$中，$p=1,2,\cdots,n-1$。把v_r和v_s合并起来，我们得到一个新的有向图G'。显然，G'的$S_1,S_2,\cdots,S_{n-1}$与G的相同，故$S_1,S_2,\cdots,S_{n-1}$是线性无关的。但G'由$n-1$个顶点组成，其中不会有超过$n-2$个线性无关的割集。因此G中不可能存在这样一对顶点。　　（证毕）

有了这些结果，我们又回到1分辨率的问题上来。

定理14-2-12　设G是从i到j的不含有向回路的SEC图。假定顶点的次序是唯一的，则G在边集E下是1可辨的，当且仅

当E中的边覆盖把i和j分离的所有线性无关的有向割集。

证明： 因为顶点的次序是唯一的，所以把i和j分离的线性无关的有向割集也是唯一确定的。如果在这些有向割集中有某一个不被E中的边覆盖，那么就有一些顶点不会被由E中的边所覆盖的那些割集中的任何一个分离开。据定理14-2-7，G在E下不是1可辨的，这与假设矛盾。反过来，充分性也容易用反证法证明。（证毕）

例14-2-5 考虑图14-2-10所示的从1到6的SEC图。因为这个SEC图顶点的次序是唯一的，故把1到6分离的线性无关的有向割集是S_1,S_2,S_3,S_4和S_5，如图所示。根据定理14-2-12，为了使这个SEC图在集合E下是1可辨的，我们必须选择E的各边，使这些边把所有的有向割集覆盖。例如，集合E可以是(a, d, g)。

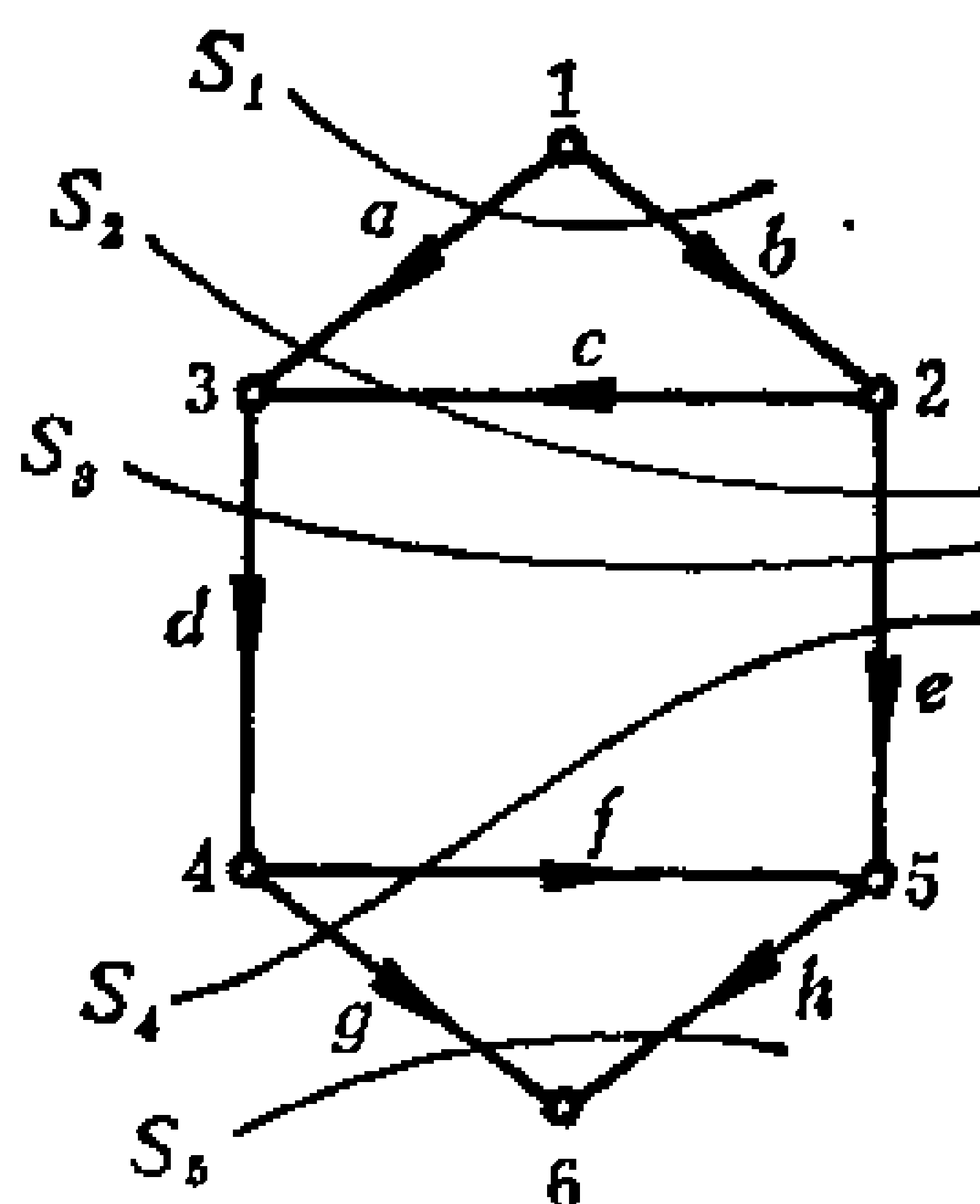


图14-2-10 SEC图

现在，我们已经知道，$n-1$个把i和j分离的线性无关的有向割集对于1分辨率来讲是非常重要的。如果一个从i到j的SEC图G在某些边集E下是1可辨的，G中是否一定有$n-1$个把i和j分离的线性无关的有向割集呢？答案是肯定的，理由由下面的定理给出。注意，据定理14-2-8，如果G没有有向回路，G中就有$n-1$个把i和j分离的线性无关的有向割集。

定理14-2-13 在一个从i到j的SEC图中，一个有向回路的顶点是不可辨的。

证明： 因为一个有向回路中的各边不可能都被包含在一个

有向割集中，所以一个有向回路中的顶点不可能被一个有向割集分离开，因此据定理14-2-7，这个定理是正确的。　　(证毕)

根据这个定理，如果一个SEC图包含有向回路，那么在集合E下就不是1可辨的。因此，我们说一个从i到j的SEC图是1可辨的，应有$n-1$个把i和j分离的线性无关的有向割集。

当一个SEC图中顶点的次序是唯一的时，定理14-2-12给出了1分辨率的一个简单的充分必要条件，假如SEC图的顶点次序不是唯一的，那么$n-1$个被集合E中的边所覆盖的线性无关有向割集变成了充分条件，但不是必要条件。

定理14-2-14　设G是具有n个顶点的从i到j的SEC图，如果把i和j分离的$n-1$个线性无关的有向割集被集合E的边覆盖，则G在集合E下是1可辨的。

这个定理的证明可直接从定理14-2-11得到。为了说明上述条件不是必要的，我们考虑如图14-2-11所示的从i到j的SEC图。选择边集合$E=(a,b,c)$。被E中的边覆盖的，把i和j分离的有向割集集体$\{S\}$由S_1，S_2，S_3和S_4组成。其中

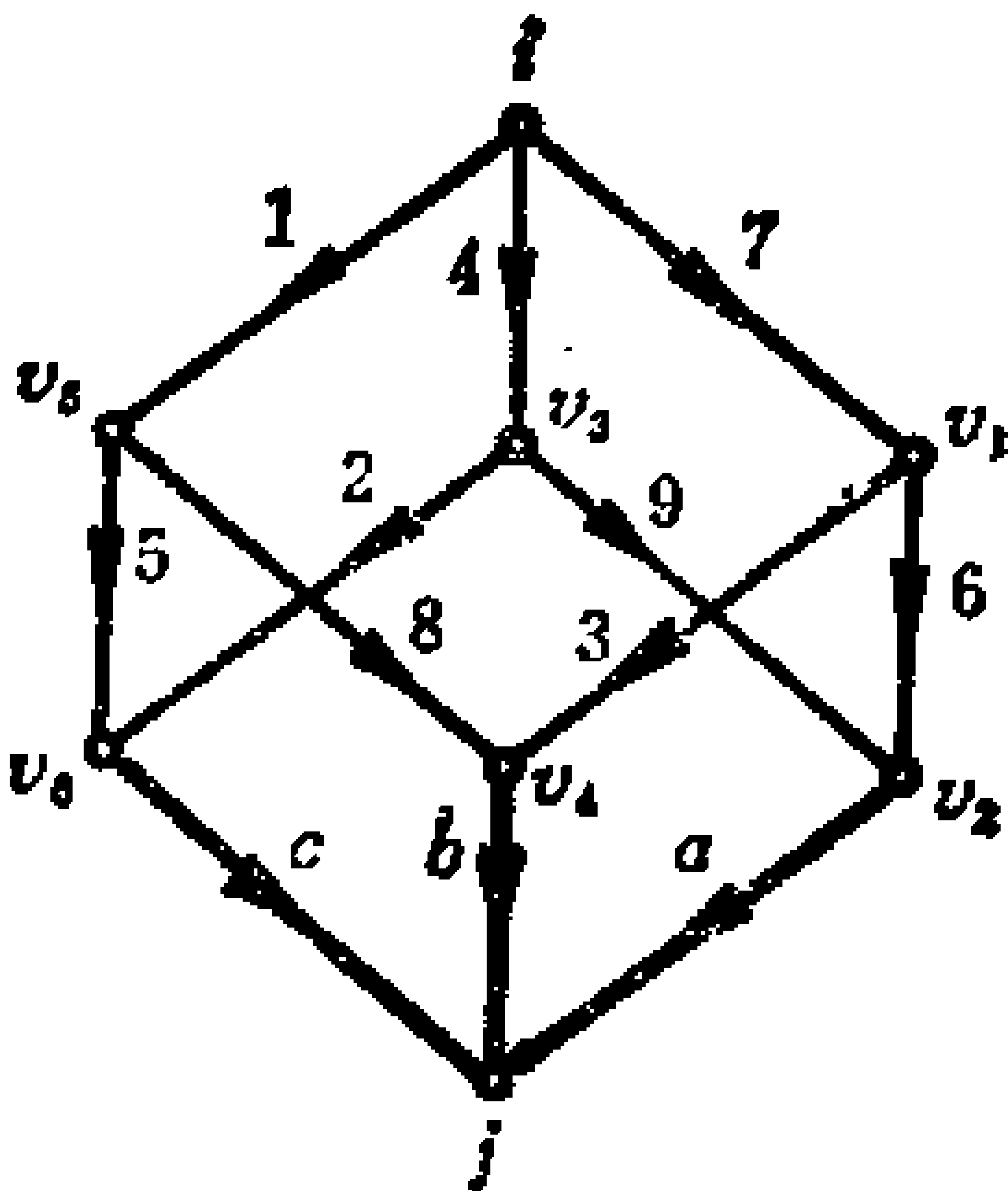


图14-2-11　SEC图G

$$S_1=(1,2,3,a)=\mathscr{E}((i,v_1,v_2,v_3)\times(v_4,v_5,v_6,j))$$
$$S_2=(4,5,6,b)=\mathscr{E}((i,v_1,v_4,v_6)\times(v_2,v_3,v_6,j))$$
$$S_3=(7,8,9,c)=\mathscr{E}((i,v_3,v_5,v_6)\times(v_1,v_2,v_4,j))$$
$$S_4=(a,b,c)=\mathscr{E}((i,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6)\times(j))$$

注意，S_1和S_4由边a覆盖，S_2和S_4由边b覆盖，S_3和S_4由边c覆

盖。因为任意两个顶点都会被这四个有向割集的其中之一分离开，故据定理14-2-6，这个SEC图在E下是1可辨的。然而，集体$\{S\}$并不包含所有的把i和j分离的线性无关的有向割集，并且E中的边显然不能把所有分离i和j的线性无关的有向割集覆盖。

当边集合E是一个有向割集时，1分辨率的条件变得如以下定理给出的那样，非常简单。

定理14-2-15 设G是从i到j的SEC图。假定边集E是G中的一个把i和j分离的有向割集，那么，G在E下是1可辨的，当且仅当G中每一条边是在$\{S\}$的一个割集中。这里$\{S\}$是被E中的边所覆盖的，把i和j分离的所有的有向割集的集体。

注意，在上面给出的例子中，集合E是一个把i和j分离的有向割集，并且G中的每一条边都在集体$\{S\}$的一个割集中，因此据定理14-2-15，SEC图G在E下是1可辨的。

定理14-2-15的证明： 假定G在E下是1可辨的，则据定理14-2-6，每一条边必定至少在一个割集之中。因此，我们只要证明，当每条边都在$\{S\}$的一个割集之中时，G在E下是1可辨的。

假定G在E下不是1可辨的，则至少必有包含两个以上顶点的一个集合Ω_I，使得Ω_I中的顶点不会被$\{S\}$中任何一个割集分离开。另一方面，每一条边至少在$\{S\}$的一个有向割集中，因此，在Ω_I的顶点之间没有边相连。为了得到这样的集合Ω_I，在$\{S\}$中一定有两个有向割集$S_1=\mathscr{E}(\Omega_1\times\bar{\Omega}_1)$和$S_2=\mathscr{E}(\Omega_2\times\bar{\Omega}_2)$，使得

$$i\in\Omega_1\text{且}j\in\bar{\Omega}_1,\qquad i\in\Omega_2\text{且}j\in\bar{\Omega}_2$$

$$\Omega_I=\bar{\Omega}_1\cap\Omega_2$$

如图14-2-12所示。注意Ω_1，Ω_I和$\bar{\Omega}_2$都是无重点集合，它们包含了G的全部顶点。

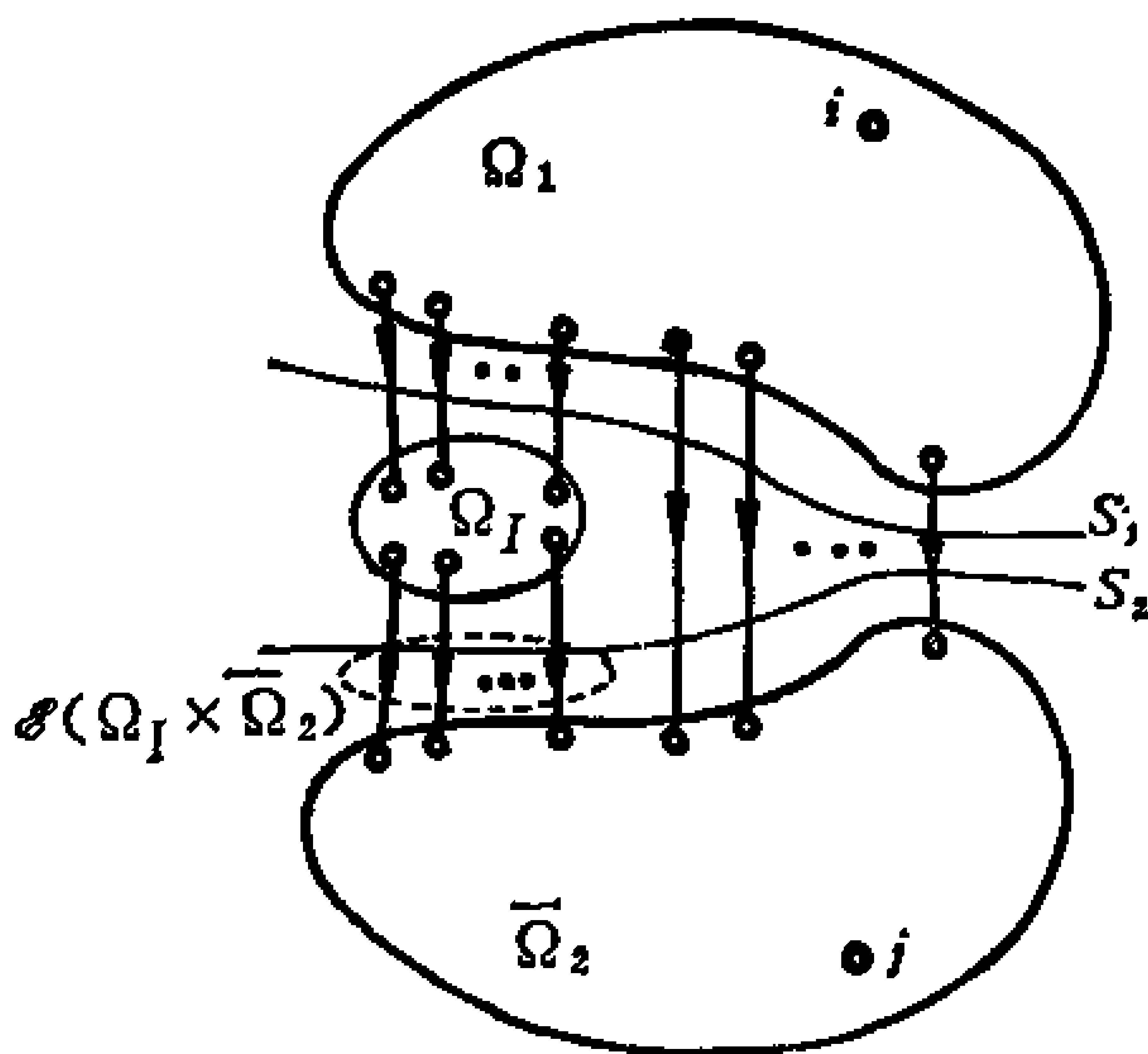


图14-2-12　带有Ω_I的SEC图

注意到S_2中有一条边e在E中，如果$\mathscr{E}(\Omega_I \times \overline{\Omega}_2)$的任何一边$e'$在$E$之中，那么就存在一个被边$e'$覆盖的有向割集把$\Omega_I$分离开。因此在$\mathscr{E}(\Omega_1 \times \overline{\Omega}_2)$中没有属于集合$E$的边。同样，在$\mathscr{E}(\Omega_1 \times \Omega_I)$中也没有属于集合$E$的边。但根据假设，$E$是一个把$i$和$j$分离开的有向割集。我们知道，$S$的边$e$在有向割集$E$中，位于$\Omega_1$的一个顶点和$\overline{\Omega}_2$的一个顶点之间。我们还知道，$E$不可能分离$\Omega_I$中的顶点，并且我们能看出，$E$不可能分离$\overline{\Omega}_2$中的任何顶点，也不能分离$\Omega_1$中的任何顶点，这是因为$S_1$和$S_2$都是由$E$中的边所覆盖的有向割集。因此，$E$不是$S_1$就是$S_2$。这就说明，$E$或者包含$\mathscr{E}(\Omega_1 \times \overline{\Omega}_2)$，或者包含$\mathscr{E}(\Omega_1 \times \Omega_I)$，从而产生矛盾。所以，$G$中不存在这样的集合$\Omega_I$，这就证明了定理。　　（证毕）

现在，我们进一步研究找出故障点所需的实际测量有直接关系的可测量集。设$\{\Omega\}$是在集合E的所有边上指定的测试点所产

生的全部可测量集的集体。我们已经用从$\{\Omega\}$得到的D划分中的集合来定义 SEC 图的1分辨率。当我们研究$\{\Omega\}$中的可测量集时，我们会看到，在$\{\Omega\}$中有一些真子集体$\{\Omega'\}$，从$\{\Omega'\}$得到的D划分和从$\{\Omega\}$得到的D划分相同。例如，考虑图 14-2-13 中的SEC图G。设$E=(a,b)$，则$\{\Omega\}$包括$\Omega(i\times a^+)=(i)$，$\Omega(a^-\times j)=(1,2,j)$，$\Omega(i\times b^+)=(i,2)$，$\Omega(b^-\times j)=(j)$ 以及 $\Omega(a^-\times b^+)=(2)$。由上述可测量集得到的$D$划分中的非零集合为

$$\Omega(i\times a^+)\cap\overline{\Omega(a^-\times j)}\cap\Omega(i\times b^+)\cap\overline{\Omega(b^-\times j)}\cap\overline{\Omega(a^-\times b^+)}=(i)$$

$$\overline{\Omega(i\times a^+)}\cap\Omega(a^-\times j)\cap\Omega(i\times b^+)\cap\overline{\Omega(b^-\times j)}\cap\Omega(a^-\times b^+)=(2)$$

$$\overline{\Omega(i\times a^+)}\cap\Omega(a^-\times j)\cap\overline{\Omega(i\times b^+)}\cap\Omega(b^-\times j)\cap\overline{\Omega(a^-\times b^+)}=(j)$$

$$\overline{\Omega(i\times a^+)}\cap\Omega(a^-\times j)\cap\overline{\Omega(i\times b^+)}\cap\overline{\Omega(b^-\times j)}\cap\overline{\Omega(a^-\times b^+)}=(1)$$

只用$\Omega(i\times a^+)$,$\Omega(i\times b^+)$和$\Omega(b^-\times j)$也可以得到同样的D划分。这就说明，我们只要对相应的$\Omega(i\times a^+)$，$\Omega(i\times b^+)$和$\Omega(b^-\times j)$作三次测量，而不须时$\{\Omega\}$中相应的所有非空可测量集作五次测量，就能获得诊断所必需的全部信息。为了研究诊断所必需的测量次数，我们定义$\{\Omega\}$的生成元如下。

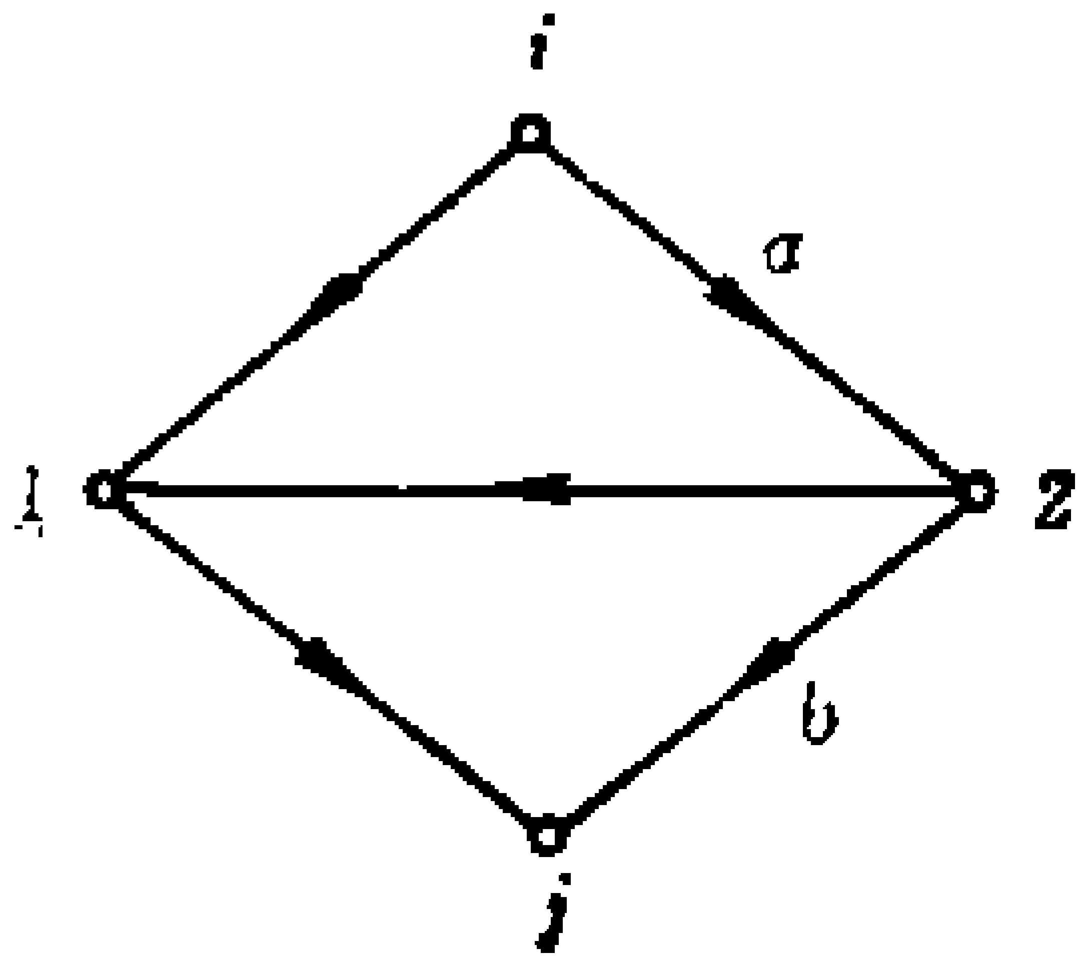


图14-2-13 SEC图G

定义14-2-8 设$\{\Omega\}$是由集合E产生的所有可测量集的集体，又设$\{\Omega'\}$是$\{\Omega\}$的一个子集体。如果：（1）从$\{\Omega\}$得到的D划分与由$\{\Omega\}$形成的D划分相同；（2）从$\{\Omega'\}$的任何一个真子集体得到的D划分都与从$\{\Omega\}$形成的D划分不同；则称$\{\Omega'\}$是$\{\Omega\}$的生成元集体。

在上面的例子中，由图14-2-13中的SEC图G的边集合$E=(a,b)$产生的非零可测量集体$\{\Omega\}$是

$$\{\Omega\}=\{\Omega(i\times a^+),\Omega(a^-\times j),\Omega(i\times b^+),\Omega(b^-\times j),\Omega(a^-\times b^+)\}$$

由$\{\Omega\}$形成的D划分是

$$\{D\}=\{(i),\ (2),\ (j),\ (1)\}$$

$\{\Omega\}$的一个子集体$\{\Omega(i\times a^+),\Omega(i\times b^+),\Omega(b^-\times j)\}$也给出同样的$D$划分．但是，$\{\Omega(i\times a^+),\Omega(i\times b^+),\Omega(b^-\times j)\}$的任何一个真子集体再不会给出同样的$D$划分。因此，$\{\Omega(i\times a^+),\Omega(i\times b^+),\Omega(b^-\times j)\}$是$\{\Omega\}$的生成元集体。

对于一个给定的$\{\Omega\}$，可能会有许多生成元集体。并且，$\{\Omega\}$的每一个生成元集体中的集合数目不一定相同。因为每一个可测量集对应诊断用的一次测量，并且$\{\Omega\}$的一个生成元集体给出所需要的一个D划分，而诊断所需的测量次数与$\{\Omega\}$的一个生成元集体中的集合数目相同。

利用生成元的定义，我们得到一个新定理。

定理14-2-16 对于从i到j的SEC图的一个集合$E=(e_1,e_2,\cdots,e_k)$，由可测量集$\Omega(i\times e_p^+)$和$\Omega(e_p^-\times j)$组成的集体包含着$\{\Omega\}$的一个生成元集体，其中$p=1,2,\cdots,k$．

证明： 因为在$\{\Omega\}$中的任何一个可测量集是$\Omega(i\times e_p^+)$，$\Omega(e_p^-\times j)$和$\Omega(e_p^-\times e_q^+)$中的一个，所以要证明的是，要得到$\{\Omega\}$的生成元集体，并不需要集合$\Omega(e_p^-\times e_p^+)$．根据可测量集的定义，$\Omega(e_p^-\times e_q^+)$是这样一个顶点集合，它们至少在一个$M(e_p^-\times e_q^+)$类的一个连通有向$M$图中。另一方面，$\Omega(i\times e_q^+)$是由这样的顶点构成的，这些顶点至少在$M(i\times e_q^-)$的一个连通有向$M$图中。并且我们知道，在一个从$i$到$j$的SEC图中，从$i$到$v(e_p^-)$有一条有向路径。因此，对于$M(e_p^-\times e_q^-)$类的连通有向$M$图中的任一顶点$v$，有一个$M(i\times e_q^+)$类的连通有向$M$图包含$v$．所以

$$\Omega(e_p^-\times e_q^+)\subset\Omega(i\times e_q^+) \qquad (14\text{-}2\text{-}4)$$

$$\Omega(e_p^-\times e_q^+)\subset\Omega(e_p^-\times j) \qquad (14\text{-}2\text{-}5)$$

故
$$\Omega(e_p^-\times e_q^+)\subset\Omega(i\times e_q^+)\cap\Omega(e_p^-\times j) \qquad (14\text{-}2\text{-}6)$$

设v'是$\Omega(i\times e_q^+)\cap\Omega(e_p^-\times j)$中的一个顶点，则有一个$M(e_p^-\times v')$类的连通有向$M$图，还有一个$M(v'\times e_q^+)$类的连通有向$M$图。这样，有一个$M(e_p^-\times e_q^+)$类的连通有向$M$图包含$v'$。所以由式14-2-6得

$$\Omega(e_p^-\times e_q^+)=\Omega(i\times e_q^+)\cap\Omega(e_p^-\times j) \qquad (14\text{-}2\text{-}7)$$

因此，如果一个集体已包含$\Omega(i\times e_q^+)$和$\Omega(e_p^-\times j)$，那么就不必在该集体中具备$\Omega(e_p^-\times e_q^+)$，以及包含$\{\Omega\}$的生成元的集体。以此类似，我们能证明在$\{\Omega\}$的生成元集体中，$\Omega(e_p^-\times e_q^-)$，$\Omega(e_p^+\times e_q^-)$ 和$\Omega(e_p^+\times e_q^+)$也是不必要的。 (证毕)

定理14-2-17 如果集合E的一条边e覆盖着一个有向割集，则仅有$\Omega(i\times e^+)$和$\Omega(e^-\times j)$之一，可以在$\{\Omega\}$的生成元集体之中。

证明： 因为边e只覆盖一个有向割集，所以$\Omega(i\times e^+)\supset\Omega(e^-\times j)$是所有顶点的集合。因此

$$\Omega(i\times e^+)=\overline{\Omega(e^-\times j)} \qquad (14\text{-}2\text{-}8)$$

此式说明，构成一个D划分只需要这两个可测量集中的一个。

(证毕)

例如，考虑例14-2-2中图14-2-3所示的SEC图。如果集合$E=(b,h)$，那么边b只覆盖一个有向割集$S=(a,b)$。可以看出，

$$\Omega(1\times b^+)=(1),\quad \Omega(b^-\times 6)=(2,3,4,5,6)$$

这就说明，$\Omega(1\times b^+)=\overline{\Omega(b^-\times 6)}$。另一方面，边$h$覆盖两个有向割集$S_1(h)$和$S_3(h)$。与$h$相伴的可测量集是

$$\Omega(1\times h^+)=(1,2,4)\text{和}\Omega(h^-\times b)=(6)$$

我们可以清楚地看到，$\{\Omega\}$的一个生成元集体是

$$\{\Omega(1\times b^+),\ \Omega(1\times h^+),\ \Omega(h^-\times 6)\}$$

从这个定理，我们可以得到定理14-2-18。

定理14-2-18 对于集合$E=(e_1,e_2,\cdots,e_k)$，在$\{\Omega\}$的一个生成元集体中，集合的数目不超过$2h$。

14-3 测 试 门

在上节中，我们看到了，当SEC图中有回路时，就不能得到1分辨率。所以，对于这种SEC图，要想得到1分辨率，就不能用测试点的方法，而需要采用一些器件。这种器件就是下面定义的测试门。

定义14-3-1 给边 e 指定测试门，意思是在需要时边 e 可被删去。

例如，如果我们指定一个测试门给图14-3-1中SEC图的边 e，那么利用测试门可将可测量集$\Omega(i\times j)=(i,j,1,2)$变成$(i,2,j)$. 也就是说，我们可以利用测试门把$G$变成图14-3-2所示的图。

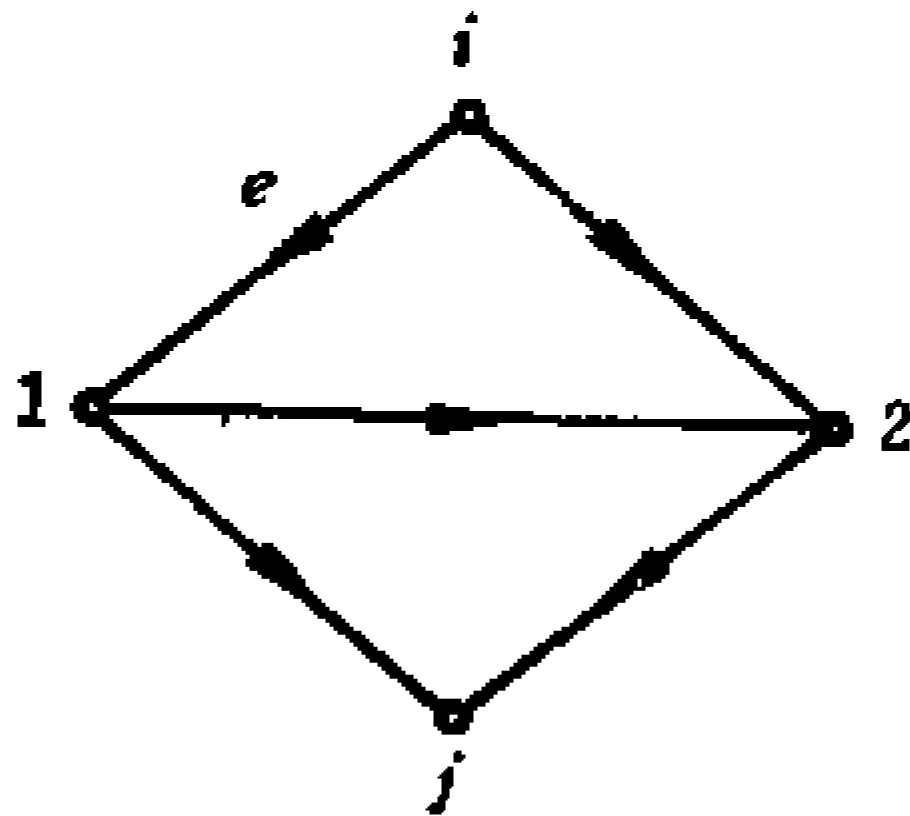


图14-3-1 SEC图G

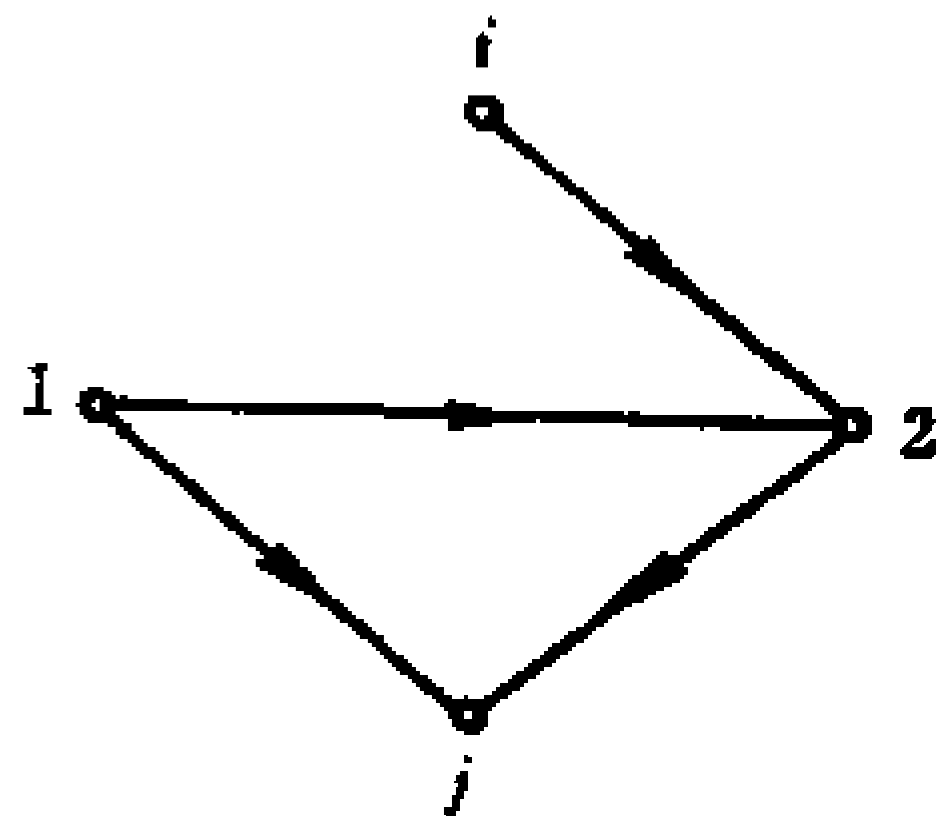


图14-3-2 把测试门指定给边 e 后所得的图

为了说明测试门对可测量集的影响，我们用一个下标E，比如说用$\Omega(i\times j)_E$来表示指定给E中的边的测试门在起作用。

定义14-3-2 符号$\Omega(i\times j)_E$表示删去集合E中所有的边所得到的子图的一个可测量集。

当我们把测试门指定给集合E的所有边时，选取测试门正工作的不同边，就产生出几个可测量集。换句话说，我们删去E中

某些边，可以得到不同的可测量集。

例14-3-1 考虑图14-3-3所示的SEC图。假定$E=(e_1,e_2,e_3,e_7)$，那么我们有以下可测量集：

$$\Omega(i\times j)_{e_1e_2e_3}=\Omega(i\times j)_{e_1e_2}=\Omega(i\times j)_{e_3}=(i,v_2,v_3,j)$$

$$\Omega(i\times j)_{e_7}=(i,v_1,v_2,j)$$

$$\Omega(i\times j)_{e_3e_7}=\Omega(i\times j)_{e_1e_2e_7}$$

$$=\Omega(i\times j)_{e_1e_2e_3e_7}=(i,v_2,j)$$

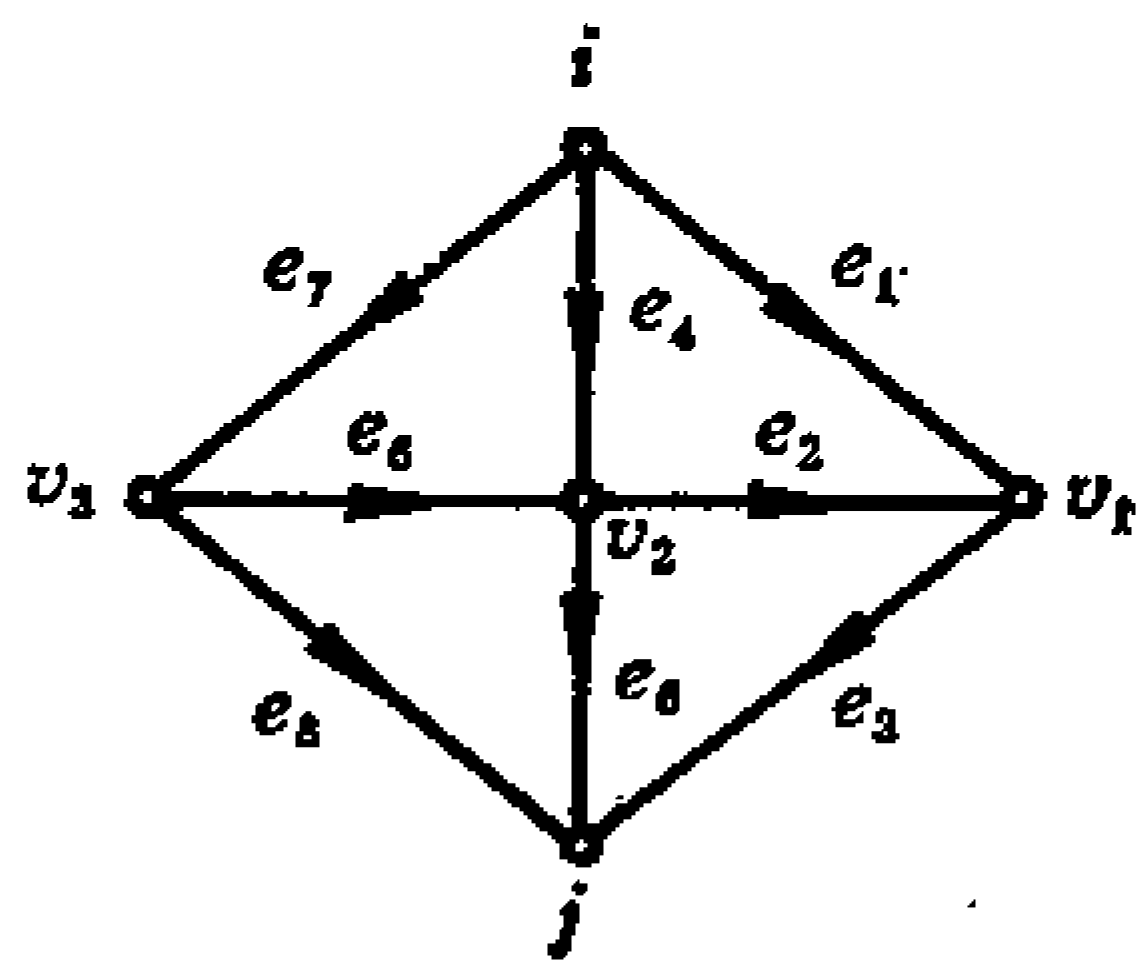


图14-3-3 SEC图G

为了研究测试门的性质，我们考虑一个只用测试门的SEC图。为简便起见，我们采用以下定义。

定义14-3-3 门集合E的可测量集是指，在集合E中所有的边上都指定测试门所产生的所有可能的可测量集。

在例14-3-1中，可测量集$\Omega(i\times j)_{e_3}$，$\Omega(i\times j)_{e_7}$和$\Omega(i\times j)_{e_3e_7}$就是门集合$(e_1,e_2,e_3,e_7)$的可测量集。

对测试门不起作用的各边，作所有可能的选择，就得到下述定理。

定理14-3-1 门集合E的各种不同的可测量集的数目不超过2^k-1个，这里k是集合E中边的数目。

考虑从i到j的SEC图的可测量集$\Omega(i\times j)_E$。对于E的每一个真子集E'，假定$\Omega(i\times j)_E$和$\Omega(i\times j)_{E'}$不同，那么我们说，E是关于$\Omega(i\times j)_E$的最小集合。例如，在例14-3-1中，考虑$E=(e_1,e_2,e_3,e_7)$，我们有$\Omega(i\times j)_E=(i,v_2,j)$。可是，由$E$的真子集$E'=(e_3,e_7)$，我们有$\Omega(i\times j)_{E'}$等于$\Omega(i\times j)_E$。因此，$E$不是关于$\Omega(i\times j)_E$的最小集合。我们可以看出，$E'$是关于$\Omega(i\times j)_{E'}$的最小集合。

在例14-3-1中，

$$\Omega(i\times j)_{e_3e_7}=\Omega(i\times j)_{e_1e_2e_7}=(i,v_2,j)$$

这里，(e_3,e_7)和(e_1,e_2,e_7)都是关于(i,v_2,j)的最小集合。这个例子说明，关于一个可测量集的最小集合不是唯一的，然而，最小集合有一个有趣的性质，这由以下定理给出。

定理14-3-2 设在从i到j的SEC图G中，E是关于$\Omega(i\times j)_E(\neq\phi)$的最小集合，则从$G$中删去$E$的所有边得到的图是连通的。

证明： 设G'是从G中删去E的所有边得到的图. 假定G'是分离的，设G'_1和G'_2是G'的子图，使得$\Omega(G'_1)=\Omega(i\times j)_E$，且$G'_1$和$G'_2$之间不连通. 注意$G$的$\Omega(i\times j)_E$等于$G'$的$\Omega(i\times j)_E$. 设$v$是$G'_2$的一个顶点. 因为$G$是从$i$到$j$的SEC图，至少存在一个$M(i\times j)$类的连通有向$M$图，它包含$G'_2$中顶点$v$，所以这个$M$图中至少有两条边$e_1$和$e_2$既不在$G'_1$中，又不在$G'_2$中。如图14-3-4所示. 我们容易看出，把$e_1$添加到$G'$中，所得图的$\Omega(i\times j)$与$G'$的$\Omega(i\times j)$

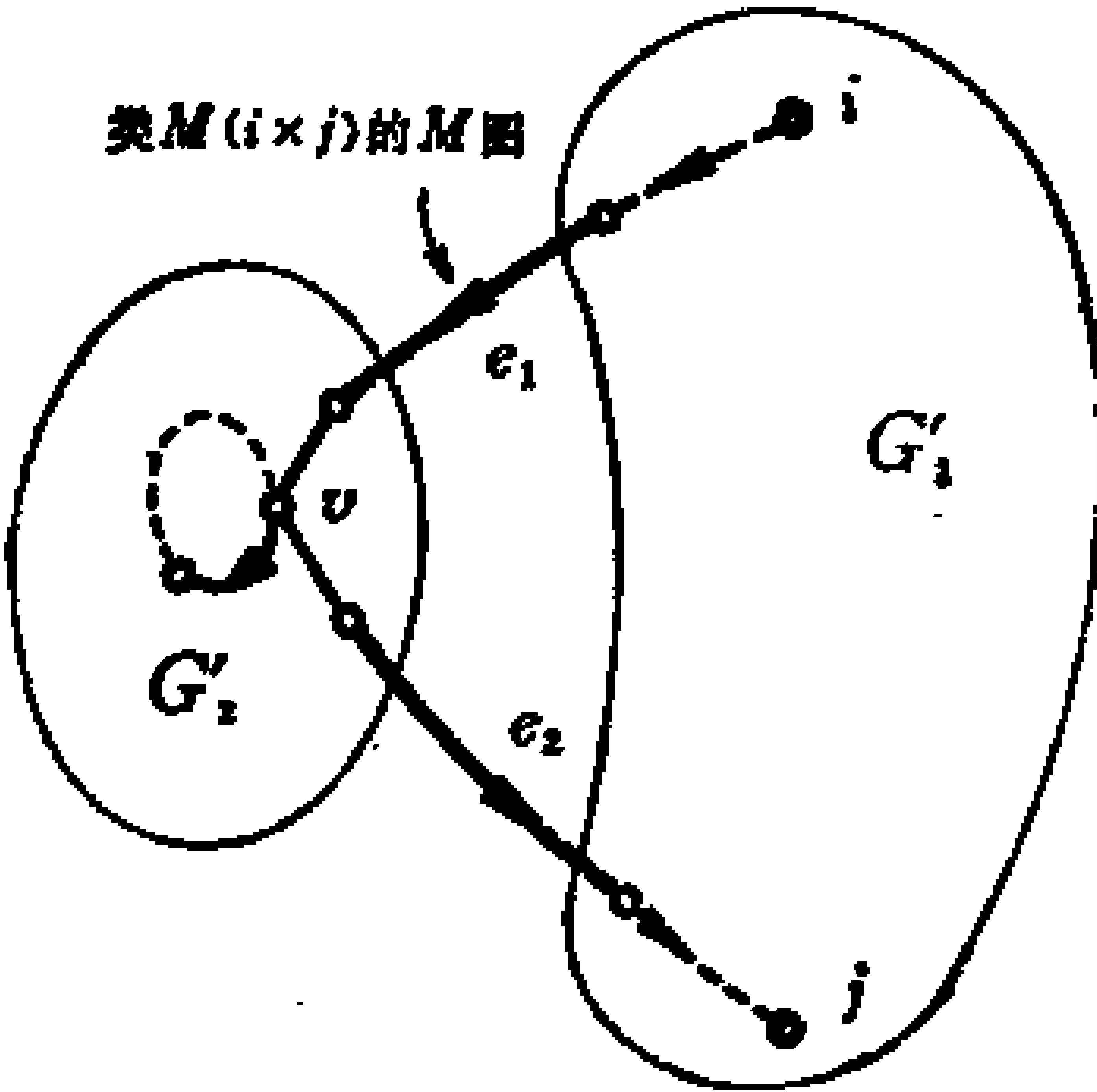


图14-3-4 G'_1，G'_2和路径P

相同。这就表明，在G中$\Omega(i\times j)_E=\Omega(i\times j)_{E'}$，这里$E'=E-(e_1)$。因此$E$不是关于$\Omega(i\times j)_E$的最小集合。这与假设$E$是关于$\Omega(i\times j)_E$的最小集合相矛盾，于是定理得到证明。（证毕）

在门集合E的可测量集的集体中，我们可以象上一节那样得到一个D划分。例如，在门集合$E=(e_1, e_2, e_3, e_7)$的可测量集$\Omega(i\times j)_{e_3}$，$\Omega(i\times j)_{e_7}$和$\Omega(i\times j)_{e_3e_7}$的集体中，我们可以得到$D$划分为

$$\Omega(i\times j)_{e_3}\cap\Omega(i\times j)_{e_7}\cap\Omega(i\times j)_{e_3e_7}=(i,v_2,j)$$
$$\Omega(i\times j)_{e_3}\cap\Omega(i\times j)_{e_7}\cap\overline{\Omega(i\times j)_{e_3e_7}}=\phi$$
$$\Omega(i\times j)_{e_3}\cap\overline{\Omega(i\times j)_{e_7}}\cap\Omega(i\times j)_{e_3e_7}=\phi$$
$$\Omega(i\times j)_{e_3}\cap\overline{\Omega(i\times j)_{e_7}}\cap\overline{\Omega(i\times j)_{e_3e_7}}=(v_3)$$
$$\overline{\Omega(i\times j)_{e_3}}\cap\Omega(i\times j)_{e_7}\cap\Omega(i\times j)_{e_3e_7}=\phi$$
$$\overline{\Omega(i\times j)_{e_3}}\cap\Omega(i\times j)_{e_7}\cap\overline{\Omega(i\times j)_{e_3e_7}}=(v_1)$$
$$\overline{\Omega(i\times j)_{e_3}}\cap\overline{\Omega(i\times j)_{e_7}}\cap\Omega(i\times j)_{e_3e_7}=\phi$$
$$\overline{\Omega(i\times j)_{e_3}}\cap\overline{\Omega(i\times j)_{e_7}}\cap\overline{\Omega(i\times j)_{e_3e_7}}=\phi$$

注意，这里的可测量集$\Omega(i\times j)_E$具有和上一节相同的性质。也就是说，在指定给E中的边的全部测试门起作用的情况下，当我们把一个信号从顶点i注入时，在顶点j监视到的信号只通过$\Omega(i\times j)_E$中的那些顶点。因此，上一节中关于可测量集的所有性质都可以应用于可测量集$\Omega(i\times j)_E$。例如，在从i到j的SEC图G中，如果存在一对顶点v_r和v_t，在门集合E的所有可测量集集体中，每一个可测量集均包含v_r和v_t时，G就不是1可辨的（定理14-2-6）。因为在门集合E的可测量集集体中，每一个可测量集$\Omega(i\times j)_{E'}$包含i和j两个顶点，所以从i到j的SEC图在任何门集合E下不是1可辨的，当然，如果我们忽略掉顶点i或者顶点j，有些SEC图在某些门集合下也能是1可辨的。为了研究这样的SEC图和门集合，我们需要另一个定义。

定义14-3-4 对于从i到j的SEC图G，如果在不考虑顶点

j 的情况下，G在集合E下是1可辨的，则称G在门集合E下是1-(i,j)可辨的。

例14-3-2 对图14-3-5中从1到4的SEC图G，取门集合$E=(b,d)$。E的可测量集为

$$\Omega(1\times 4)_b=(1,2,4)$$
$$\Omega(1\times 4)_d=(1,3,4)$$
$$\Omega(1\times 4)_{bd}=\phi$$

这些可测量集的D划分由以下集合组成：

$$\Omega(1\times 4)_b\cap\Omega(1\times 4)_d=(1,4)$$
$$\Omega(1\times 4)_b\cap\overline{\Omega(1\times 4)_d}=(2)$$
$$\overline{\Omega(1\times 4)_b}\cap\Omega(1\times 4)_d=(3)$$
$$\overline{\Omega(1\times 4)_b}\cap\overline{\Omega(1\times 4)_d}=\phi$$

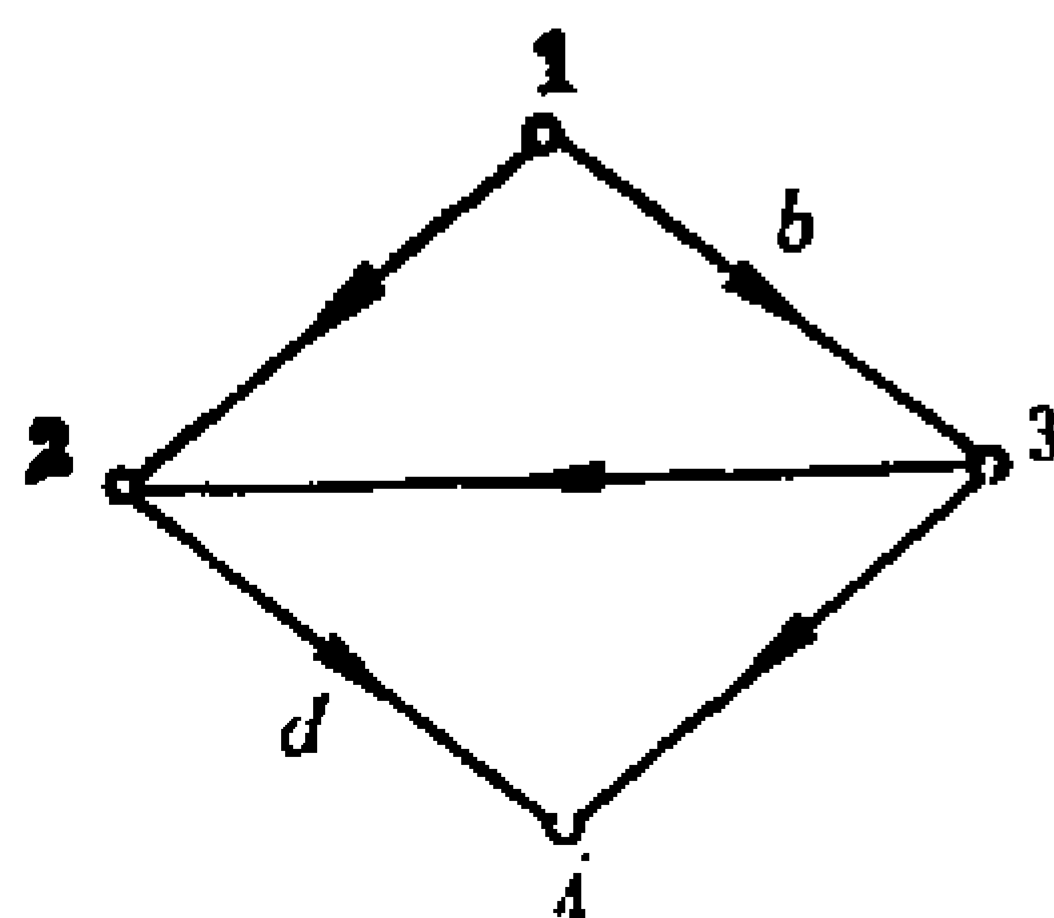


图14-3-5 SEC图G

如果我们不考虑顶点4，则上述D划分中每一个集合最多包含一个顶点。这样，如果我们忽略顶点4，G在E下是1可辨的。于是，G在E下是1-(1，4)可辨的。

利用以上定义，我们可将定理14-2-6修改如下，使它可以应用于测试门的情况。

定理14-3-3 设G是一个从i到j的SEC图，E是一个边集。又设$\{\Omega\}$是对E中所有的边指定的测试门所产生的所有可测量集的集体，那么，当且仅当对于G中每一对顶点v_r和v_s，在不考虑顶点j（即$v_r\neq j, v_s\neq j$）的情况下，存在一个可测量集$\Omega\in\{\Omega\}$，使得Ω不同时包含二者，仅包含v_r或v_s之一时，G是在E下1-(i,j)可辨的。

这个定理的证明与定理14-2-6的证明几乎是完全相同的。

在例14-3-2的图14-3-5中，SEC图G中由集合$E=(b,d)$所

产生的可测量集集体$\{\Omega\}$为

$$\{\Omega\}=\{\Omega(1\times4)_b,\ \Omega(1\times4)_d\}=\{(1,2,4),\ (1,3,4)\}$$

所以，对于除顶点4外，我们所选择的任何一对顶点，在$\{\Omega\}$中总有一个可测量集，它只包含这一对顶点中的一个。于是据定理14-3-3，G是在(b,d)下1-(i,j)可辨的。

我们还记得，一个把i和j分离的半割可以用$\mathscr{S}(\Omega_i\times\bar{\Omega}_i)$来表示，其中$i\in\Omega_i$，$j\in\bar{\Omega}_i$。现在，如果$\mathscr{S}(\bar{\Omega}_i\times\Omega_i)=\phi$，那么半割$\mathscr{S}(\Omega_i\times\bar{\Omega}_i)$就变成了分离$i$和$j$的有向割集。我们从下一个定理中将会看到，这样的半割对于1-(i,j)分辨率是很重要的。

定理14-3-4 设G是从i到j的SEC图，在i和j之间没有边直接相连，如果一个门集合E不含分离i和j的半割作为子集，则G在门集合E下不是1-(i,j)可辨的。

证明： 因为E不含分离i和j的半割作为子集，所以存在一条从i到j的，不包含E中的边的有向路径P。根据假设，G中没有直接连接i和j的边，所以路径P一定至少包含i和j元外的另一顶点v，这样，E的每一个可测量集都包含顶点v以及i和j，由定理14-2-6，即使不考虑顶点j，G也不是1可辨的，故G在门集合E下不是1-(i,j)可辨的。 （证毕）

例14-3-3 考虑图14-3-6中从i到j的SEC图G，设门集合$E=(1,4,6)$。因为$(1,4,6)$不包含分离i和j的半割，所以据定理14-3-4，G在$(1,4,6)$下不是1-(i,j)可辨的。现在，我们来检验这个结论。

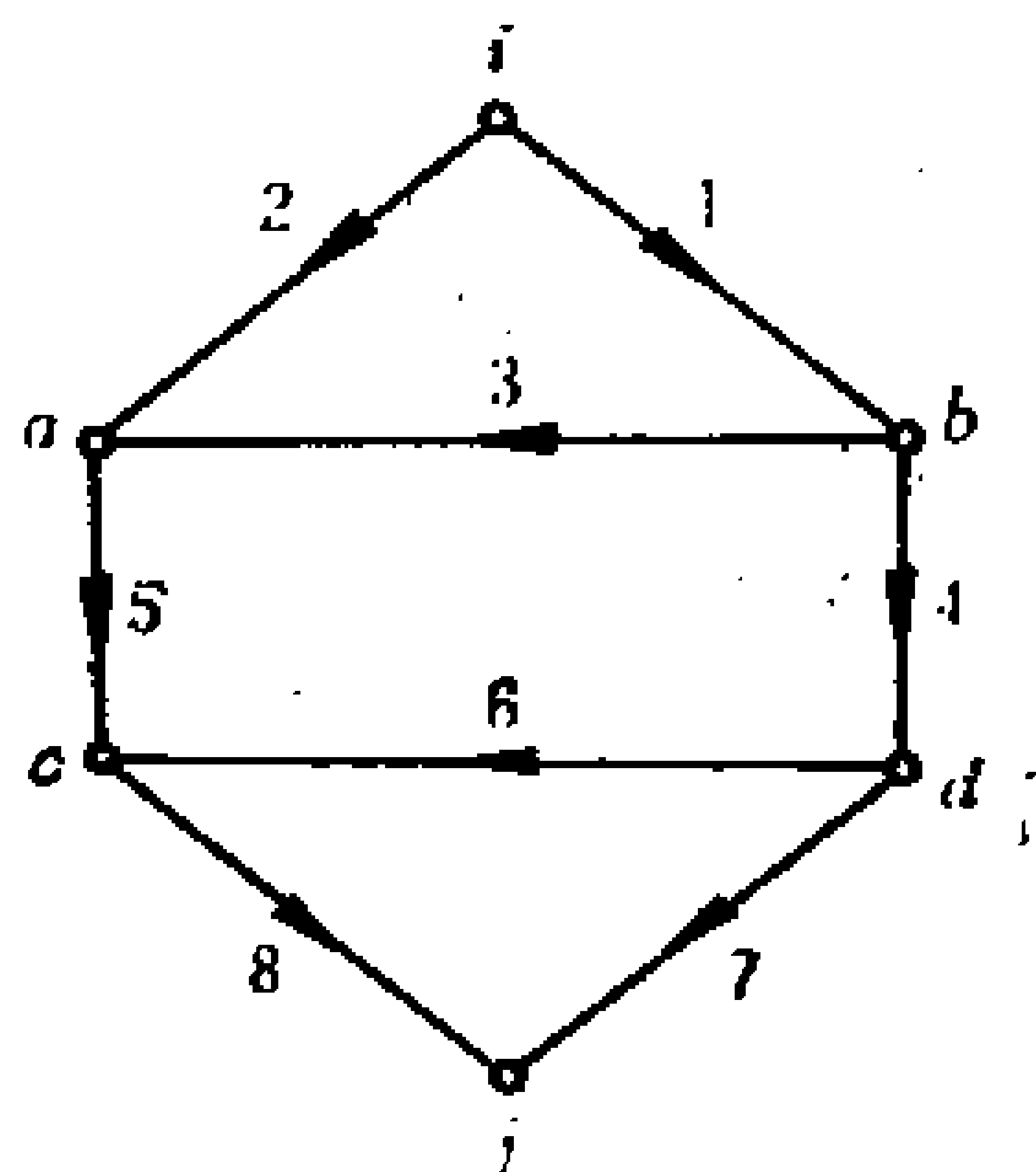


图14-3-6 SEC图G

门集合$(1,4,6)$的可测量集

是

$$\Omega(i\times j)_1=\Omega(i\times j)_{14}=\Omega(i\times j)_{16}=\Omega(i\times j)_{146}=(i,a,c,j)$$
$$\Omega(i\times j)_6=(i,a,b,c,d,j)$$
$$\Omega(i\times j)_4=\Omega(i\times j)_{46}=(i,a,b,c,j)$$

这些可测量集的D划分中包含一个集合D，

$$D=\Omega(i\times j)_1\cap\Omega(i\times j)_4\cap\Omega(i\times j)_6=(i,a,c,j)$$

因此，G在门集合(1,4,6)下不是1-(i,j)可辨的。

根据定理14-3-4，要使一个SEC图在E下是1-(i,j)可辨的，集合E必须包含一个从i到j的半割。因此，为了研究能给出1-(i,j)可辨集合的边集合E，我们假设E本身是一个有向割集$S=\mathscr{S}(\Omega_i\times\bar{\Omega}_i)$，其中$i\in\Omega_i$，$j\in\bar{\Omega}_i$。设$E=(e_1,e_2,\cdots,e_k)$，如果我们从SEC图$G$中删去$E$中除$e_p(1\leqslant p\leqslant k)$外的所有的边，那么从$i$顶点注入，在$j$顶点监测到的测试信号一定经过边$e_p$。这就导出了如下定理。

定理14-3-5 设G是从i到j的SEC图。设$E=(e_1,e_2,\cdots,e_k)$是一个有向割集$\mathscr{S}(\Omega_i\times\bar{\Omega}_i)$，其中$i\in\Omega_i$，$j\in\bar{\Omega}_i$。则对$p=1,2\cdots,k$。

$$\Omega(i\times j)_{(\overline{e_p})}=\Omega(i\times e_p^-)\cup\Omega(e_p\times j) \qquad (14\text{-}3\text{-}1)$$

这里$(\overline{e_p})=E-(e_p)$。设E_q是E的一个子集，则

$$\Omega(i\times j)_{\overline{E_q}}=\bigcup_{e_p\in E_q}\Omega(i\times j)_{(\overline{e_p})} \qquad (14\text{-}3\text{-}2)$$

这里的$\overline{E}_q=E-E_q$。

证明： 前面说过，$\Omega(i\times e_p^+)$是一个顶点集合，其中每一个顶点至少是在$M(i\times e_p^+)$类的一个连通有向M图之中；$\Omega(e_p^-\times j)$也是一个顶点集合，其中每个顶点至少是在$M(e_p^-\times j)$类的一个连通有向M图中（见14-2节）。由前面的讨论，定理的第一部分是显然的。对于定理的第二部分，我们注意到，一条从i到j经过$\Omega(i\times j)_{\overline{E}_q}$中顶点的有向路径必然正好包含$E_q$中的一条边。因此，对于某些$e_p\in E_q$，$\Omega(i\times j)_{\overline{E}_q}$中的每一个顶点都在$\Omega(i\times j)_{(\overline{e_p})}$

中．很明显，$\Omega(i\times j)_{(\bar{e}_p)}$中的每一个顶点一定也在$\Omega(i\times j)_{\bar{E}_p}$中．

（证毕）

定理14-3-5不仅给出了类$\Omega(i\times j)_{(\bar{e})}$的可测量集与14-2节中的可测量集之间的关系，而且也说明，要求出在一个给定集合E下的D划分，只要知道$\Omega(i\times j)_{(\bar{e})}$类的可测量集即可。

例14-3-4 考虑如图14-3-7所示的从i到j的不可分SEC图，设$E=(e_1,e_2,e_3)$，我们可以看出，

$$\Omega(i\times e_1^+)=(i,1)$$
$$\Omega(e_1^-\times j)=(4,j)$$
$$\Omega(i\times e_2^+)=(i,1,2,3)$$
$$\Omega(e_2^-\times j)=(4,5,6,j)$$
$$\Omega(i\times e_3^+)=(i,3)$$
$$\Omega(e_3^-\times j)=(6,j)$$

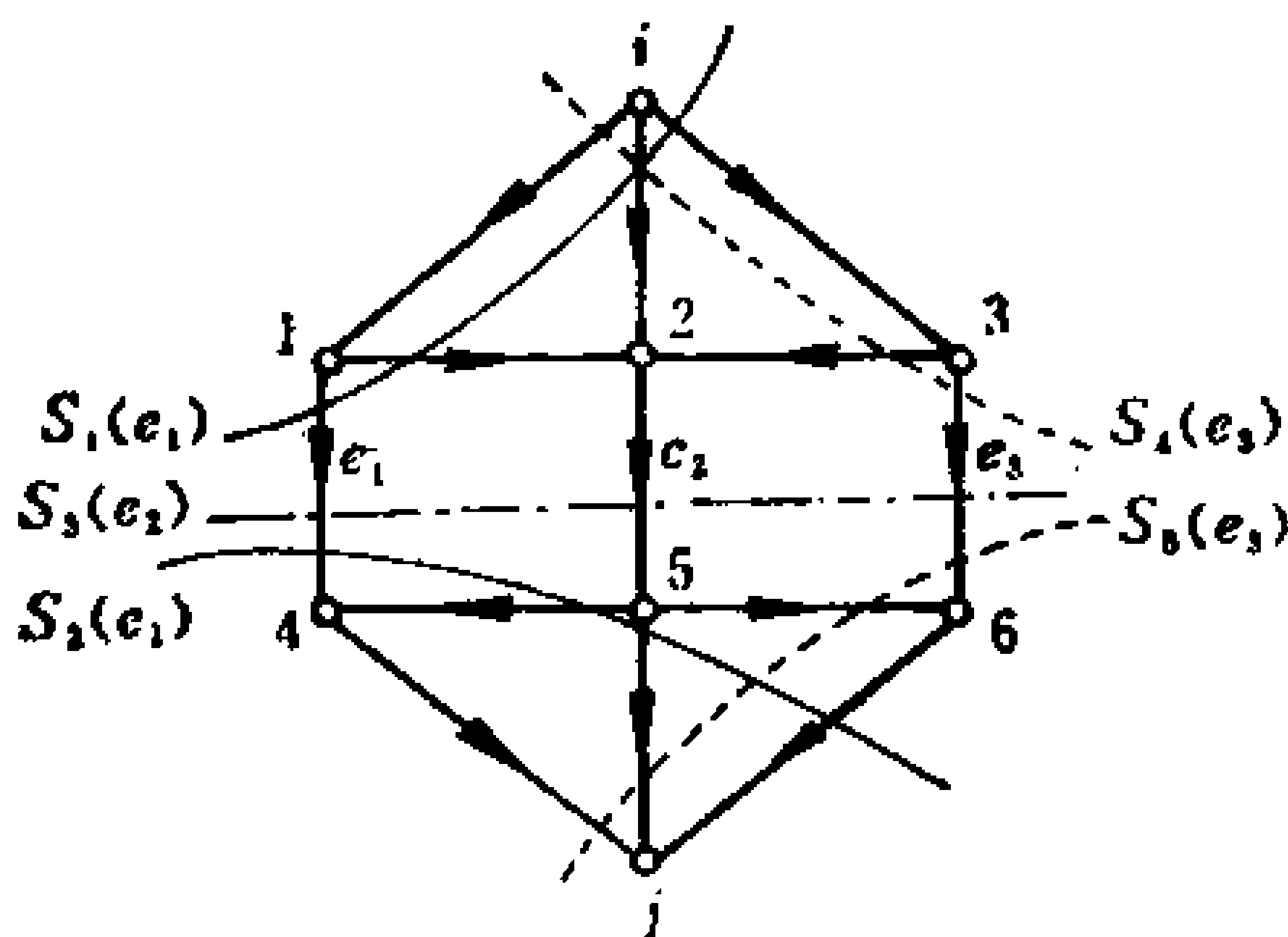


图14-3-7 不可分的SEC图

据定理14-3-5，我们可以得到

$$\Omega(i\times j)_{(e_2e_1)}=\Omega(i\times j)_{(\overline{e_1})}=\Omega(i\times e_1^+)\cup\Omega(e_1^-\times j)$$
$$=(i,1,4,j)$$

$$\Omega(i\times j)_{(e_1e_3)}=\Omega(i\times j)_{(\overline{e_2})}=\Omega(i\times e_2^{+})\cup\Omega(e_2\times j)$$
$$=(i,1,2,3,4,5,6,j)$$
$$\Omega(i\times j)_{(e_1e_2)}=\Omega(i\times j)_{(\overline{e_3})}=\Omega(i\times e_3^{+})\cup\Omega(e_3^{-}\times j)$$
$$=(i,3,6,j)$$
$$\Omega(i\times j)_{(e_1)}=\Omega(i\times j)_{(\overline{e_2e_3})}=\Omega(i\times j)_{(\overline{e_2})}\cup\Omega(i\times j)_{(\overline{e_3})}$$
$$=(i,1,2,3,4,5,6,j)$$
$$\Omega(i\times j)_{(e_2)}=\Omega(i\times j)_{(\overline{e_1e_3})}=\Omega(i\times j)_{(\overline{e_1})}\cup\Omega(i\times j)_{(\overline{e_3})}$$
$$=(i,1,3,4,6,j)$$
$$\Omega(i\times j)_{(e_3)}=\Omega(i\times j)_{(\overline{e_1e_2})}=\Omega(i\times j)_{(\overline{e_1})}\cup\Omega(i\times j)_{(\overline{e_2})}$$
$$=(i,1,2,3,4,5,6,j)$$

当我们运用测试点时，根据定理 14-2-15 我们得出，如果边集E是一个把 i 和 j 分离的有向割集，且G中每一条边至少在由E所覆盖的$\{S\}$中的一个有向割集内，那么从 i 到 j 的SEC图在E下是 1 可辨的。当我们指定测试门到E中的边上时，情况就不同了。例如，在图14-3-7的SEC图中，边集 $E=(e_1,e_2,e_3)$ 所覆盖的有向割集集体$\{S\}$由割集S_1,S_2,S_3,S_4,S_6 构成，如图所示。注意到E是一个把 i 和 j 分离的有向割集，容易看出，SEC图中每一条边在$\{S\}$的一个割集中。另一方面，考虑顶点 1 和 4 的集合(1，4)，我们可以看出，对于E的每一个子集 E'，或$(1,4)\subset\Omega(i\times j)_E$，或$(1,4)\subset\overline{\Omega(i\times j)_{E'}}$。因此，由定理 14-3-3，$G$在$(e_1,e_2,e_3)$下不是$1$-$(i,j)$ 可辨的。这个例子说明，当我们应用测试门时，要使一个SEC 图是1-(i,j) 可辨的，仅要求所有的边在$\{S\}$中的条件不是充分的。因此，我们有以下定理。

定理14-3-6 设G是从 i 到 j 的SEC图，假定集合E是一个有向割集$\mathscr{E}(\Omega\times\overline{\Omega})$，其中$\Omega$仅由顶点 i 组成，或者$\overline{\Omega}$仅由顶点 j 组成。则G是1-(i,j)可辨的，当且仅当G中每一条边在$\{S\}$的一个有向割集中。其中$\{S\}$是被E覆盖的有向割集集体。

证明：据定理14-3-5，

$$\Omega(i\times j)_{(\overline{e_p})}=\Omega(i\times e_p^+)\cup\Omega(e_p^-\times j) \qquad (14\text{-}3\text{-}3)$$

其中$e_p\in E$．假定$\overline{\Omega}$仅由顶点 j 组成，则$\Omega(e_p^-\times j)=(j)$．所以对所有的边$e_p\in E$，$\Omega(i\times j)_{(\overline{e_p})}=\Omega(i\times e_p^+)\cup(j)$．因此，如果没有顶点 j ，运用测试门关于e_p的可测量集和运用测试点关于e_p的可测量集就是相同的。当Ω仅由顶点 i 组成时，我们有$\Omega(i\times j)_{(\overline{e_p})}=(i)\cup\Omega(e_p^-\times j)$．这说明当我们不考虑顶点 i 时，运用测试门关于e_p的可测量集与运用测试点关于e_p的可测量集是相同的。因此，运用测试点关于一个从 i 到 j 的 SEC 图在E下为 1 可辨的充分必要条件，在这种情况下也能适用。这就证明了定理。

（证毕）

例14-3-5 考虑图14-3-8中的不可分SEC图．由$E=(e_1,e_2,$

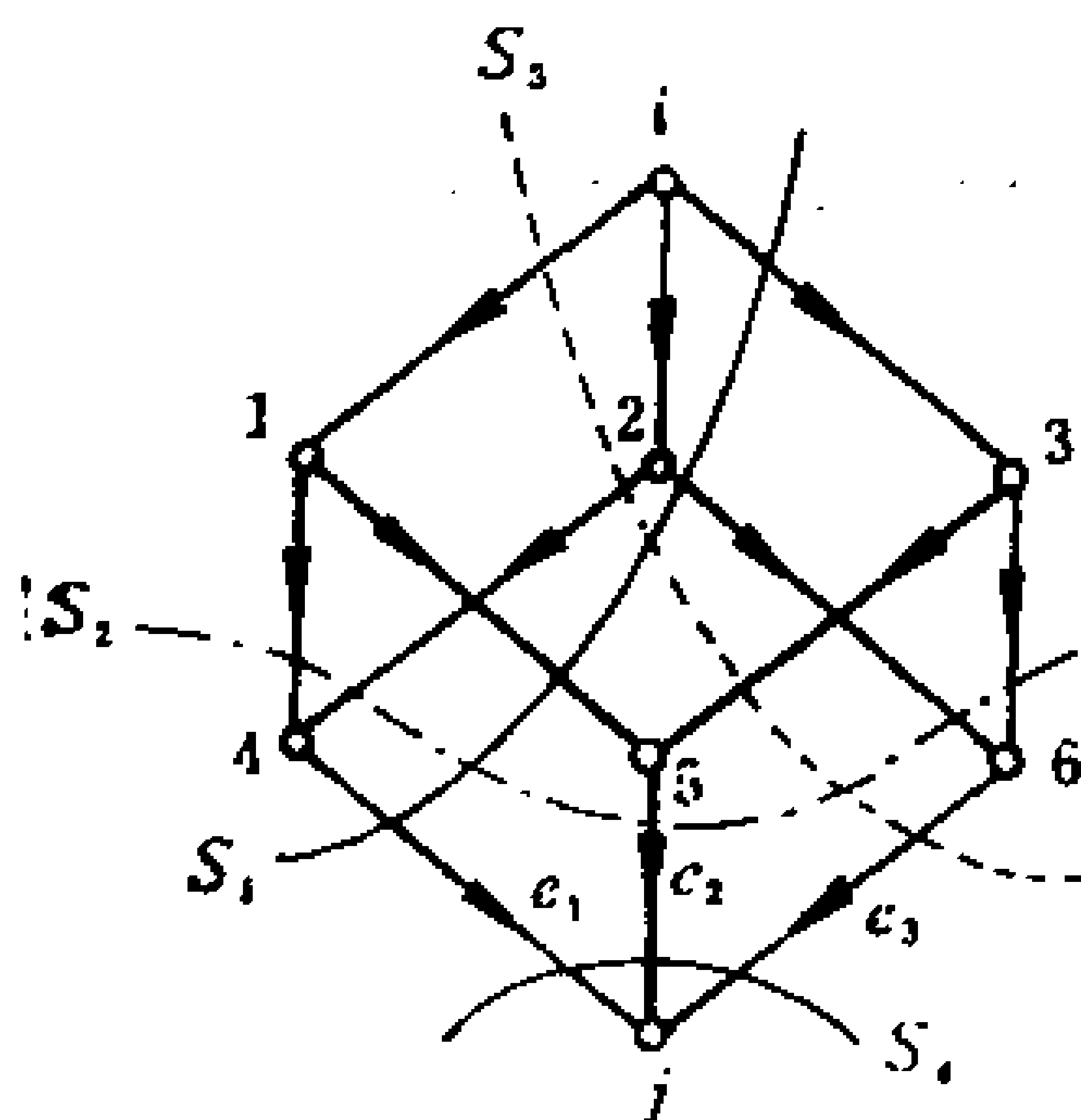


图14-3-8 不可分的SEC图

$e_3)$所覆盖的有向割集集体$\{S\}$包括四个割集S_1，S_2，S_3和S_4，它们是

$$S_1=\mathscr{E}\{(i,1,2,4)\times\overline{(i,1,2,4)}\}$$

$$S_2=\mathscr{E}((i,1,3,5)\times\overline{(i,1,3,5)})$$

$$S_3 = \mathscr{E}((i,2,3,6) \times \overline{(i,2,3,6)})$$
$$S_4 = \mathscr{E}(\overline{(j)} \times (j))$$

如图所示。

因为G中每一条边在$\{S\}$的一个割集中，据定理14-3-6，G在(e_1, e_2, e_3)下是1-(i,j)可辨的。

定理14-3-7 设G是从i到j的SEC图，假定集合$E = \mathscr{E}(\Omega \times \bar{\Omega})$是一个有向割集。如果$G$中每一条边在$\{S\}$的一个割集内，则$G$在$E$下或者是1-$(i,j)$可辨的，或者是2-$(i,j)$可辨的，其中$\{S\}$是被$E$覆盖的有向割集集体。

证明：考虑在G中把所有属于Ω的顶点合并起来，得到一个SEC图G'。显然$\{S\}$的一个子集体是G'中由E覆盖的有向割集集体，G'的每一条边在这个子集体的一个割集中。因为$E = \mathscr{E}(\Omega' \times \bar{\Omega}')$是$G'$中一个有向割集，这里$\Omega' = (i)$，$\bar{\Omega}' = \bar{\Omega}$，据定理14-3-6，$G'$在$E$下是1-$(i,j)$可辨的。同样，把$\bar{\Omega}$中所有顶点合并起来，我们得到一个新的SEC图$G''$，它在$E$下是1-$(i,j)$可辨的。因此，$\Omega$中任意两个顶点不可能在$E$下$D$划分的同一集合中。同样，$\bar{\Omega}$的任意两个顶点也不可能在$E$下$D$划分的同一集合中。但是，如果一个顶点来自$\Omega$，另一个顶点来自$\bar{\Omega}$，就不能保证这两个顶点能在$E$下$D$划分的不同的集合之中。因此，$G$在$E$下或者是1-$(i,j)$可辨的，或者是2-$(i,j)$可辨的。 （证毕）

在图14-3-7所示的从i到j的SEC图G中，如果$E = (e_1, e_2, e_3)$，那么$\{S\} = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_6\}$，它是一个由$E$覆盖的有向割集集体。显然，$G$中每一条边在$\{S\}$的一个割集内。因此，据定理14-3-7，$G$在$E$下或者是1-$(i,j)$可辨的，或者是2-$(i,j)$可辨的。注意在$E$下$D$划分的集合是$(i,j)$，$(1,4)$，$(2,5)$和$(3,6)$。

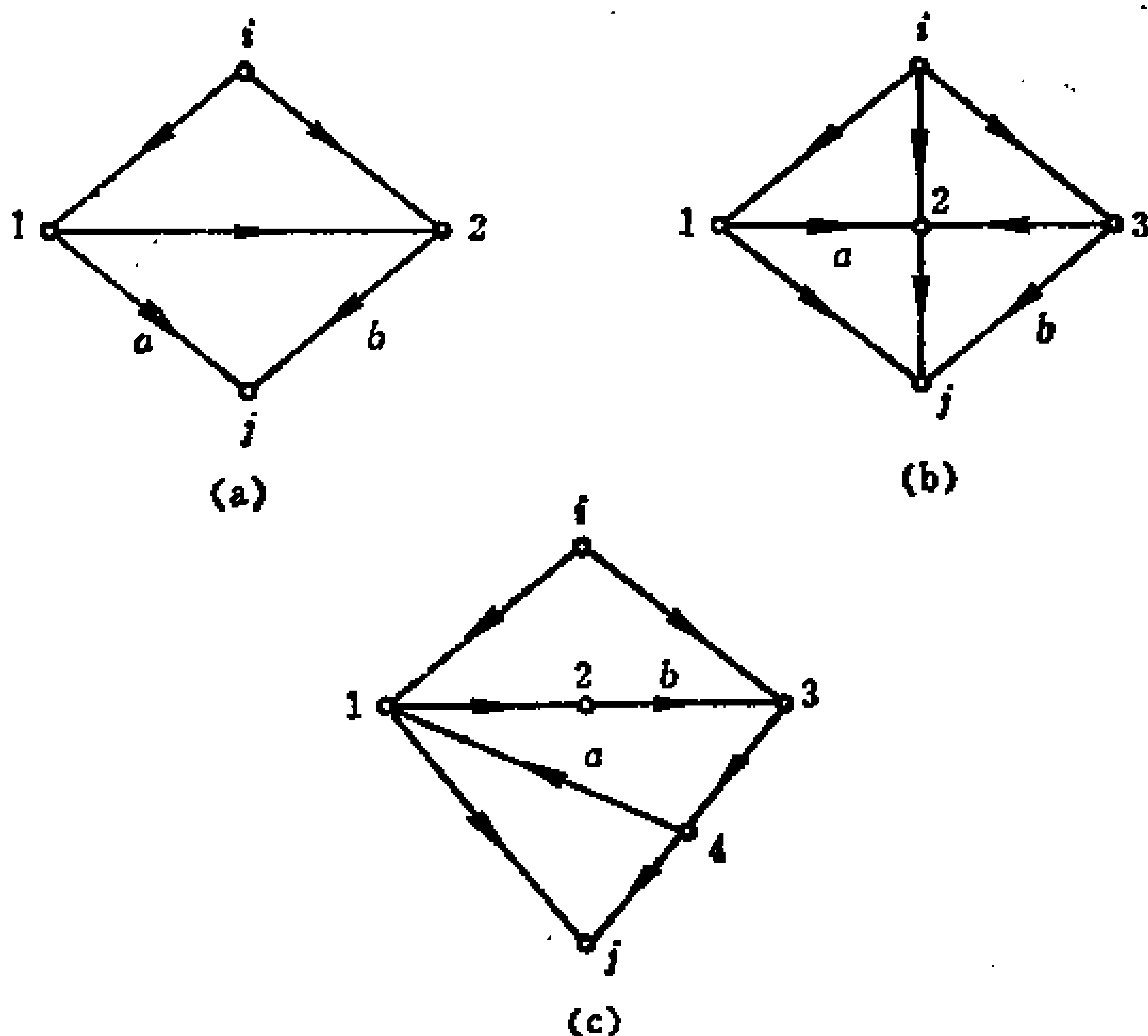
习　题

1.求出在下列可测量集下D的划分，这里$\Omega_1 \cup \bar{\Omega}_1 = (1, 2, 3, 4, 5)$；

$$\Omega_1 = (1, 2, 3, 4) \qquad \Omega_2 = (1, 3, 5)$$

$$\Omega_3 = (2, 3, 4) \qquad \Omega_4 = (1, 3, 4)$$

2.在图 P-14-2 所示的从 i 到 j 的 SEC 图中，找出在集合$E = (a, b)$下所有的可测量集$\Omega(i \times a^+)$，$\Omega(a^- \times j)$，$\Omega(i \times b^+)$，$\Omega(b^- \times j)$，$\Omega(a^+ \times b^+)$，$\Omega(a^+ \times b^-)$，$\Omega(a^- \times b^+)$，$\Omega(a^- \times b^-)$，$\Omega(b^+ \times a^+)$，$\Omega(b^+ \times a^-)$，$\Omega(b^- \times a^+)$及$\Omega(b^- \times a^-)$。



图P-14-2

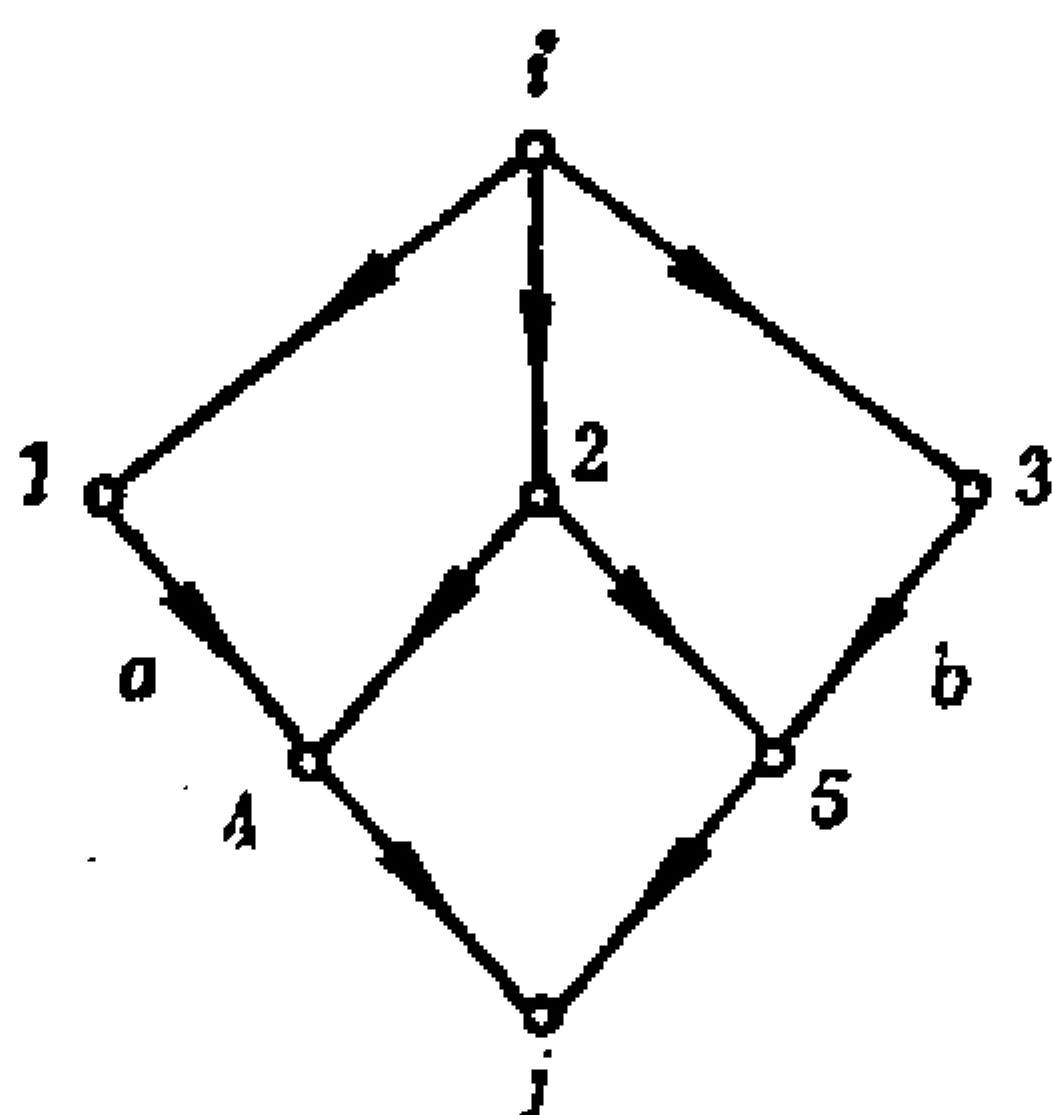
3.习题 2 中从 i 到 j 的各SEC图在$E = (a, b)$下是 1 可辨的

吗?

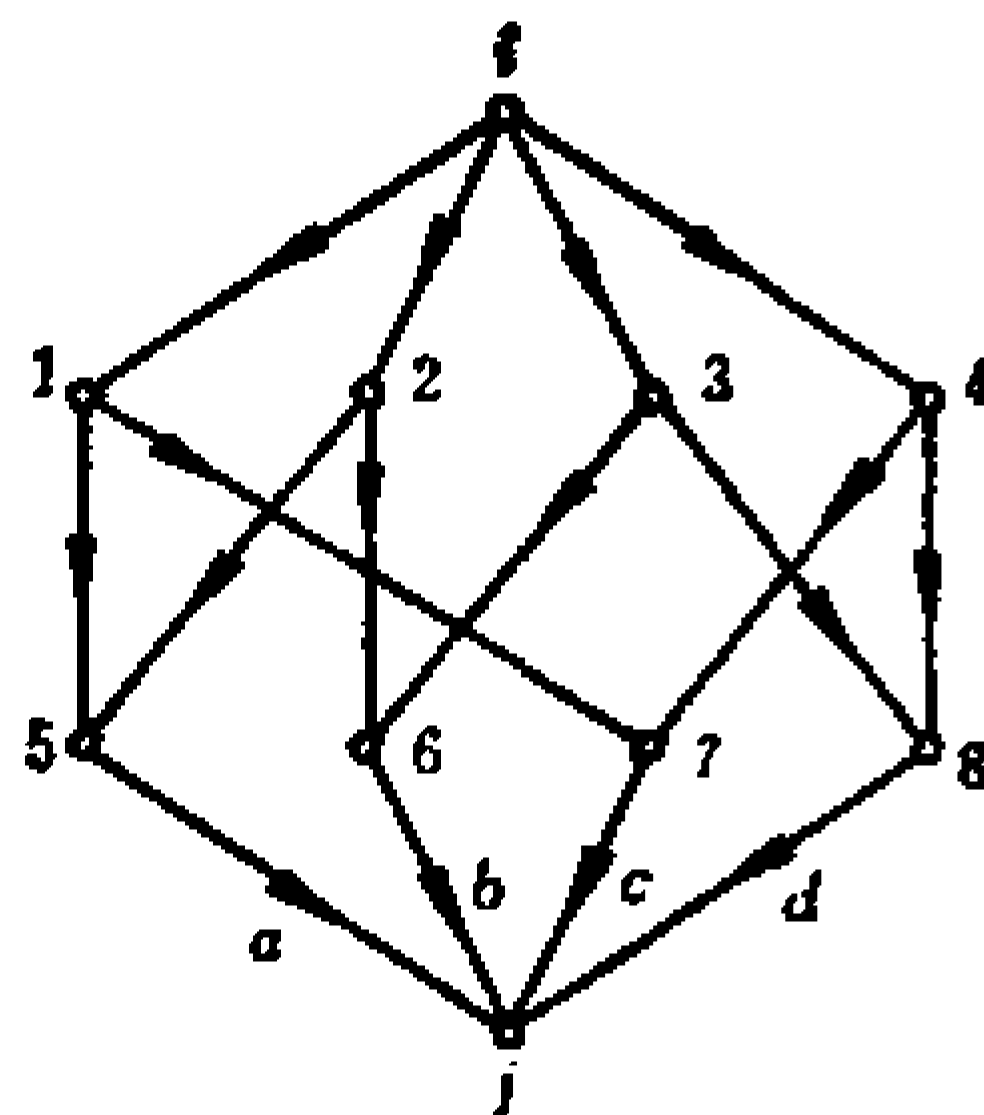
4. 在习题2的各SEC图中，找出由$E=(a,b)$所覆盖的所有的有向割集。

5. 在图P-14-5所示的从i到j的SEC图中，找出所有由$E=(a,b)$所覆盖的有向割集。这个图在$E=(a,b)$下是1可辨的吗?

6. 图P-14-6所示的从i到j的SEC图在$E=(a,b,c,d)$下是1可辨的吗?

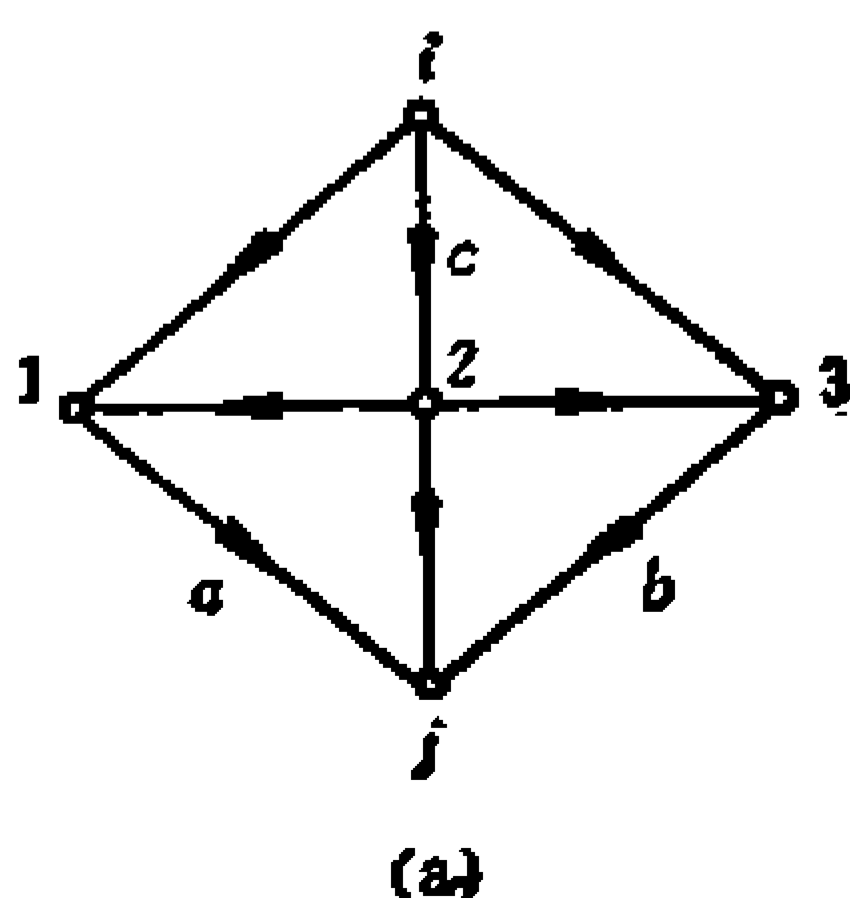


图P-14-5

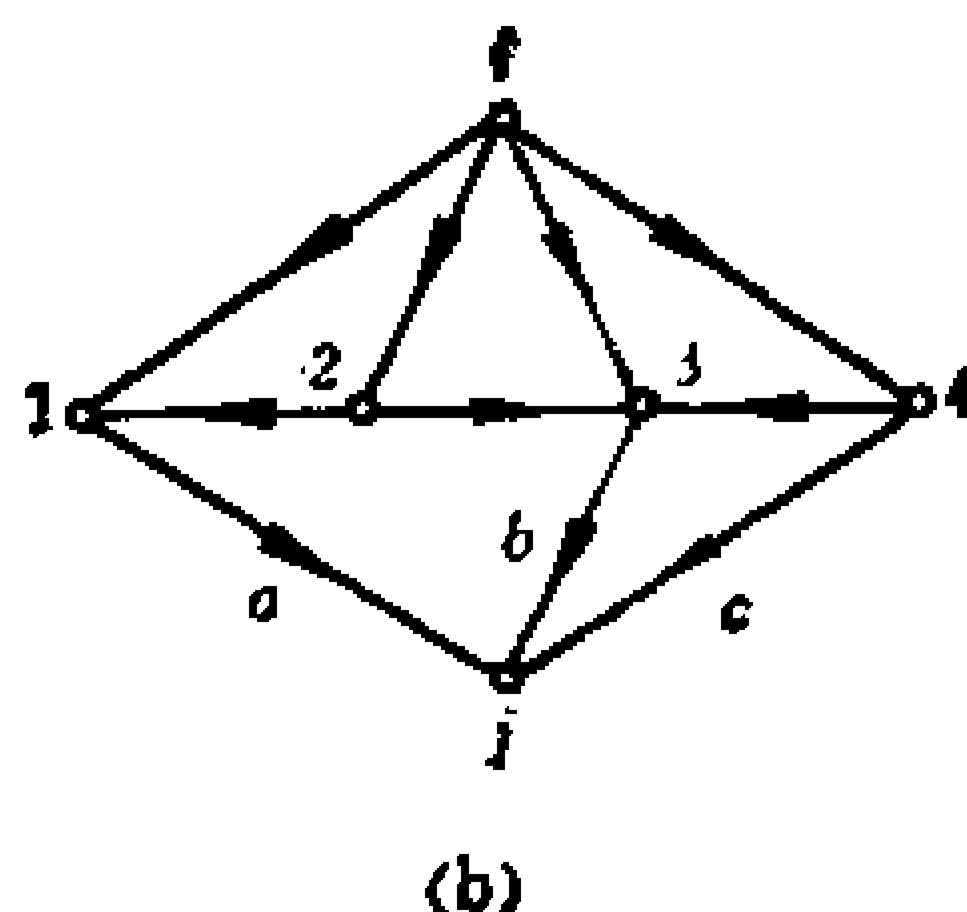


图P-14-6

7. 在图P-14-7所示的从i到j的SEC图中，求出所有门集合$E=(a,b,c)$下的可测量集。



(a)



(b)

图P-14-7

8.习题 7 中的 SEC 图在门集合 $E=(a,b,c)$ 下是 1 可辨的吗？

9.在图P-14-6所示的从 i 到 j 的 SEC 图中，假定我们将测试点指定给边 a 和 b，将测试门指定给 c 和 d。

(a)求出所有的可测量集。

(b)在上述指定下，这个SEC图是 1 可辨的吗？

主要参考文献*

第一章和第二章

Mayeda, W., "Application of Mathematical Logic to Network Theory," Circuit Theory Group, University of Illinois.

Mayeda, W., "Properties of Classes of Paths," Report No. R-212, C.S.L., University of Illinois, Urbana, May 1964.

第三章和第四章

Mayeda, W., "Necessary and Sufficient Conditions for Realizability of Cut-Set Matrices," *IRE Trans, Circuit Theory*, CT-7, 79-81 (Mar, 1960).

Mayeda, W., "Properties of the Non-Singular Matrices Which Transform Cut Set Matrices into Incidence Matrices," *IRE Trans. Circuit Theory*, CT-10, 128-131 (Mar, 1963).

第五章和第六章

Mayeda, W., "Realizability of Fundamental Cut Set Matrices of Oriented Graphs" ,*IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-10,133-134 (March 1963).

Mayeda, W., "Pseudo-Cuts and Their Applica-

* 原著有参考文献388条，这里我们仅选编了同著者有关的34条。——译注

tions,"CSL Report R-233,University of Illinois, Urbana, July 1964.

第七章和第八章

Mayeda, W.,"Digital Determination of Topological Quantities and Network Functions," ITR,No.6, EERL, University of Illinois, 1957.

Mayeda,W.,"Topologcal Formulas for Active Networks," ITR No.8,EERL, University of Illinois, Jan.1958.

Mayeda,W., "Topological Formulas for Active Networks," *Proc.Nat.Elec.Conf.*,15, 1-13 (1958).

Mayeda, W., "Application of Linear Graphs to Electrical Networks, Switching Networks and Communication Nets," CSL Report No.R-203, University of Illinois, July 1964.

Mayeda,W.,"General Transformation for Network Analysis," Proceedings, First Annual Princeton Conference on Information Science and Systems, Mar. 1967.

Mayeda,W., "Graph Theoretical Analysis Using Network Equivalent Transformation," *Trans. IECEJ Japan*,50,115-120 (July 1967).

Mayeda,W.,and Seshu, S., "Topological Formulas for Network Functions," Engr. Experimental Station Bulletin No.446,University of Illinois, Nov.1957.

Mayeda,W.,and Van Valkenburg,M.E., "Network Analysis and Synthesis by Digital Computers,"

IRE Wescon Convention Record, Part.2, 1957, pp. 137-144.

Mayeda, W., and Van Valkenburg, M.E., "Analysis of Non-Reciprocal Networks by Digital Computers," *IRE Wesson Convention Record*, Part 2, 1958, pp. 70-75.

第九章

Mayeda, W., "Reducing Computation Time in the Analysis of Networks by Digital Computer," *IRE Trans. Circuit Theory*, CT-6, 136-137 (Mar. 1959).

Mayeda, W., "Correction to Reducing Computation Time in the Analysis of Networks by Digital Computers," *IRE Trans, Circuit Theory*, CT-6 (Dec. 1959).

Mayeda, W., "Generation of Trees and Complete Trees," CSL R-284, University of Illinois, Apr, 1966.

Mayeda, W., Hakimi, S.L., Chen, W.K., and Deo, N., "Generation of Complete Trees," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-15, 101-105 (June 1968).

Mayeda, W., and Seshu, S., "Generation of Trees Without Duplications," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-12, 181-185 (June 1965).

第十章

Mayeda, W., "Elimination of Subgraphs in a Signal Flow Graph," CSL Report R-339, University of Illinois, Feb. 1967; Proceedings of the Fifth Annual Allerton Con-ference on Circuit and System Theory, Oct. 1967.

第十一章

Mayeda, W., "Synthesis of Switching Functions by Linear Graph Theory," *IBMJ. Res. Develop.*, 4, 320-328 (July 1960).

第十二章和第十三章

Mayeda, W., "Maximum Flow Through a Communication Net," Interim Tech, Report No. 13, Contract DA-11-022-ORD- 1983, University of Illinois, Feb. 1959.

Mayeda, W., "Synthesis of a Communication Net," Interim Tech. Report No. 14, Contract DA-11-022-ORD-1983, University of Illinois, Feb. 1959.

Mayeda, W., "Terminal and Branch Capacity Matrices of a Communication Net," *IRE Trans. Circuit Theory*, CT-7, 261-269 (Sept. 1960).

Mayeda, W., "On Oriented Communication Nets," *IRE Trans., Circuit Theory*, CT-9, 261-267 (Sept. 1962).

Mayeda, W., "Application of Linear Graph Theory to Communication Nets," *Progress in Radio Science* 196-63, Vol. VI, Elsevier Publ. Co., New York, 1966, pp. 67-69.

Mayeda, W., "Maximum Flow under Controlled Edge Flows," Proc, IEEE International Conference on Communication, June 1968.

Mayeda, W., "Computerized Data Communication System and Vertex Weighted Linear Graph," *Proceedings of the 3rd Interational Conference on*

System Science, University of Hawaii, Jan. 1970, pp. 1032-1035.

Mayeda, W., "Flow Reliability of Communication Net," *Proceedings of the Kyoto International Conference on Circuit and System Theory*, Kyoto, Japan, Sept. 1970, pp. 39-40.

Mayeda, W., and Van Valkenburg, M. E., "Properties of Lossy Communication Nets," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-12, 334-338 (Sept. 1965).

Mayeda, W., and Van Valkenburg, M. E., "Set of Cut Sets and Optimum Flow," Third Colloquium on Microwave Communication, Budapest, Apr. 1966.

第十四章

Mayeda, W., and Ramamoorhy, C. V., "Distinguishability Criteria in Oriented Graphs and Its Application to Computer Diagnosis. I," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-16, 448-454 (Nov, 1969).

Mayeda, W., and Ramamoorthy, C. V., "Distinguishability Criteria in Oriented Graphs and Its Application to Computer Diagnosis-II," Proceedings of IEEE International Symposium on Circuit Theory, Georgia, 1970.

英中名词索引

Abelian group	阿贝尔群	定理1-3-5	(22)
Activelike element	似有源元件		(329)
Assigning feow	分配流	定义12-1-3	(470)
Backward property	后向性质	定义9-2-4	(386)
Basic saturated		定义12-1-9	(475)
cut-set	基本饱和割集	定义12-5-2	(502)
~ edge	基本饱和边	定义12-1-8	(475)
~ vertex-cut	基本饱和点割	定义13-1-4	(557)
Binet-Cauchy theorem	比内—柯西定理		(292)
Branch	枝，支路	定义3-3-6	(115)
~ current	支路电流		(279)
Chord	弦	定义3-3-2	(109)
Circuit	回路	定义1-2-11	(15)
~in oriented graph	有向图中的回路	定义6-1-6	(240)
~matrix	回路矩阵	定义3-3-5	(114)
Class W of cut-sets	割集的w 类		(496)
Closed directed edge train	有向闭边列	定义6-6-2	(269)
~ edge train	闭边列	定义1-2-3	(12)
Complete graph	完全图	定义2-2-3	(67)
Completely specif-ied switching			

function	完全确定开关函数		(451)
Complete tree	完全树	定义8-1-3	(334)
Connected	连通		(10)
~graph	连通图	定义1-2-10	(15)
~oriented graph	连通有向图	定义6-1-2	(235)
Connection matrix	连接矩阵	定义11-1-1	(441)
Corresponding cut-set	对应割集		(482)
~major determinant	对应大子行列式		(295)
~nonoriented graph	对应无向图	定义6-1-1	(235)
~signal flow graph	对应信号流图		(421)
~vertex-cut	对应点割	定义13-1-7	(561)
Cover	覆盖	定义14-2-6	(596)
Current edge	电流边	定义8-1-2	(324)
~graph	电流图	定义8-1-1	(331)
Cut-set	割集	定义2-2-2	(66)
~matrix	割集矩阵	定义3-4-2	(119)
~matrix of oriented graph	有向图的割集矩阵	定义6-4-3	(262)
~separating vertices *i* and *j*	分离顶点 *i* 和 *j* 的割集	定义5-1-1	(208)
Cutting vertex	切割顶点	定义1-5-1	(33)
Cut vertex	割点	定义1-5-2	(35)
Degree of vertex d(v)	顶点的度d(v)	定义1-2-1	(10)
~in edge train	边列中顶点的度	定义1-2-5	(12)
Deleting edges	把边删去		(36)

Deletion of verices	删去顶点	定义13-1-1	(555)
D-partition	D划分	定义14-1-5	(591)
D-process	D过程	定义4-3-3	(177)
Directed circuit	有向回路	定义6-6-5	(270)
~cut-set	有向割集	定义6-4-1	(258)
~edge train	有向边列	定义6-6-1	(269)
Closed~	有向闭边列	定义6-6-2	(269)
Open~	有向开边列	定义6-6-2	(269)
~Euler graph	有向欧拉图	定义6-6-4	(270)
~Mgraph	有向M图	定义6-6-6	(272)
~path	有向路径	定义6-6-7	(272)
~tree	有向树	定义8-7-3	(364)
Distance between trees	两个树间距离	定义6-2-1	(248)
Dual	对偶	定义4-3-2	(175)
Edge	边	定义1-1-1	(6)
Nonoriented~	无向边	定义1-1-2	(6)
Oriented~	有向边	定义1-1-2	(6)
Self-loop~	自环边		(6)
~capacity	边容量		(469)
~disjoint union of circuits	回路的无重边并（集）	定义1-2-12	(16)
~disjoint union of circuits in oriented graph	有向图中回路的无重边并	定义6-1-7	(241)
~disjoint union of cut-sets	割集的无重边并	定义2-3-1	(76)
~disjoint union of a path and circuits	一条路径与若干回路的无重边并	定义1-4-2	(28)
~circeuits flow	边流		(279)

~weight	边权		(279)
~train	边列	定义1-2-2	(11)
Elementary tree transformation	初等树变换	定义6-2-2	(249)
Empty set ϕ	空集ϕ		(21)
Endpoints	端点	定义1-1-2	(6)
Entry terminal	入口端		(589)
Entry vertex	入口点	定义14-1-1	(589)
Euler graph	欧拉图	定义1-3-1	(18)
Even sign permutation	偶符号置换	定义8-2-3	(336)
EWC net	EWC网(边权网)		(469)
Exhaustive circuit matrix	穷举回路矩阵	定义3-3-1	(106)
~of oriented graph	有向图的穷举回路矩阵	定义6-1-8	(241)
Exhaustive cut-set matrix	穷举割集矩阵	定义3-4-1	(118)
~of oriented graph	有向图的穷举割集矩阵	定义6-4-2	(259)
Exhaustive incidence matrix	穷举关联矩阵	定义3-1-1	(92)
~of oriented graph	有向图的穷举关联矩阵	定义6-1-3	(236)
Exit terminal	出口端		(589)
Exit vertex	出口点	定义14-1-1	(589)
Fault vertex	故障点	定义14-1-2	(589)
Final vertex	终点		(11)
Flow	流		(470)
Flow graph	流图	定义10-1-1	(409)

Flow reliability	流可靠度		(528)
Forest	林	定义3-2-3	(102)
Forward property	前向性质	定义9-2-4	(386)
Fundamental circuit	基本回路	定义3-3-3	(109)
~in oriented graph	有向图中的基本回路	定义6-1-9	(241)
Fundamental circuit matrix	基本回路矩阵	定义3-3-4	(110)
~of oriented graph	有向图的基本回路矩阵	定义6-1-11	(243)
Fundamental cut-set	基本割集	定义3-4-4	(122)
~in oriented graph	有向图中的基本割集		(262)
Fundamental cut-set matrix	基本割集矩阵	定义3-4-3	(615)
~of oriented graph	有向图的基本割集矩阵	定义6-4-4	(167)
Gate Set	门集合	定义14-3-3	(615)
Homeomorphic	同胚的	定义4-2-3	(167)
H-submatrix	H子阵	定义3-5-2	(126)
Incidence matrix	关联矩阵	定义3-1-2	(99)
~of oriented graph	有向图的关联矩阵	定义6-1-4 6-1-5	(237)
Incidence set	关联集	定义2-1-1	(63)
Incident	关联		(10)
Incoming degree $d^-(v)$	入度$d^-(v)$	定义6-6-3	(269)
Incompletely specified switching			

function	不全定开关函数		(459)
Initial vertex	始点		(11)
Inner region	内区域		(166)
Inner terminal	内部端		(592)
Isolated vertex	孤立点	定义1-2-8	(14)
Isomorphic	同构的	定义4-1-1	(157)
Jacobi's relationship	雅可比关系式		(318)
k-distinguishable	k可辨的	定义14-1-6	(592)
Kirchhoff's law	克希霍夫定律		(279)
Kuratowski's basic nonplanar graphs	库拉托斯基的两个基本非平面图	定理4-2-1	(168)
Linear graph	线图	定义1-1-3	(7)
Oriented~	有向线图		(7)
Nonoriented~	无向线图		(7)
Weighted~	加权线图	定义7-1-1	(279)
~corresponding to edge train	与边列对应的线图	定义1-2-4	(12)
~corresponding to set of edges	与边集对应的线图	定义1-2-9	(14)
Linearly dependent	线性相关	定义2-4-1	(87)
Linearly independent	线性无关	定义2-4-1	(87)
Loop current	回路电流		(283)
Lossy EWC net	损耗EWC网		(521)
Major determinant	大子式	定义3-2-1	(100)
Major submatrix	大子矩阵	定义3-2-1	(100)
Maximal connected subgraph	最大连通子图	定义1-3-3	(23)

Maximal planar graph	最大平面图		(189)
Measurable set	可测量集	定义14-1-3	(589)
Mesh transformation	网孔变换		(282)
M-graph	M图	定义1-4-1	(27)
Minimum M-submatrix	最小M子阵	定义3-5-5	(142)
Minimum nonrealizable matrix	最小不可实现矩阵	定义4-4-2	(192)
Minimum set for $\Omega(i\times i)_E$	关于$\Omega(i\times j)_E$的最小集合		(615)
M-sequence	M序列	定义9-2-5	(389)
M-submatrix	M子阵	定义3-5-3	(136)
Node transformation	节点变换		(286)
Nonoriented EWC net	无向EWC网		(469)
Nonoriented graph	无向图		(7)
Nonoriented VWC net	无向VWC网		(554)
Nonplanar graph	非平面图		(168)
Nonseparable	不可分的	定义1-5-3	(35)
Nonsingular major submatrix	非奇异大子矩阵		(100)
Normal form	正规形式	定义4-4-1	(192)
Nullity	零度	定义4-3-1	(174)
Odd sign permutation	奇符号置换	定义8-2-3	(336)
Open edge train	开边列	定义1-2-3	(12)

Opening edge	断开边		(37)
1-distinguishable	1可辨的	定义14-1-6	(592)
1-distinguishable under E	E下1可辨的	定义14-2-8	(599)
1-(ij)distinguishable	1-(i,j)可辨的	定义14-3-4	(617)
Oriented graph	有向图	定义1-1-3	(7)
Separable~	可分有向图		(236)
Separated~	分离有向图		(236)
Outer region	外区域		(166)
Outgoing degree $d^+(v)$	出度$d^+(v)$	定义6-6-7	(269)
Passivelike element	似无源元件		(297)
Path	路径	定义1-2-6	(12)
Path product	路径积		(47)
Planar	平面的	定义4-2-1	(164)
Principal partition	主分块	定义12-2-2	(481)
Principal tree	主树		(337)
Principal vertex	主点	定义8-2-1	(334)
Proper subgraph	真子图	定义1-2-7	(14)
P-set cycle	P-集圈	定义10-1-4	(411)
Pseudocut	伪割	定义5-2-1	(219)
Pseudocut in$(U)_{U1}$	$\{U\}_{U1}$中的伪割	定义5-2-3	(219)
Pseudo EWC net	伪EWC网	定义12-5-4	(513)
Pseudo index	伪指标		(514)
Rank of linear graph	线图的秩	定义2-2-1	(65)
Rank of matrix	矩阵的秩		(95)
Reference vertex	参考点	定义3-1-3	(99)

Region	区域		(166)
Resultant main submatrices	结果主子阵	定义12-2-2	(481)
Ring product	环积	定义1-6-2	(41)
Saturated cut-set	饱和割集	定义12-1-7	(474)
Saturated edge	饱和边	定义12-1-6	(474)
Saturated vertex	饱和顶点	定义13-1-3	(556)
Saturated vertex-cut	饱和点割	定义13-1-3	(556)
SC network	SC网络(单触点网络)	定义11-3-1	(451)
SEC graph	SEC图(单输入单输出的连通图)	定义14-2-4	(594)
SEC graph from i to j	从i到j的SEC图	定义14-2-5	(594)
Self-loop	自环		(6)
Semicut	半割	定义12-5-1	(501)
Separable	可分的	定义1-5-2	(35)
Separated graph	分离图	定义1-2-10	(15)
Series	串联	定义4-2-2	(167)
Series edges	串联边	定义4-2-2	(167)
Set of chords	弦集	定义3-3-2	(109)
Set of fundamental circuits	基本回路集合	定义3-3-3	(109)
Set of fundamental cut-sets	基本割集集合	定义3-4-4	(122)
Set of minimum M submatrices	最小M子阵集	定义3-5-5	(142)
Shifting algorithm	移置算法		(512)
Shoring edge	短路边		(37)
Sign permutation	符号置换	定义8-2-2	(336)

Signal flow graph	信号流图	定义10-2-1	(415)
Singular matrix	奇异矩阵		(101)
Sink	汇点		(417)
Sink terminal capacity	汇端限容量	定义12-6-1	(524)
Source	源点		(417)
Source terminal capacity	源端限容量	定义12-6-1	(524)
SP-network	SP网络（单-对网络）	定义11-5-1	(463)
S-submatrix	*S*子阵	定义12-5-3	(506)
Subgraph	子图	定义1-2-7	(14)
Subset	子集	定义1-6-1	(40)
Proper subset	真子集	定义2-2-2	(66)
Sylvester's Law of Nullity	西勒维斯特零度定理	定理3-3-4	(113)
τ-graph	τ图	定义1-7-1	(49)
Terminal capacity	端限容量	定义12-1-5	(474)
Terminal capacity matrix	端限容量矩阵	定义12-2-1	(481)
Terminal vertices of *M* graph	*M*图的端点	定义1-4-1	(27)
Test gate	测试门	定义14-3-1	(614)
Test point	测试点	定义14-2-1	(593)
Threshold level	阈级	定义12-7-1	(529)
Tree	树	定义3-2-2	(100)
Tree admittance product	树枝导纳乘积	定义7-4-1	(297)
Tutte's realizability condition	托特的可实现性条件	定理4-4-7	(205)
2-isomorphic	2-同构	定义4-1-2	(157)

2-isomorphic operation of type 1	第一型2-同构运算	定义4-4-4	(197)
2-isomorphic operation of type 2	第二型2-同构运算	定义4-4-4	(197)
2-tree	2-树	定义7-5-2	(305)
2-tree admittance product	2-树树枝导纳乘积		(309)
Unistor	单向导纳	定义8-7-1	(357)
Unit cost	单位价值		(489)
Value of cut-set	割集的值	定义12-1-10	(479)
Value of set	集合的值	定义13-1-6	(560)
Vertex	顶点	定义1-1-1	(6)
Vertex-cut.	点割	定义13-1-2	(556)
Vertex disjoint union of directed circuits	顶点不相接有向回路	定义10-1-3	(411)
Vertex semicut	点半割	定义13-3-1	(572)
Voltage edge	电压边	定义8-1-1	(324)
Voltage graph	电压图	定义8-1-2	(331)
VWC net	VWC网 (点权网)		(553)
Weighted linear graph	加权线图	定义7-1-1	(279)
Whitney's duality	惠特尼对偶性	定理4-3-10	(186)
$\mathcal{W}$ process	w过程	定义6-6-9	(276)

符 号 索 引

$\{E\}$	定义1-3-2	(21)
$\{E, M_{ij}\}$	定理1-4-5	(31)
$\{M_{ij}\}$	定义1-4-3	(31)
$\{P_{ij}\}$	定义1-4-3	(31)
$\{P_{[c]}\}$	定义1-6-3	(45)
$\{S\}$	定理2-3-3	(84)
$\{S^0\}$	定义5-2-2	(219)
$\{S(i;j)\}$		(216)
$\{S^0(i;j)\}$		(216)
$\{S, Y_U\}$		(230)
$\{U\}_{U_1}$	定义5-2-3	(219)
$[\{U\}, \{S^0\}]$		(227)
$\{Y_U\}$	定义5-2-5	(229)
$\{\tau_{(i_1 i_2 \cdots i_n)}\}$	定理1-7-4	(52)
$[\{\tau\}, \{C\}]$		(60)
$\{\Omega\}$	定义14-2-8	(611)
A	定义3-1-2	(99)
A_c	定义3-1-1	(92)
A_{-p}		(303)
A^+	定义8-7-2	(362)
B	定义3-3-5	(114)
B_c	定义3-3-1	(106)

B_f	定义3-3-4	(110)
$C(\bar{P}_i)$		(425)
$d(v)$	定义1-2-1	(10)
$d^+(v)$	定义6-6-3	(269)
$d^-(v)$	定义6-6-3	(269)
$D_j(\bar{K})$		(421)
$D_q(K)$		(421)
$D_j(0)$		(423)
$D_j(-1)$		(423)
$F(e_{p_1}e_{p_2}\cdots e_{p_k})$		(462)
$G(p=j)$		(304)
$G_p\overline{(\Omega(P_l)\bar{K})}$	定义10-2-3	(424)
$G\overline{(\Omega(P_i))}$		(425)
$G_R(\overline{u_1u_2\cdots u_v})$	定义10-3-1	(428)
$G_R(\vec{u}_q:q=1,2,\cdots,v)$	定义10-3-1	(428)
$H_{(i)}$	定义3-5-2	(126)
$M(j_1j_2\cdots j_k)$		(141)
$M(i\times j$	定义6-6-6	(272)
$M(a^{\pm}\times b^{\pm})$	定义14-2-3	(494)
n_e		(10)
n_v	定义2-2-1	(65)
Q	定义3-4-2	(119)
Q_e	定义3-4-1	(118)
Q_f	定义3-4-3	(122)
$R(t_{ij})$		(529)
$R(\psi_{ij})$		(531)
$R\left(\frac{\overline{t_1t_2\cdots t_v}}{u_1u_2\cdots u_v}\right)$	定义10-3-1	(428)

$R\left(\begin{matrix}\vec{i}_q\\ \vec{u}_q\end{matrix}: q=1,2,\cdots,v\right)$	定义10-3-1	(428)
$S(v)$	定义2-1-1	(63)
S_{ct}		(124)
$S_e(t_1)$		(382)
$S(i;j)$	定义5-1-2 定义5-1-3	(209) (216)
$S(ij;)$	定义5-1-2 定义5-1-3	(209) (216)
$t^{\pm}$		(395)
$t_{2p,j}$		(304)
$t_{2a_1a_2\cdots a_p;b_1b_2\cdots b_q}$	定义7-5-2	(305)
$t_{3(1,p_2);j}$	定义7-6-1	(319)
$t_{\overline{\overline{n_1n_2\cdots n_k}}}$	定义8-8-2	(370)
$t_{n_0n_1\vert\overline{\overline{n_2\cdots n_k}}}$	定义8-8-1	(368)
t_{ij}	定义12-1-5	(474)
$t_{ij}(\bar{z})$		(529)
$\bar{t}_{ij}$	定义12-6-1	(524)
$\underline{t}_{ij}$	定义12-6-1	(524)
$t_{ij}\overline{(e_{p_1}e_{p_2}\cdots e_{p_k})}$	定义12-7-1	(529)
$T_{2a_1a_2\cdots a_p;b_1b_2\cdots b_q}$	定义7-5-3	(305)
T^{c}	定义9-2-1	(384)
$T^{c_1c_2}$	定义9-2-2	(385)
$T^{c_1c_2\cdots c_k}$	定义9-2-3	(386)
$T\overline{(e_{p_1}e_{p_2}\cdots e_{p_k})}$	定义12-7-1	(529)
$U_{i;k;j}$	定义7-6-2	(320)
$\sum U$	定义7-6-3	(321)

$U_{(i,o;j,k)}$		(355)
V	定义7-5-4	(309)
	定义8-4-1	(346)
$V_{\overline{\overline{a_1a_2\cdots a_k}}}$	定义8-8-2	(370)
$V[S]$	定义12-1-10	(479)
$V[W_i]$	定义13-1-6	(560)
$v(e^+)$	定义14-2-2	(493)
$v(e^-)$	定义14-2-2	(493)
$W_{a_1a_2\cdots a_r,b_1b_2\cdots b_s}$	定义7-5-4	(310)
$W_{(j,k;i,0)}$	定义8-4-2	(347)
$W_{a_0a_1\overline{\overline{\mid a_2\cdots a_k}}}$	定义8-8-1	(370)
e_k		(334)
Δ'		(297)
Δ'_{pq}		(302)
$\mathscr{E}(\Omega_p\times\Omega_q)$	定义2-2-4	(68)
Ω_c		(67)
Ω_1		(68)
Ω_1		(68)
$\Omega(G)$	定理13-4-1	(576)
$\Omega(S)$	定理13-4-2	(578)
$\Omega^+(g)$	定义13-4-3	(581)
$\Omega(i\times j)$	定义14-1-3	(489)
$\Omega(a^\pm\times j)$	定义14-2-3	(494)
$\Omega(i\times a^\pm)$	定义14-2-3	(494)
$\Omega(a^\pm\times b^\pm)$	定义14-2-3	(494)
$\Omega(i\times j)_R$	定义14-3-2	(614)
ψ_{ij}	定义12-1-2	(470)

ρ	定义1-3-3	(23)
$\tau_{(i_1 i_2 \cdots i_n)}$		(50)
$\in$	属于…或在…中	(6)
$\cup$	并	(6)
$\cap$	交	(17)
$-$	差	(17)
$\oplus$	环和	(17)
$\subset$	$A\subset B$：A中每一个元素都在B中	(42)
$\not\subset$	$A\not\subset B$：A中不是每一个元素都在B中	(40)
$\subsetneqq$	$A\subsetneqq B$：$A\subset B$且$B\not\subset A$	(222)
$\otimes$	定义1-6-2	(41)
$\odot$	定义9-3-1	(395)

责任编辑 唐光明
封面设计 [illegible]
技术设计 夏 [illegible]

书 号：[illegible]

定价：（平）[illegible]元
（精）[illegible]元